A. hydr. 3 k Albrecht

Bayerische Staatsbibliothek
<36649018860016

LEHRBUCH
DER NAVIGATION

UND IHRER

MATHEMATISCHEN HÜLFSWISSENSCHAFTEN.

FÜR DIE KÖNIGL. PREUSSISCHEN

NAVIGATIONS-SCHULEN

BEARBEITET VON

M. F. ALBRECHT,
NAVIGATIONS-SCHUL-DIRECTOR.

C. S. VIEROW,
NAVIGATIONS-LEHRER.

FÜNFTE AUFLAGE.

DIESE SOWIE DIE 2., 3., 4. AUFLAGE BEARBEITET VON

M. F. ALBRECHT,
NAVIGATIONS-SCHUL-DIRECTOR.

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DES KÖNIGLICHEN MINISTERIUMS
FÜR HANDEL, GEWERBE UND ÖFFENTLICHE ARBEITEN.

BERLIN, MDCCCLXXVII.
R. v. DECKER'S VERLAG
MARQUARDT & SCHENCK.

Vorwort zur ersten Auflage.

In dem Vorworte zu den im Jahre 1852 erschienenen, von dem Navigations-Lehrer F. Domke bearbeiteten nautischen, astronomischen und logarithmischen Tafeln sind bereits die nöthigen Erläuterungen über den Zweck, welcher bei Bearbeitung und Herausgabe dieses Lehrbuches leitend gewesen ist, gegeben worden.

Bei der Auswahl der darin zu behandelnden Materien hat zunächst, was den mathematischen Theil des Lehrbuches betrifft, auf eine Entwickelung der dem Schiffer unentbehrlichen Lehrsätze der Arithmetik, der ebenen Geometrie und der Stereometrie verzichtet werden können. An die Eleven, welche in die Preussischen Navigations-Schulen eintreten, wird die Anforderung gestellt, dass sie mit diesen Zweigen der mathematischen Wissenschaft sich bereits bekannt gemacht haben; dieselben werden daher bei dem Unterrichte in den Navigations-Schulen nur repetitionsweise durchgenommen.

Dagegen sind die Grundsätze der ebenen und der sphärischen Trigonometrie, welche die Grundlagen des terrestrischen und astronomischen Theiles der Navigation bilden, einer ausführlichen Entwickelung unterworfen worden.

Aus den Grundsätzen der Differential-Rechnung ist nur so viel in das Lehrbuch aufgenommen worden, als nöthig erschien, um den Einfluss zu erläutern, welchen die unvermeidlichen Fehler in den Bestimmungsstücken bei der Lösung nautischer Probleme ausüben. Ebenso ist die Lehre von der Ellipse darin nur insoweit behandelt, als dieselbe für die Entwickelung der Formeln bei der Längenbestimmung durch Mond-Distanzen, wenn man dabei die Abplattung der Erde in Rechnung bringen will, unentbehrlich ist.

Die, die Navigations-Lehre selbst in ihrem terrestrischen Theile sowie in ihrem astronomischen Theile behandelnden Ab-

Vorwort zur zweiten Auflage.

In dieser Auflage haben die Abschnitte über „Navigation" in den §§. 4. 21. 25. 30. 31. 34. 44. 51. und 70. einige Zusätze erhalten. Im Abschnitte über „Nautische Astronomie" ist der §. 206. neu hinzugekommen.

Aus den in dem Vorworte zur ersten Auflage angegebenen Gründen ist die Aufnahme eines besonderen Abschnittes über die Winde und Meeresströmungen auch jetzt unterblieben.

Berlin, im October 1857.

Para-graphen | Seite

27. Gleichungen, worin zwei Winkel und zwei Seiten vorkommen 55
28. Andere Gleichungen, worin zwei Winkel und zwei Seiten vorkommen 56
29. Gleichungen, aus den drei Seiten die Winkel zu finden 56
30. Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel den andern Gegenwinkel zu finden . 56
31. Gleichungen, aus den drei Winkeln die Seiten zu finden 57
32. Umformung der Gleichungen (VI.) in §. 27. 57
33. Umformung der Gleichungen (VII.) in §. 28. 57
34. Ableitung der Gleichungen für das sphärische rechtwinklige Dreieck aus den Gleichungen von (I.) bis (VII.) in den vorstehenden Paragraphen, wenn in letzteren Winkel $A = 90^\circ$ gesetzt wird, bezw. aus (I.) 58
35. Ermittelung des Satzes: Ist die Hypotenuse eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks spitz, dann sind die Katheten entweder beide stumpf oder beide spitz; ist dieselbe aber stumpf, so ist die eine Kathete spitz, die andere stumpf . . . 59
36. Die Gleichungen: aus den drei Seiten die Winkel zu finden (§. 29.), logarithmisch gemacht . 59
37. Logarithmische Gleichungen: aus den drei Winkeln die Seiten zu finden 61
38. Die Gaussischen Gleichungen . 62
39. Die Napier'schen Gleichungen . 63
40. Gleichungen, aus zwei Seiten und deren Gegenwinkel den dritten Winkel oder auch die dritte Seite zu finden . 64
41. Von der Auflösung der sphärischen schiefwinkligen Dreiecke 65
42. Berechnung der sphärischen schiefwinkligen Dreiecke nach den in den vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten logarithmischen Gleichungen 66
43. Beispiele zur Uebung (von sphärischen schiefwinkligen Dreiecken) 71
44. Napier's Regel zur Auffindung der Gleichungen der sphärischen rechtwinkligen Dreiecke und Berechnung einiger Dreiecke 72
45. Beispiele zur Uebung . 74
46. bis incl. 52. Auflösung der sphärischen schiefwinkligen Dreiecke vermittelst Hülfswinkel . 75
53. Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks zu finden 83
54. Die Länge eines grössten Kreisbogens durch dessen Gradmaass und den Radius der Kugel zu bestimmen . 84
55. Vom sphärischen Excess . 84
56. Ein anderer Beweis der Grundgleichung in §. 19. 85

Einiges über Differential-Rechnung.

57. Einleitung . 87
58. Vom Verhältnisse zwischen dem Zuwachse der Function und dem der Veränderlichen . 87
59. Vom Differential-Coefficienten . 88
60. Den Differential-Coefficienten zu finden . 89
61. Das Differential der Summe oder Differenz zweier Functionen zu finden 89
62. Das Differential eines aus mehreren Factoren bestehenden Productes zu finden 90
63. Das Differential eines Quotienten zu finden 91
64. Das Differential einer beliebigen Potenz zu finden 91
65. Differentiation algebraischer Functionen . 92
66. und 67. Von der Differentiation der Wurzelgrössen 93
68. Das Differential des Sinus zu finden . 94
69. Das Differential des Cosinus, der Tangente, der Cotangente, der Secante, der Cosecante und des Sinusversus zu finden . 95
70. Differentiation der Gleichungen sphärischer Dreiecke 96
71. Die Differential-Gleichungen der sphärischen Dreiecke auf geometrischem Wege zu finden . 99

Paragraphen | Seite

Einiges über die Ellipse.

72. Erklärung der Ellipse 103
73. Die Gleichung der Ellipse zu finden 103
74. Aus den beiden Axen der Ellipse die Excentricität zu finden 104
75. Eine Ellipse zu construiren, wenn die grosse Axe und der Abstand ihrer Brennpunkte gegeben ist 105
76. Ein anderes Verfahren, die Ellipse zu construiren 105
77. Von dem Parameter der Ellipse 106
78. Von der grossen Normale, kleinen Normale und Subnormale einer Ellipse . . . 106
79. Die Gleichung des Winkels zu finden, den die Tangente der Ellipse mit der verlängerten Abscissen-Axe macht 107
80. Die Gleichung der Subtangente einer Ellipse zu finden 108
81. Von einem gegebenen Punkte in der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen 108
82. Die Brennstrahlen der Ellipse nach dem Tangirungspunkte der Tangente gezogen, bilden mit dieser gleich grosse Winkel 109
83. Die Normale der Ellipse zu finden 109
84. Die Subnormale der Ellipse zu finden 110
85. Von der Gleichung der Winkel in einer Ellipse, welche die Normale und die Centrale, von einem Punkte derselben ausgehend, mit der Abscissen-Axe bilden 110
86. Den Radius der Ellipse vermittelst der beiden halben Axen und des Winkels, den der Radius mit der Abscissen-Axe bildet, zu finden 111
87. Gleichungen, nach welchen die Differenz der Winkel, die der Radius und die Normale mit der Abscissen-Axe bilden, gefunden werden kann 111
88. Den Flächeninhalt der Ellipse aus ihren beiden halben Axen zu finden 112

Navigation.

1. Einleitung 113
2. Kugelgestalt der Erde 114
3. Das Erdsphäroid, die Erdpole, Erdaxe, der Erd-Aequator, die Erd-Meridiane, die Breitenparallele und die Abplattung der Erde 115
4. Die Schwerkraft der Erde, die Horizontal- und Vertical-Linie und Ebene . . 116
5. Geographische und geocentrische Breite; geographische Länge 117
6. Eine zweite Erklärung der geographischen Länge. Die Wende- und Polarkreise; die Zonen der Erde 118
7. Grösse der Erde. Die geographische Meile und Seemeile; das metrische Längenmaass und die Englischen Meilen 119
8. Die Erde als vollständige Kugel betrachtet. Die loxodromische Linie; das nautische Curs-Dreieck 120
9. Das Mittelbreitendreieck 124
10. Verhältniss der Breitenparallele 125
11. Die Meridionaltheile. Das Mercator'sche Dreieck 125
12. Berechnung der geocentrischen Breite eines Ortes aus seiner geographischen Breite und den beiden halben Erdaxen, oder der Excentricität der Erdmeridiane 127
13. Berechnung einiger Meridionaltheile nach Formel (II.) in §. 11 129
14. Berechnung der Grösse, welche man auf die Mittelbreite anzuwenden hat, um die Breite zu erhalten, auf welche die Abweichung fällt 129
15. Astronomische Erklärungen. Zenith, Nadir, Almukantarate, Horizonte und Verticalkreise 130
16. Weltpole, Weltaxe, Himmels-Aequator, Declinations- oder Stundenkreise . . 131
17. Hauptpunkte des Horizontes, die Mittagslinie, der Himmels-Meridian 131
18. Auf- und Untergang, Amplitude, Azimuth, Culmination, Stundenwinkel, Höhe und Zenithdistanz eines Gestirns 132
19. Die Drehung der Erde um ihre Axe 133

Paragraphen | Seite

174. Aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen desselben Fixsternes oder auch eines anderen Gestirns, dessen Declination in der Zwischenzeit so wenig ändert, dass man ohne erheblichen Fehler eine mittlere Poldistanz bei beiden Höhen annehmen kann, die Breite und Zeit zu finden, wenn die den Höhen entsprechenden Zeiten einer Uhr notirt sind, deren Gang und ungefährer Stand bekannt ist (directe Methode) 517
175. Vom Einfluss eines kleinen Fehlers in einem der gegebenen Theile auf die nach §. 174. berechnete Breite 518
176. Regel. Die Breite und Uhrcorrection nach den in §. 174. gegebenen Formeln zu berechnen 521
177. Aus gleichzeitig oder auch zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen zweier Gestirne, oder auch aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen ein und desselben Himmelskörpers die Breite und Zeit näherungsweise zu bestimmen, wenn der Gang und der ungefähre Stand der Beobachtungsuhr bekannt, überdies die eine Höhe bedeutend näher am Meridian beobachtet ist, als die andere 525
178. Regel zur Berechnung der Breite und Uhrcorrection nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Methode 527
179. Aus, zu gleichen oder verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen zweier Gestirne oder auch aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen eines Gestirns näherungsweise die Breite und Zeit zu bestimmen, wenn der Gang und der ungefähre Stand der Uhr, nach welcher die den Höhen entsprechenden Zeiten notirt sind, bekannt ist, und keine der Höhen nahe am Meridian beobachtet wurde 530
180. Regel. Die Breite und Uhrcorrection nach der in §. 179. beschriebenen Methode zu finden 532
181. Aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen eines Himmelskörpers die Zeit und Breite näherungsweise nach Douwes's Methode zu finden 536
182. Vom Einfluss der Fehler in den gegebenen Theilen auf die nach §. 181. berechnete Zeit und Breite 538
183. Regel. Breite und Zeit nach der Methode von Douwes zu bestimmen (§. 181.) 551
184. Die wahre Höhe eines Himmelskörpers zu berechnen 559
185. Vom Einfluss des Fehlers in einem der gegebenen Theile auf die nach §. 184. zu berechnende Höhe 561
186. Die wahre Höhe nach (II.), (III.) und (IV.) in §. 184. zu berechnen 562
187. Bestimmung der Länge durch Monddistanzen 565
188. Untersuchung des Fehlers, der nach der zweiten Methode (§. 187.) dadurch in der wahren Distanz entstehen kann, dass man die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirken lässt 575
189. Untersuchung des Fehlers, der nach der dritten Methode (§. 187.) in der wahren Distanz dadurch entstehen kann, dass man die Höhenparallaxe im Vertical zum geographischen Zenith wirken lässt 577
190. Vom Einfluss eines Fehlers in einem der gegebenen Stücke auf die zu berechnende wahre Distanz 579
191. Aus der berechneten wahren Distanz mit Hülfe einer Ephemeride die Länge des Beobachtungsortes zu bestimmen, sowie die nach Chronometer ermittelte damit prüfen 582
192. Regel. Die wahre Distanz und die Länge nach der im §. 187. beschriebenen ersten Methode zu berechnen 583
193. Regel. Die wahre Distanz nach der im §. 187. beschriebenen zweiten Methode zu finden und die Länge zu bestimmen 584
194. Regel. Die wahre Distanz nach der dritten Methode zu finden und die Länge zu bestimmen, nebst Beispielen 585
195. Die Missweisung des Compasses durch Beobachtung der Sonnen-Amplitude zu bestimmen, wenn die Breite des Ortes bekannt ist 598

Para-graphen | Seite

196. Die Missweisung des Compasses durch Azimuth-Beobachtungen der Sonne zu bestimmen und die Localdeviation zu finden, wenn man die Missweisung eines Compasses, der keine Localdeviation hat, kennt, oder wenn diese Missweisung nicht bekannt sein sollte, letztere aus der Beobachtung zu ermitteln 604
197. Das wahre Azimuth terrestrischer Gegenstände zu bestimmen 617
198. Ebbe und Fluth . 620
199. Die mittlere Zeit des Hochwassers für einen gegebenen Tag und Ort zu berechnen . 632
200. Die mittlere Zeit des Niedrigwassers zu finden 633
201. Die Zeit des Hochwassers mit Hülfe eines gewöhnlichen Kalenders ungefähr zu finden . 636
202. Vom Schaltjahr, den Jahres- und Monats-Epacten 637
203. Regel. Die Zeit der Culmination des Mondes nach dem Alter desselben zu finden 638
204. Regel. Die Zeit des Hochwassers nach Tafel I. und Tafel II. zu finden 639
205. Ueber die Berichtigung der Lothung auf Niedrigwasser 641
206. Aus einer Höhe der Sonne in beliebigem Azimuth nach einem Chronometer beobachtet, dessen Stand und Gang bekannt ist, eine Linie in der Seekarte zu bestimmen, welche durch den Beobachtungsort geht (Summer's Methode). Ferner Bestimmung der Länge mittelst Chronometer und der Breite nach der Methode von Douwes, wenn die Sonnenhöhen in der Nähe des Meridians beobachtet sind 643
207. Anweisung, die kenntlichsten Sterne und Sternbilder nach den Sternkarten der nördlichen und südlichen Hemisphäre und den darin gezogenen Linien am Himmel zu finden . 658

Das Griechische Alphabet.

Α, α,	Alpha.		Κ, κ,	Kappa.		Σ, σ,	Sigma.	
Β, β,	Beta.		Λ, λ,	Lambda.		Τ, τ,	Tau.	
Γ, γ,	Gamma.		Μ, μ,	My.		Υ, υ,	Ypsilon.	
Δ, δ,	Delta.		Ν, ν,	Ny.		8,	U.	
Ε, ε,	Epsilon.		Ξ, ξ,	Xi.		Φ, φ,	Phi.	
Ζ, ζ,	Zeta.		Ο, ο,	Omicron.		Χ, χ,	Chi.	
Η, η,	Eta.		Π, π,	Pi.		Ψ, ψ,	Psi.	
Θ, ϑ, θ,	Theta.		Ρ, ρ,	Rho.		Ω, ω,	Omega.	
Ι, ι,	Iota.							

$AD'E'$, $AF'G'$, welche einander, sowie auch den obigen Dreiecken, ähnlich sind, und daher die Proportionen liefern:

$$\begin{aligned} BC : r &= B'C' : r' \\ AC : r &= AC' : r' \\ DE : r &= D'E' : r' \\ FG : r &= F'G' : r' \\ AD : r &= AD' : r' \\ AF : r &= AF' : r'. \end{aligned}$$

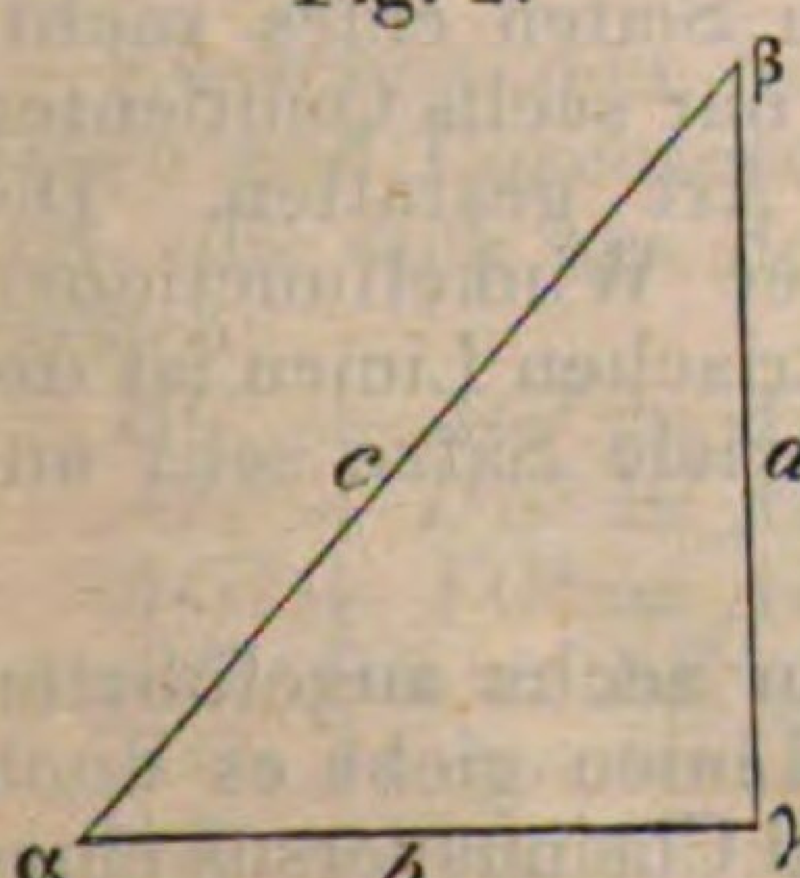
Hieraus ersieht man, dass, wenn der Halbmesser sich ändert, der Winkel aber derselbe bleibt, sich dann zwar die trigonometrischen Linien dieses Winkels auch ändern, jedoch das Verhältniss derselben zu ihren respectiven Halbmessern unverändert bleibt. Da hiernach die Verhältnisse der trigonometrischen Linien zu ihrem Halbmesser nur von dem Winkel abhängig sind, zu dem sie gehören, so sind sie reine Winkelfunctionen und werden deshalb auch trigonometrische Functionen genannt.

B. Die trigonometrischen Functionen sind also Quotienten, welche entstehen, wenn man die trigonometrischen Linien durch den dazu gehörigen Halbmesser dividirt, also Zahlenwerthe oder Zahlen. Um nun die trigonometrischen Linien auch durch Zahlen ausdrücken zu können, ist es zweckmässig, den dazu gehörigen Halbmesser einer ganzen Zahl gleich zu setzen und jene durch diesen auszumessen. Gewöhnlich wird der Halbmesser zu diesem Behuf = 10000000000 oder = 1, seltener = 1000000, oder = 100000 angenommen.

Bezeichnet man die sechs trigonometrischen Linien des Winkels α in Fig. 1. mit Sin, Cos, Tang, Cotg, Sec, Cosec, und die trigonometrischen Functionen desselben Winkels mit sin, cos, tang, cotg, sec, cosec, so finden zwischen diesen und jenen, mit Rücksicht auf das Vorangehende, folgende Gleichungen statt:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\text{Sin}\,\alpha}{r}, \text{ oder } \text{Sin}\,\alpha = r\cdot\sin\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{\text{Cos}\,\alpha}{r} \quad \text{»} \quad \text{Cos}\,\alpha = r\cdot\cos\alpha \\ \text{tang}\,\alpha &= \frac{\text{Tang}\,\alpha}{r} \quad \text{»} \quad \text{Tang}\,\alpha = r\cdot\text{tang}\,\alpha \\ \text{cotg}\,\alpha &= \frac{\text{Cotg}\,\alpha}{r} \quad \text{»} \quad \text{Cotg}\,\alpha = r\cdot\text{cotg}\,\alpha \\ \sec\alpha &= \frac{\text{Sec}\,\alpha}{r} \quad \text{»} \quad \text{Sec}\,\alpha = r\cdot\sec\alpha \\ \text{cosec}\,\alpha &= \frac{\text{Cosec}\,\alpha}{r} \quad \text{»} \quad \text{Cosec}\,\alpha = r\cdot\text{cosec}\,\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots (\text{I.})$$

Fig. 2.



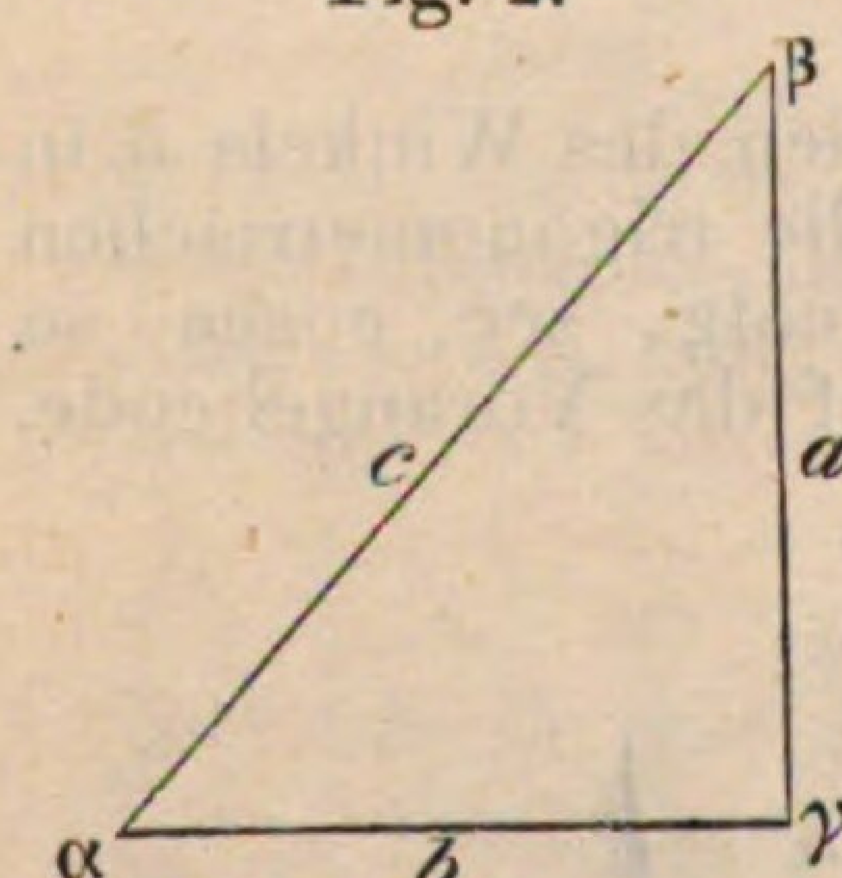
Diese Gleichungen zeigen deutlich, dass die trigonometrischen Functionen gleich sind den Zahlenwerthen der trigonometrischen Linien, wenn diese durch den Halbmesser $(r) = 1$ gesetzt, ausgemessen werden.

Zu den trigonometrischen Functionen kann man auch noch auf folgende Weise gelangen. Es sei $\Delta\alpha\beta\gamma$ (Fig. 2.) bei γ rechtwinklig, und $\angle\,\alpha = \angle\,BAC = \alpha$ im ΔABC (Fig. 1.), so ist $\Delta\alpha\beta\gamma \backsim \Delta ABC \backsim \Delta ADE \backsim \Delta\,AFG$. Diese Dreiecke liefern folgende sechs Gleichungen, wenn man zuvor die Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ mit a, b, c bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\text{Sin}\,\alpha}{r} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \\
\cos\alpha &= \frac{\text{Cos}\,\alpha}{r} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \\
\text{tang}\,\alpha &= \frac{\text{Tang}\,\alpha}{r} = \frac{ED}{AE} = \frac{a}{b} \\
\text{cotg}\,\alpha &= \frac{\text{Cotg}\,\alpha}{r} = \frac{GF}{AG} = \frac{b}{a} \\
\sec\alpha &= \frac{\text{Sec}\,\alpha}{r} = \frac{AD}{AE} = \frac{c}{b} \\
\text{cosec}\,\alpha &= \frac{\text{Cosec}\,\alpha}{r} = \frac{AF}{AG} = \frac{c}{a}
\end{aligned}\right\} \ldots. \text{(II.)}.$$

Diesen Gleichungen zufolge können die trigonometrischen Functionen eines spitzen Winkels auch unabhängig von der Construction der trigonometrischen Linien am Quadranten erhalten werden, denn sie sind die Quotienten der Seiten eines ebenen rechtwinkligen Dreiecks, wenn in demselben ein Winkel dem gegebenen spitzen Winkel gleich ist.

Fig. 2.

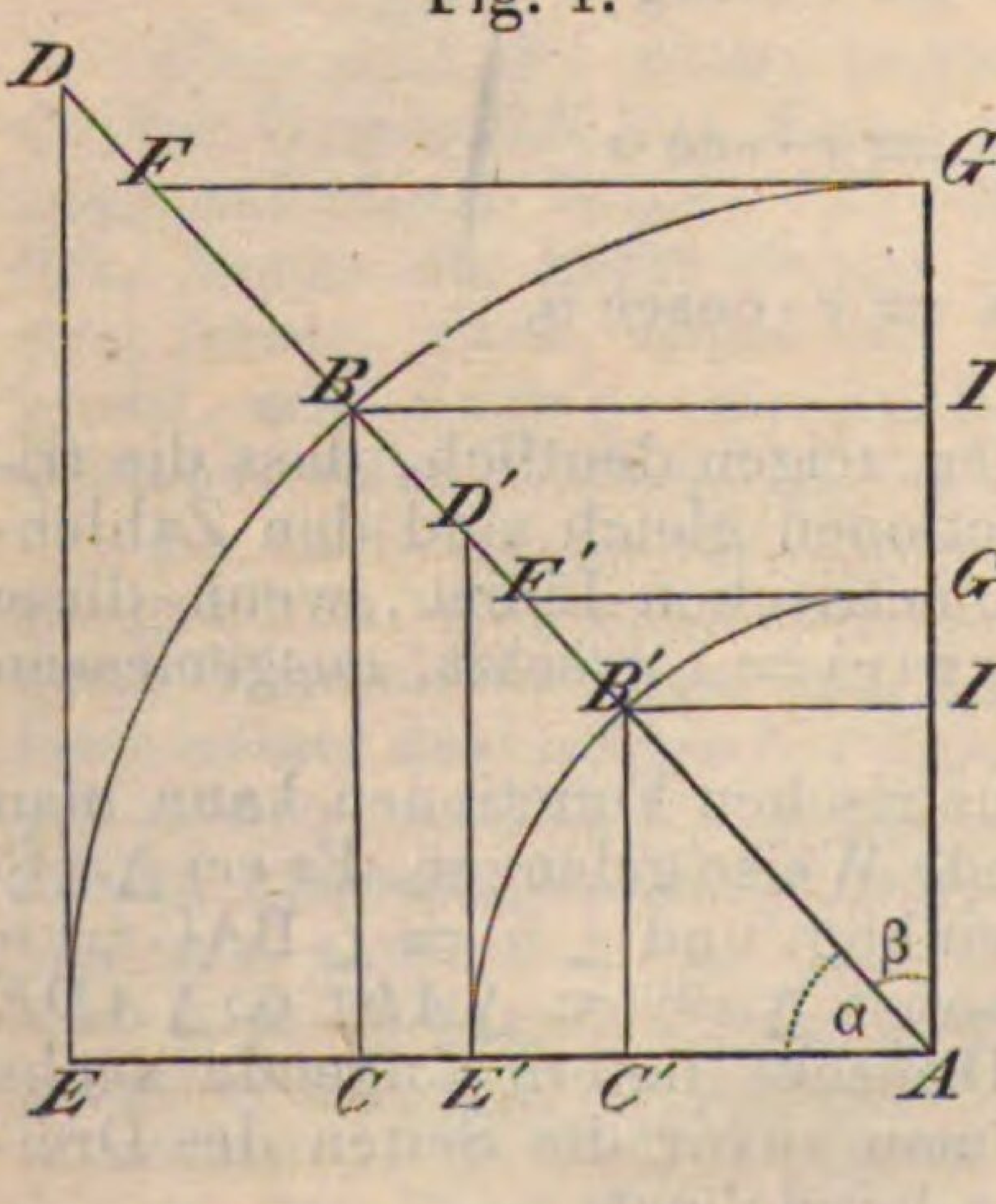


Da nun dem Vorhergehenden nach das $\Delta\ \alpha\beta\gamma$, (Fig. 2.), die Gleichungen liefert:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ldots \sin\alpha = \frac{a}{c} && 4)\ldots \text{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} \\
&2)\ldots \cos\alpha = \frac{b}{c} && 5)\ldots \sec\alpha = \frac{c}{b} \\
&3)\ldots \text{tang}\,\alpha = \frac{a}{b} && 6)\ldots \text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}
\end{aligned}\right\} \ldots. \text{(III.)};$$

so folgt aus diesen wieder, dass, wenn die sechs trigonometrischen Functionen aller Winkel im Quadranten, oder von 0° bis 90° gegeben wären, jedes ebene rechtwinklige Dreieck — vorausgesetzt, dass die zu seiner Bestimmung erforderlichen Stücke nicht fehlen — mittelst dieser berechnet werden kann. Die letzte Erklärung der trigonometrischen Functionen ist äusserst einfach, sie zeigt aber auch, dass nur sechs reine Winkelfunctionen möglich sind, weil die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nur sechs Quotienten der angedeuteten Art gestatten. Die erste Erklärung der Winkelfunctionen aus den trigonometrischen Linien ist die ältere und macht viele Sätze sehr anschaulich.

Fig. 1.



C. Ausser den sechs angeführten trigonometrischen Linien giebt es noch den Sinusversus und Cosinusversus eines Winkels. In Fig. 1. ist nämlich:

Setzt man in diesen 8 Gleichungen $r = 1$, so gelten sie für die trigonometrischen Functionen (§. 2. B.); diese können aber auch aus den Gleichungen (III.) (§. 2. B.) abgeleitet werden wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \quad \ldots (1)\\
1 + \operatorname{tang}^2\alpha &= 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2+a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \sec^2\alpha \quad \ldots (2)\\
1 + \operatorname{cotg}^2\alpha &= 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha \quad \ldots (3)\\
\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha \quad \ldots (4)\\
\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha \quad \ldots (5)\\
\frac{1}{\cos\alpha} &= 1 : \frac{b}{c} = \frac{c}{b} = \sec\alpha \quad \ldots (6)\\
\frac{1}{\sin\alpha} &= 1 : \frac{a}{c} = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha \quad \ldots (7)\\
\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} &= 1 : \frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha \quad \ldots (8)
\end{aligned}\right\} \text{(A.)}.$$

Sind die Sinusse aller Winkel von 0° bis 90° bekannt, so wird man nach den Gleichungen (A.) die übrigen trigonometrischen Functionen dieser Winkel berechnen können. Man macht übrigens leicht die Bemerkung, dass es nur nöthig ist, die trigonometrischen Functionen für jede Minute von 0° bis 45° zu berechnen, weil wegen der Complementbeziehungen in §. 2. D. die Functionen der Winkel von 45° bis 90° für jede Minute darin enthalten sind.

Für den Fall, dass man aus einer Winkelfunction alle übrigen bestimmen will, lassen sich aus den Gleichungen (A.) leicht folgende zu diesem Behuf ableiten.

I. Wenn $\sin\alpha$ gegeben, so ist:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha},\\
\operatorname{tang}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\\
\operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha},\\
\sec\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\\
\operatorname{cosec}\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha}.
\end{aligned}$$

II. Wenn $\cos\alpha$ gegeben, so hat man:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha},\\
\operatorname{tang}\alpha &= \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\\
\operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}},\\
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha},\\
\operatorname{cosec}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.
\end{aligned}$$

III. Ist $\tang\alpha$ gegeben, so hat man:

$$\sin\alpha = \frac{\tang\alpha}{\sqrt{1+\tang^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2\alpha}},$$

$$\cotg\alpha = \frac{1}{\tang\alpha},$$

$$\sec\alpha = \sqrt{1+\tang^2\alpha},$$

$$\cosec\alpha = \frac{\sqrt{1+\tang^2\alpha}}{\tang\alpha}.$$

IV. Wenn $\cotg\alpha$ gegeben ist, so wird:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cotg^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\cotg\alpha}{\sqrt{1+\cotg^2\alpha}},$$

$$\tang\alpha = \frac{1}{\cotg\alpha},$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\cotg^2\alpha}}{\cotg\alpha},$$

$$\cosec\alpha = \sqrt{1+\cotg^2\alpha}.$$

V. Ist $\sec\alpha$ gegeben, so wird:

$$\sin\alpha = \tang\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha},$$

$$\tang\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha-1},$$

$$\cotg\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}},$$

$$\cosec\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}.$$

VI. Ist endlich $\cosec\alpha$ gegeben, so wird:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\cosec\alpha},$$

$$\cos\alpha = \cotg\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{\cosec^2\alpha-1}}{\cosec\alpha},$$

$$\cotg\alpha = \sqrt{\cosec^2\alpha-1},$$

$$\tang\alpha = \frac{1}{\cotg\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\cosec^2\alpha-1}},$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\cosec\alpha}{\sqrt{\cosec^2\alpha-1}}.$$

§. 4.

Die Zahlenwerthe der trigonometrischen Linien; die trigonometrischen Functionen.

I. Wenn in Fig. 1. der Winkel $\alpha = 0$ wird, so werden die Schnittpunkte B, C, D in E fallen, folglich $BC = DE = 0$, und $AC = AD = AE = r$ sein; der Schnittpunkt F aber wird gar nicht stattfinden, oder

Functionen.	Quadrant.			
	I.	II.	III.	IV.
sinus	+	+	—	—
cosinus	+	—	—	+
tangente	+	—	+	—
cotangente	+	—	+	—
secante	+	—	—	+
cosecante	+	+	—	—
sinusversus . . .	+	+	+	+
cosinusversus . .	+	+	+	+

Die beiden letzten Functionen sinusversus und cosinusversus sind immer positiv, weil stets cos < 1 und sin < 1 ist, und daher $1 -$ cos und $1 -$ sin immer positiv sein muss. Aus Fig. 8. ergiebt sich leicht, dass für einen Winkel im II. Quadranten die trigonometrischen Linien oder Functionen gleich denen seines Supplementwinkels, für Winkel in dem III. Quadranten gleich denen der Ueberschüsse dieser Winkel über 180° und im IV. Quadranten gleich denen der Ergänzung dieser Winkel zu 360° sind.

Bisher wurden die Winkel durch Drehung des beweglichen Schenkels BC von A nach E, G, I etc. in Fig. 8. hervorgebracht; lässt man aber die Winkel durch Drehung des beweglichen Schenkels BC von A nach I, G etc. entstehen, so werden letztere negativ, wenn man erstere als positiv betrachtet. Diese negativen Winkel haben ihre trigonometrischen Linien so gut wie die positiven und müssen mit denen der letztern, wenn sie zusammengenommen $4\,R$ ausmachen, zusammenfallen, d. h. dieselben sein. Man wird daher die trigonometrischen Linien der negativen Winkel durch die der positiven spitzen Winkel bestimmen können.

Es ist also

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\,(-\alpha) &= \text{Sin}\,(4\,R - \alpha),\\
\text{Cos}\,(-\alpha) &= \text{Cos}\,(4\,R - \alpha),\\
\text{Tang}\,(-\alpha) &= \text{Tang}\,(4\,R - \alpha),\\
\text{Cotg}\,(-\alpha) &= \text{Cotg}\,(4\,R - \alpha),\\
\text{Sec}\,(-\alpha) &= \text{Sec}\,(4\,R - \alpha),\\
\text{Cosec}\,(-\alpha &= \text{Cosec}\,(4\,R - \alpha).
\end{aligned}$$

Die Vorzeichen der trigonometrischen Linien dieser negativen Winkel aber werden, wie sich leicht aus Fig. 8. ergiebt, gleich den Vorzeichen der positiven Winkel im IV., III., II. und I. Quadranten, je nachdem $\alpha < 90°$, $\alpha > 90°$ und $< 180°$, $\alpha > 180°$ und $< 270°$, oder endlich $\alpha > 270°$ und $< 360°$ ist. Man wird demnach zu jedem Winkel die entsprechenden trigonometrischen Functionen aus den trigonometrischen Tafeln bestimmen können; es lässt sich aber nicht aus dem Werthe einer jeden Winkelfunction allein der entsprechende Winkel angeben, weil — wenn auch nur Winkel zwischen $0\,R$ und $4\,R$ betrachtet werden — zu jedem Werthe einer Function zwei Winkel gehören. Jeder Winkel wird aber durch zwei Functionen bestimmt und zwar durch:

1. sinus und cosinus, sinus und tangente, sinus und cotangente, sinus und secante;
2. cosinus und tangente, cosinus und cotangente, cosinus und cosecante,

wie sich aus obiger Tabelle ergiebt.

Dieses ist jedoch so zu verstehen, dass der Werth einer Winkelfunction über die Grösse des ihr entsprechenden Winkels hinlänglich entscheidet, wenn ausser ihrem Vorzeichen noch das einer anderen Function desselben Winkels, wie eben angedeutet, bekannt ist.

Hat man nur mit Winkeln zwischen o R und 2 R zu thun, so werden diese durch die Functionen: cosinus, tangente, cotangente und secante vollständig bestimmt.

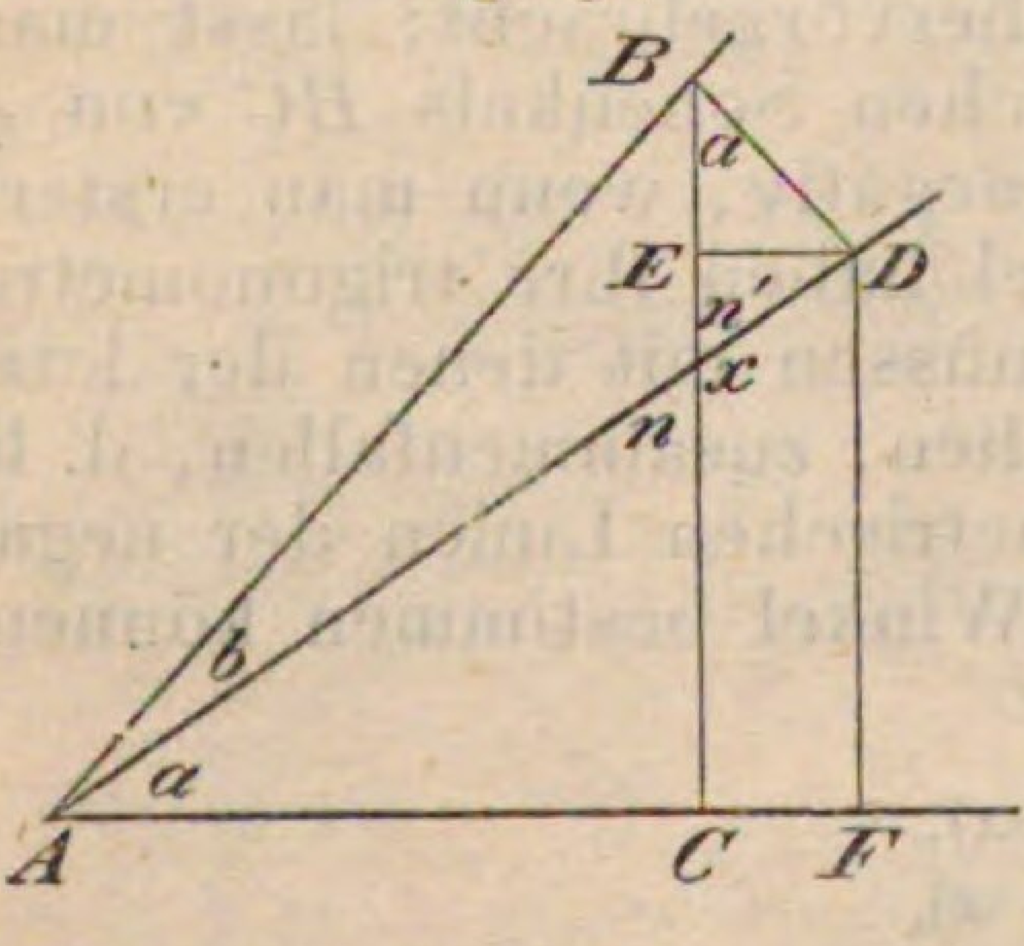
§. 6.

Formeln zur Bestimmung zusammengesetzter trigonometrischer Functionen aus einfachen.

Wenn der Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b gegeben ist, so hat man ganz allgemein:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \quad \text{(I.)}$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \quad \text{(II.)}$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \quad \text{(III.)}$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \quad \text{(IV.)}.$$

Fig. 5.



Die Richtigkeit dieser Formeln wird hier nur für den Fall dargethan, dass a und b spitze Winkel sind und $a + b < 90^{\circ}$ ist. Es sei daher in Fig. 5. $\angle FAD = a$, $\angle DAB = b$, also $\angle FAB = a + b$, ferner BD normal auf AD, BC und DF beide normal auf AF, und DE normal auf BC, so ist $\angle DBC = a$, weil die Dreiecke BDx und ACx bei D und C rechtwinklig sind, und $\angle n = \angle n'$ ist. Man hat nun:

$$\sin a = \frac{DF}{AD} = \frac{DE}{BD},$$
$$\cos a = \frac{AF}{AD} = \frac{BE}{BD},$$
$$\sin b = \frac{BD}{AB},$$
$$\cos b = \frac{AD}{AB},$$

woraus folgt

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{DF}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{AB},$$
$$\cos a \cdot \sin b = \frac{BE}{BD} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{AB},$$

und hieraus $\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = \frac{DF + BE}{AB}$.

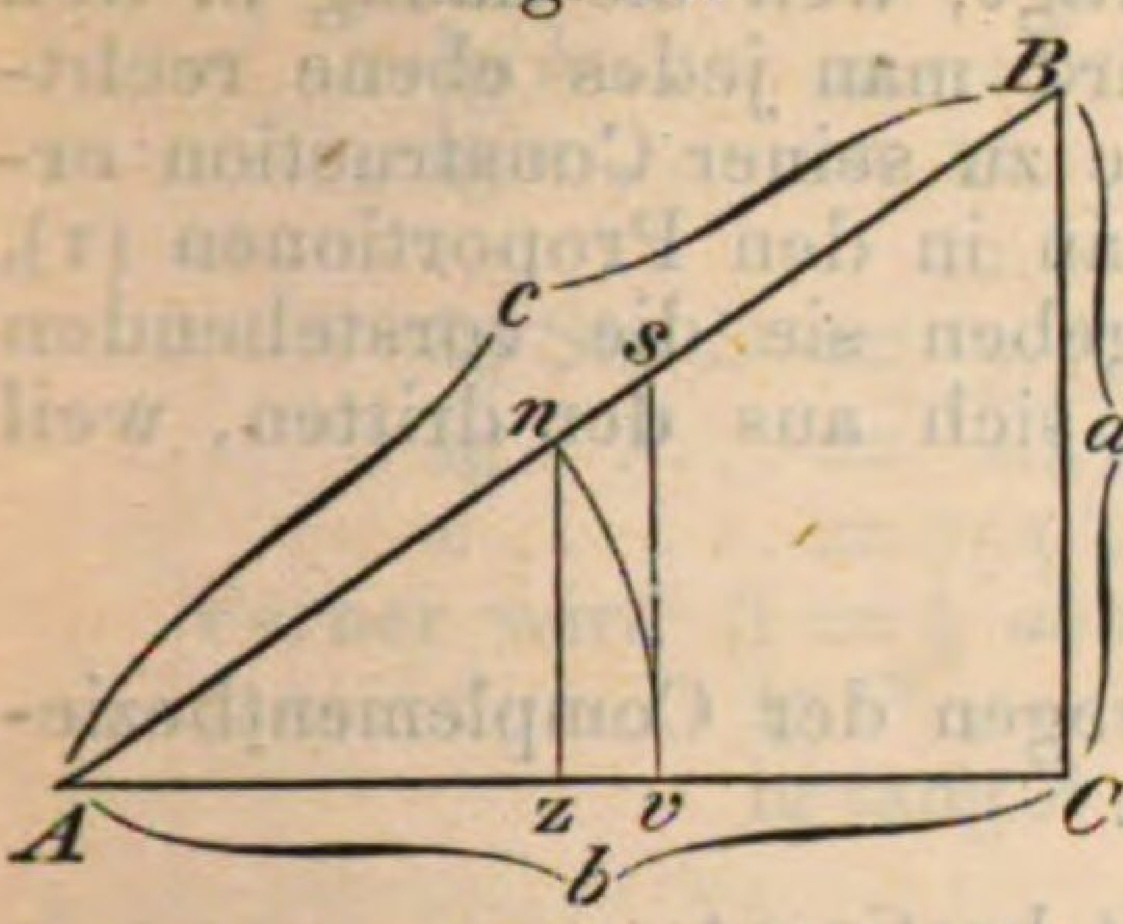
Da nun aber $DF = EC$ und $EC + EB = BC$, so ist

$$\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = \frac{EC + BE}{AB} = \frac{BC}{AB}:$$

§. 7.
Abgeleitete trigonometrische Formeln.

	Formeln.	No.
Bewiesen in §. 6.	$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$	1.
	$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	2.
	$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$	3.
	$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$	4.
Frml 1 + Frml 3 giebt . . .	$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cdot \cos b$	5.
Frml 1 — Frml 3 giebt . . .	$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \cdot \sin b$	6.
Frml 2 + Frml 4 giebt . . .	$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$	7.
Frml 2 — Frml 4 giebt . . .	$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \cdot \sin b$	8.
Frml 1 · Frml 3 giebt, weil $1 - \cos^2 a = \sin^2 a$ und $1 - \sin^2 a = \cos^2 a$. . .	$\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$	9.
Frml 2 · Frml 4 giebt, weil $1 - \cos^2 b = \sin^2 b$ und $1 - \sin^2 b = \cos^2 b$. . .	$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$	10.
Frml 1 : Frml 2 giebt, wenn Zähler und Nenner mit $\cos a \cdot \cos b$ dividirt werden . . .	$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$	11.
Frml 3 : Frml 4 giebt, wenn Zähler und Nenner mit $\cos a \cdot \cos b$ dividirt werden . . .	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$	12.
Frml 2 : Frml 1 giebt, wenn Zähler und Nenner mit $\cos a \cdot \cos b$, oder mit $\sin a \cdot \sin b$ dividirt werden . . .	$\operatorname{cotg}(a+b) = \dfrac{1 - \tan a \cdot \tan b}{\tan a + \tan b} = \dfrac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}$	13.
Frml 4 : Frml 3 giebt, wenn Zähler und Nenner mit $\cos a \cdot \cos b$, oder auch mit $\sin a \cdot \sin b$ dividirt werden . . .	$\operatorname{cotg}(a-b) = \dfrac{1 + \tan a \cdot \tan b}{\tan a - \tan b} = \dfrac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a}$	14.
Frml 1 : $\cos a \cdot \cos b$ giebt .	$\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b} = \tan a + \tan b$	15.
Frml 3 : $\cos a \cdot \cos b$ giebt .	$\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} = \tan a - \tan b$	16.
Frml 1 : $\sin a \cdot \sin b$ giebt . .	$\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b} = \operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b$	17.
Frml 3 : $\sin a \cdot \sin b$ giebt . .	$\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a \cdot \sin b} = \operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a$	18.
Frml 1 : Frml 3 giebt, wenn Zähler und Nenner mit $\sin a \cdot \sin b$, mit $\cos a \cdot \cos b$ oder $\sin a \cdot \cos b$ dividirt werden . . .	$\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a} = \dfrac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b} = \dfrac{1 + \operatorname{cotg} a \cdot \tan b}{1 - \operatorname{cotg} a \cdot \tan b}$	19.
Frml 1 : Frml 4 giebt, wenn Zähler und Nenner mit $\cos a \cdot \cos b$ dividirt werden . . .	$\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)} = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$	20.

Fig. 10.



A. In Fig. 10. sei ABC ein bei C ebenes rechtwinkliges Dreieck, die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten bezeichne man respective mit a, b, c und den Flächeninhalt dieses Dreiecks mit $\mathfrak{J}$. Beschreibt man nun aus einer Winkelspitze an der Hypotenuse, z. B. aus A mit dem Halbmesser der trigonometrischen Tafeln den Bogen vn und zieht dann zn und vs beide normal auf AC, so hat man die beiden Dreiecke Anz und Asv der trigonometrischen Tafeln (§. 1.), die dem gegebenen $\triangle\, ABC$ ähnlich sind, in welchen $nz = \text{Sin}\, A$, $Az = \text{Cos}\, A = \text{Sin}\, B$, $As = \text{Sec}\, A$, $sv = \text{Tang}\, A$ und $Av = An = r$ ist.

Diese Dreiecke geben die Proportionen:

$An : zn = AB : CB$, d. i. $r : \text{Sin}\, A = c : a$ (1),
$An : Az = AB : AC$ » $r : \text{Cos}\, A = c : b$ (2),
$As : Av = AB : AC$ » $\text{Sec}\, A : r = c : b$ (3),
$Az : nz = AC : BC$ » $\text{Cos}\, A : \text{Sin}\, A = b : a$ (4),
$Av : vs = AC : BC$ » $r : \text{Tang}\, A = b : a$ (5),

Da $r = \text{Sin}\, 90^\circ$, hier gleich Sin C, ferner $\text{Cos}\, A = \text{Sin}\, B$ und $\text{Sec}\, A : r = r : \text{Cos}\, A = \text{Sin}\, C : \text{Sin}\, B$, so enthalten die Proportionen (1), (2), (3), (4) den Satz:

I. in jedem ebenen rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die Sinusse der Winkel zu einander, wie die ihnen gegenüberliegenden Seiten.

Die Proportion (5) enthält den Satz:

II. in jedem ebenen rechtwinkligen Dreieck verhält sich der Halbmesser oder Sinus 90° zur Tangente eines an der Hypotenuse liegenden Winkels, wie die an diesem Winkel liegende Kathete zu der ihm gegenüberliegenden.

Der Satz I. wird die Sinusregel und der Satz II. die Tangentregel genannt. Diese beiden Sätze oder Regeln sind zur Auflösung eines jeden ebenen rechtwinkligen Dreiecks, wenn in demselben die zu seiner Bestimmung erforderlichen Stücke nicht fehlen, hinreichend.

Wenn in dem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten gegeben sind, so wird die dritte nach dem pythagoräischen Satze gefunden werden können. Sind nämlich die beiden Katheten a und b gegeben, so ist die

Hypotenuse $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (6);

ist aber die Hypotenuse und eine Kathete gegeben, so hat man

$$\left.\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)\cdot(c-a)} \\ \text{oder } a &= \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)\cdot(c-b)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7).$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC (Fig. 10.), wenn die beiden Katheten a und b gegeben oder gefunden sind, ist gleich $\frac{1}{2}\, a \cdot b$.

B. Nach der Erklärung der trigonometrischen Functionen in §. 2. liefert das Dreieck ABC, Fig. 10., folgende Gleichungen:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\cos A = \frac{b}{c}, \qquad \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\text{tang}\, A = \frac{a}{b}, \qquad \text{tang}\, B = \frac{b}{a},$$

$$\text{cotg}\, A = \frac{b}{a}, \qquad \text{cotg}\, B = \frac{a}{b}.$$

$\text{Sin } B : r = b : c$	und $r : \text{Tang } A = b : a$.
$\lg b \ldots\ldots = 2{,}671571$	$\lg b \ldots\ldots = 2{,}671571$
$\lg r \ldots\ldots = 10,$	$\lg \text{Tang } A = 10{,}098431$
$12{,}671571$	$12{,}770002$
$\lg \text{Sin } B = 9{,}794739$	$\lg r \ldots\ldots = 10,$
$\lg c \ldots\ldots = 2{,}876832$	$\lg a \ldots\ldots = 2{,}770002$
$c \ldots\ldots = 753{,}'06.$	$a \ldots\ldots = 588{,}'85.$

Ferner wird $\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\, ab = \frac{1}{2} b^2 \cdot \text{tang } A$.

$\lg b^2 \ldots = 5{,}343142$
$\lg \text{tang } A = 0{,}098431$
$5{,}441573$
$\lg 2 \ldots\ldots = 0{,}301030$
$\lg \mathfrak{F} \ldots\ldots = 5{,}140543$
$\mathfrak{F} \ldots\ldots = 138211{,}15 \square'.$

Beispiel 3. In dem bei C rechtwinkligen ebenen Dreieck ABC ist $b = 63{,}4'$ und $c = 85{,}72'$.

Zur Berechnung von B hat man die Proportion:

$$c : b = r : \text{Sin } B.$$

$\lg b \ldots\ldots = 1{,}802089$
$\lg r \ldots\ldots = 10,$
$11{,}802089$
$\lg c \ldots\ldots = 1{,}933082$
$\lg \text{Sin } B = 9{,}869007$
$B \ldots\ldots = 47^\circ 41' 56''$
folglich $A = 42^\circ 18' 4''$.

a kann gefunden werden nach:

$$r : \text{Sin } A = c : a, \text{ oder auch } a = \sqrt{(c + b).\,(c - b)}.$$

$\lg c \ldots = 1{,}933082$	$c \ldots\ldots = 85{,}72$
$\lg \sin A = 9{,}828032$	$b \ldots\ldots = 63{,}4$
$11{,}761114$	$c + b = 149{,}12 \quad \lg = 2{,}173536$
$\lg r \ldots = 10,$	$c - b = 22{,}32 \quad \lg = 1{,}348694$
$\lg a \ldots = 1{,}761114$	$3{,}522230$
$a \ldots\ldots = 57{,}692'.$	$\lg a = 1{,}761115$
	$a \ldots = 57{,}692'.$

Zur Bestimmung von $\mathfrak{F}$ hat man:

$$\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2} ab = \tfrac{1}{2} b \sqrt{(c + b)\,(c - b)}.$$

$\lg b = 1{,}802089$
$\lg a = 1{,}761115$
$3{,}563204$
$\lg 2 = 0{,}301030$
$\lg \mathfrak{F} = 3{,}262174$
$\mathfrak{F} \ldots = 1828{,}84 \square'.$

Beispiel 4. In dem bei C rechtwinkligen ebenen Dreieck ABC ist $a = 8372{,}1$ und $b = 694{,}73$; wie gross sind die übrigen Stücke?

Zur Bestimmung von A dient die Proportion:

$$b : a = r : \text{Tang } A.$$

$\lg a \ldots\ldots = 3{,}922834$
$\lg r \ldots\ldots = 10,$
$13{,}922834$
$\lg b \ldots\ldots = 2{,}841816$
$\lg \text{Tang } A = 11{,}081018$
$A \ldots\ldots = 85^\circ\, 15'\, 23''$
also $B \ldots = 4^\circ\, 44'\, 37''.$

nur ein Dreieck construiren kann, wenn $a > c$, aber zwei, wenn $a < c$ ist. Im letzten Falle müsste daher in der Aufgabe noch bemerkt sein, ob $C >< 90°$ werden soll, denn der sinus entscheidet darüber nicht.

II. Ist a, B und C oder a, A und C gegeben, so suche man zuerst den dritten Winkel und demnächst nach der Sinusregel die beiden Seiten b und c.

Jetzt sind noch Formeln zu ermitteln für die beiden Fälle, wenn nämlich im ebenen schiefwinkligen Dreieck zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel oder alle drei Seiten gegeben sind. Diese Formeln beruhen, wie gleich gezeigt werden soll, auf der Sinusregel.

Das Dreieck ABC, Fig. 11., liefert die Gleichungen

$$c \cdot \sin A = a \cdot \sin C$$
$$\text{und } b \cdot \sin A = a \cdot \sin B,$$

welche durch Addition und Subtraction geben:

$$(b + c) \sin A = a (\sin B + \sin C)$$
$$\text{und } (b - c) \sin A = a (\sin B - \sin C).$$

Es ist aber $\sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A$ nach (§. 7. No. 69),
$\sin B + \sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2}(B - C)$ nach (§. 7. No. 23),
$\sin B - \sin C = 2 \cos \tfrac{1}{2}(B + C) \sin \tfrac{1}{2}(B - C)$ nach (§. 7. No. 24),
und wenn man diese Werthe in die beiden letzten Gleichungen setzt, sie demnächst durch 2 dividirt, erhält man:

$$(b + c) \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A = a \cdot \sin \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2}(B - C),$$
$$(b - c) \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A = a \cdot \cos \tfrac{1}{2}(B + C) \sin \tfrac{1}{2}(B - C),$$
$$\text{oder weil } \cos \tfrac{1}{2} A = \sin \tfrac{1}{2}(B + C)$$
$$\text{und } \sin \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2}(B + C),$$
$$\text{so auch } (b + c) \sin \tfrac{1}{2} A = a \cdot \cos \tfrac{1}{2}(B - C) \ \ldots\ldots\ldots \ (4),$$
$$(b - c) \cos \tfrac{1}{2} A = a \cdot \sin \tfrac{1}{2}(B - C) \ \ldots\ldots\ldots \ (5).$$

Dieses sind die Gleichungen von Mollweide, die sich in dem ebenen Dreieck dreifach ansetzen lassen. Dividirt man Gleichung (5) durch (4), so wird

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (6),$$
$$\text{oder } \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B + C) \ \ldots\ldots\ldots \ (7),$$
$$\text{weil } \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B + C).$$

Die Gleichungen (6) und (7) enthalten den Satz: im ebenen Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die Cotangente des halben eingeschlossenen Winkels, oder die Tangente der halben Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel, zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel.

III. Ist also im Dreieck ABC gegeben b, c und A, so ist auch $\tfrac{1}{2}(B + C)$ bekannt, und nun berechne man nach (6) oder (7) $\tfrac{1}{2}(B - C)$, dann ist

$$B = \tfrac{1}{2}(B + C) + \tfrac{1}{2}(B - C)$$
$$\text{und } C = \tfrac{1}{2}(B + C) - \tfrac{1}{2}(B - C).$$

Demnächst kann a nach der Sinusregel gefunden werden. Wenn man die Gleichungen (4) und (5) quadrirt und die Quadrate summirt, so wird, da $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ist,

$$(b + c)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A + (b - c)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = a^2,$$

oder

$$a^2 = b^2 \{\sin^2 \tfrac{1}{2} A + \cos^2 \tfrac{1}{2} A\} + c^2 \{\sin^2 \tfrac{1}{2} A + \cos^2 \tfrac{1}{2} A\} - 2bc \{\cos^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} A\},$$
$$\text{d. i. } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \{1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A\} \ \ldots\ldots\ldots \ (8),$$
$$\text{oder } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (9),$$

welche Gleichung eine Erweiterung des pythagoräischen Satzes ist.

Die Gleichung (8) giebt auch

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc + 4\,bc \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} A},$$
$$= \sqrt{(b-c)^2 + 4\,bc \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} A},$$
$$= (b-c) \sqrt{1 + \frac{4\,bc \cdot \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2}} \;\ldots\ldots\ldots (10).$$

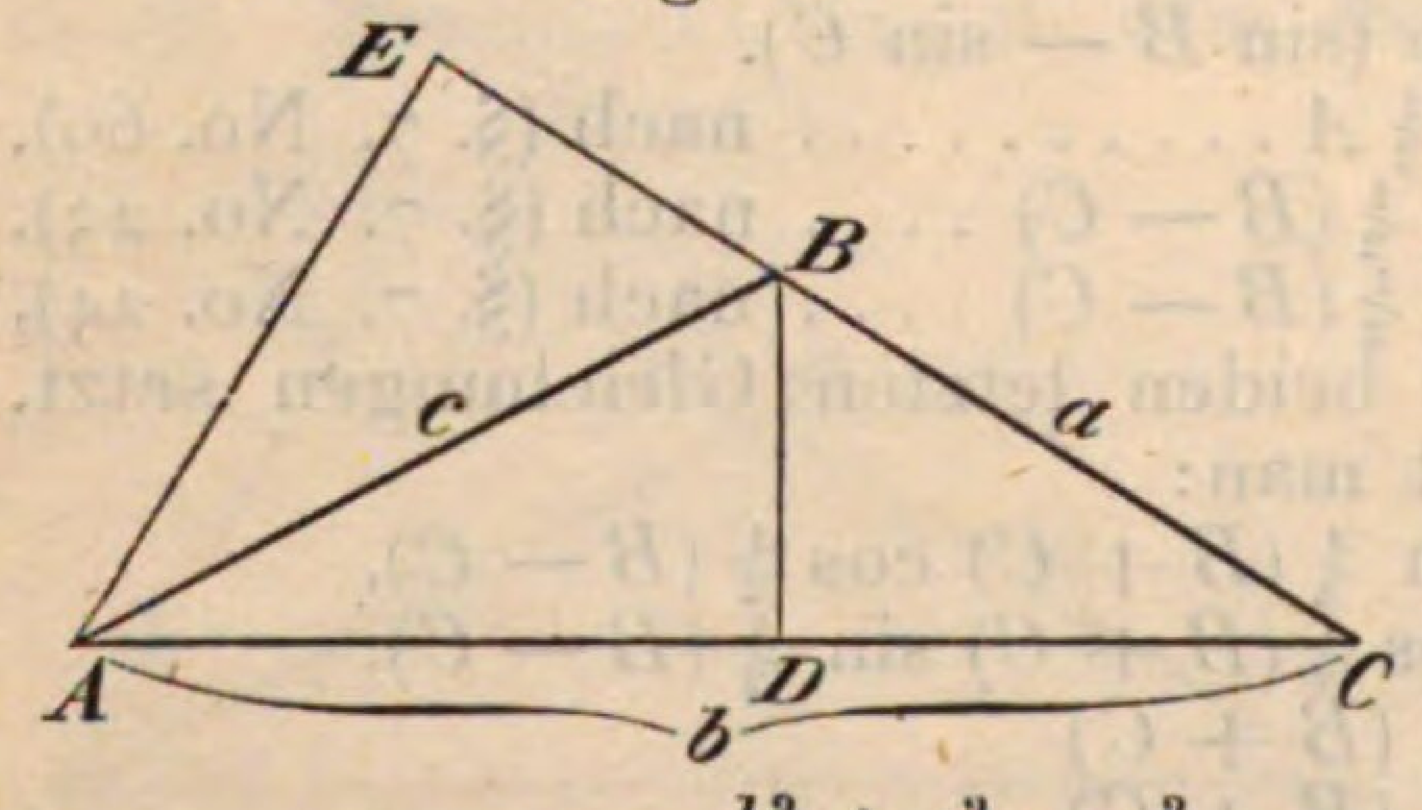
Setzt man $\dfrac{4\,bc \cdot \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2} = \operatorname{tang}^2 x$ (*), so wird

$$\operatorname{tang} x = \frac{2 \sin \frac{1}{2} A}{b-c} \sqrt{bc} \;\ldots\ldots\ldots (11)$$

und $a = (b-c) \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 x} = (b-c) \sec x = \dfrac{b-c}{\cos x} \;\ldots\ldots (12).$

Nach Gleichung (10) oder nach (11) und (12) kann man aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die dritte Seite eines ebenen Dreiecks direct finden. Zu diesem Behuf werden die beiden letzteren, ihrer logarithmischen Gestalt wegen, der ersteren vorzuziehen sein.

Fig. 11.



VI. Wenn im ebenen Dreieck ABC, Fig. 11., die drei Seiten a, b, c gegeben sind, so ergiebt sich aus Gleichung (9)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \;\ldots\ldots\ldots (13),$$

welche Gleichung sich, wie man sieht, in jedem Dreieck dreifach ansetzen lässt.

Für den Gebrauch der Logarithmen ist dieselbe nicht bequem, sie kann aber leicht logarithmisch gemacht werden. Subtrahirt man sie nämlich von $1 = 1$, so hat man

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc},$$
$$= \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc},$$
$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,bc},$$
$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2\,bc}.$$

Da aber $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$, (§. 7. No. 70), so ist auch

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}}{bc}.$$

Ferner ist $\dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} - c = S - c$

und $\dfrac{a-b+c}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} - b = S - b,$

(*) Bemerkung. Die Tangente durchläuft alle Werthe von 0 bis ∞, folglich muss es einen Winkel geben, dessen Tangente gleich ist $\dfrac{2 \sin \frac{1}{2} A}{b-c} \sqrt{bc}$, welcher Winkel hier x benannt wird.

Beispiel 2. In dem ebenen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben $c = 6{,}216$, $a = 7{,}853$, $A = 77^\circ\ 34'\ 40''$.

Da $a > c$, so ist dieses Dreieck bestimmt. Zur Bestimmung von C hat man die Proportion:

$$a : c = \sin A : \sin C.$$

$$\begin{array}{ll}
\lg c \ldots = & 0{,}793511 \\
\lg \sin A = & \underline{9{,}989712} \\
 & 10{,}783223 \\
\lg a \ldots = & \underline{0\ 895036} \\
\lg \sin C = & 9{,}888187 \\
C \ldots\ldots = & 50^\circ\ 37'\ 31'' \\
A \ldots\ldots = & \underline{77^\circ\ 34'\ 40''} \\
A + C\,. = & 128^\circ\ 12'\ 11'' \\
B \ldots\ldots = & 51^\circ\ 47'\ 49''.
\end{array}$$

Zur Bestimmung von b hat man:

$$\sin A : \sin B = a : b.$$

$$\begin{array}{ll}
\lg a \ldots = & 0{,}895036 \\
\lg \sin B = & \underline{9.895325} \\
 & 10{,}790361 \\
\lg \sin A = & \underline{9.989712} \\
\lg b \ldots = & 0.800649 \\
b \ldots\ldots = & 6{,}319.
\end{array}$$

Beispiel 3. In dem ebenen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben $b = 627$, $c = 430$, $C = 42^\circ\ 53'\ 38''$.

Da $c < b$, so ist das Dreieck unbestimmt, d. h. mit den gegebenen Stücken lassen sich zwei verschiedene Dreiecke construiren, in welchen der Winkel B in dem einen spitz und in dem andern stumpf ist, beide aber zusammen $= 180^\circ$ sind.

B wird gefunden nach der Proportion:

$$c : b = \sin C : \sin B.$$

$$\begin{array}{llll}
\lg b \ldots\ldots = & 2{,}797268 & & \\
\lg \sin C\,.\,. = & \underline{9{,}832919} & & \\
 & 12.630187 & & \\
\lg c \ldots\ldots = & \underline{2.633468} & & \\
\lg \sin B\,.\,. = & 9{,}996719 & & \\
B \ldots\ldots = & 82^\circ\ 57'\ 56'' & \text{in dem andern Dreieck } B \ldots = & 97^\circ\ 2'\ 4''. \\
\text{Es ist } C\,.\,. = & \underline{42^\circ\ 53'\ 38''} & C \ldots = & \underline{42^\circ\ 53'\ 38''}, \\
\text{also } B + C = & 125^\circ\ 51'\ 34'' & B + C\,. = & 139^\circ\ 55'\ 42'', \\
\text{folglich } A = & 54^\circ\ 8'\ 26'' & \text{und in dem andern Dreieck} = & 40^\circ\ 4'\ 18''.
\end{array}$$

a wird gefunden nach der Proportion $\sin C : \sin A = c : a$, und zwar ist die Rechnung für:

$$\begin{array}{ll|ll}
\multicolumn{2}{c|}{B < 90^\circ} & \multicolumn{2}{c}{B > 90^\circ} \\
\lg c \ldots = & 2{,}633468 & \lg c \ldots = & 2{,}633468 \\
\lg \sin A = & \underline{9{,}908729} & \lg \sin A = & \underline{9.808714} \\
 & 12{,}542197 & & 12{,}442182 \\
\lg \sin C = & \underline{9{,}832919} & \lg \sin C = & \underline{9{,}832919} \\
\lg a \ldots = & 2{,}709278 & \lg a \ldots = & 2.609263 \\
a \ldots\ldots = & 512{,}01. & a \ldots\ldots = & 406{,}69.
\end{array}$$

Beispiel 4. In dem ebenen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben $b = 484{,}2$, $c = 968{,}4$, $A = 75^\circ\ 31'\ 20''$.

Es ist $\frac{C+B}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}A = 52^\circ\ 14'\ 20''$.

$\frac{C-B}{2}$ kann nun nach der Proportion

$$c+b : c-b = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C+B) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C-B),$$

deren Richtigkeit sich aus der Gleichung (7.) §. 11. ergiebt, berechnet werden.

$$\begin{aligned}
c - b = 484{,}2 \quad \lg &= 2{,}685025 \\
\lg \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C+B) &= 10{,}110926 \\
&\ 12{,}795951 \\
c + b = 1452{,}6 \quad \lg &= 3{,}162146 \\
\lg \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C-B) &= 9{,}633805 \\
\tfrac{1}{2}(C-B) &= 23^\circ\ 17'\ 2'' \\
\text{da} \quad \tfrac{1}{2}(C+B) &= 52^\circ\ 14'\ 20'' \\
\text{so ist } C \ldots\ldots &= 75^\circ\ 31'\ 22'' \\
\text{und } B \ldots\ldots\ldots &= 28^\circ\ 57'\ 18''.
\end{aligned}$$

a ergiebt sich nach der Proportion $\sin B : \sin A = b : a$.

$$\begin{aligned}
\lg b \ldots &= 2{,}685025 \\
\lg \sin A &= 9{,}985985 \\
&\ 12{,}671010 \\
\lg \sin B &= 9{,}684955 \\
\lg a \ldots &= 2{,}986055 \\
a \ldots\ldots &= 968{,}4;
\end{aligned}$$

a kann aber auch unmittelbar aus b, c und A gefunden werden, wenn man die Gleichungen (11) und (12) in §. 11. benutzt. Diese sind für diesen Fall

$$\text{tang}\, x \ldots = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A}{c-b}\sqrt{cb}$$

$$\text{und } a \ldots = \frac{c-b}{\cos x}.$$

$$\begin{aligned}
\lg c \ldots\ldots &= 2{,}986055 \\
\lg b \ldots\ldots &= 2{,}685025 \\
&\ 5{,}671080 \\
\lg \sqrt{cb} \ldots &= 2{,}835540 \\
\lg 2 \ldots\ldots &= 0{,}301030 \\
\lg \sin \tfrac{1}{2}A &= 9{,}787015 - 10 \\
&\ 12{,}923585 - 10 \\
\lg (c-b) &= 2{,}685025 \ldots\ldots\ldots\ 2{,}685025 \\
\lg \text{tang}\, x &= 10{,}238560 - 10 \\
x \ldots\ldots &= 60^\circ\ 0'\ 0'' \quad \lg \cos x = 9{,}698970 - 10 \\
& \lg a \ldots = 2{,}986055 \\
& a \ldots\ldots = 968{,}4.
\end{aligned}$$

Beispiele zur Uebung.

In den folgenden Dreiecken, worin wieder die Winkel mit *A*, *B*, *C* und die Seiten mit *a*, *b*, *c* bezeichnet sind, ist

	gegeben:			gefunden:		
1)	b = 7208	A = 70° 5′ 22″	B = 59° 35′ 36″	c = 6432	a = 7858	C = 50° 19′ 2″
2)	b = 4627	a = 5169	A = 70° 25′ 12″	c = 4328	B = 57° 29′ 55″	C = 52° 4′ 53″
3)	c = 718	a = 629	A = 29° 52′ 34″	C = 34° 39′ 12″ / 145° 20′ 48″	B = 115° 28′ 14″ / 4° 46′ 38″	b = 1140 / 105,16
4)	c = 1234,5	a = 620,8	B = 138° 39′ 8″	A = 13° 33′ 32″	C = 27° 47′ 20″	b = 1749,3
5)	c = 896,2	a = 328,4	C = 113° 45′ 20″	b = 712	A = 19° 35′ 46″	B = 46° 38′ 54″
6)	c = 793,8	a = 481,6	b = 500	A = 35° 15′ 32″	B = 36° 49′ 18″	C = 107° 55′ 10″
7)	c = 92,6	a = 46,3	b = 71,2	C = 101° 55′ 6″	B = 48° 47′ 30″	A = 29° 17′ 22″
8)	c = 728,1	a = 614,7	b = 583,8	A = 54° 32′ 51″	B = 50° 40′ 58″	C = 74° 46′ 10″
9)	c = 3634	a = 1484	B = 102° 18′ 27″	A = 20° 9′ 19″	C = 57° 32′ 15″	b = 4208
10)	c = 2163	a = 1672	C = 112° 18′ 32″	b = 877,2	B = 22° 2′ 11″	A = 45° 39′ 17″
11)	c = 632	a = 494	A = 20° 16′ 0″	C = 26° 18′ 19″ / 153° 41′ 41″	B = 133° 25′ 41″ / 6° 2′ 19″	b = 1035,7 / 150,03
12)	c = 428	C = 49° 16′ 0″	A = 38° 44′ 48″	B = 91° 59′ 12″	b = 564,49	a = 353,5
13)	b = 126	B = 29° 46′ 0″	A = 55° 51′ 32″	C = 94° 22′ 28″	c = 253,05	a = 210,05
14)	c = 821,9	b = 640,3	A = 80° 24′ 0″	B = 41° 26′ 21″	C = 58° 9′ 39″	a = 953,93
15)	b = 29674	a = 31283	C = 121° 5′ 38″	A = 30° 18′ 25″	B = 28° 35′ 57″	c = 53084,25
16)	c = 982762	b = 787654	a = 572829	A = 35° 38′ 42″	B = 53° 15′ 26″	C = 91° 5′ 52″
17)	c = 8297,6	b = 7825,3	a = 8729,5	A = 65° 29′ 12″	B = 54° 38′ 54″	C = 59° 51′ 56″
18)	c = 68472	b = 79783	A = 56° 12′ 15″	B = 70° 1′ 44,″5	C = 53° 46′ 0,″5	a = 70543,83
19)	A = 51° 40′ 0″	B = 61° 30′ 0″	c = 560	a = 477,8	b = 535,3	C = 66° 50′ 0″
20)	A = 119° 15′ 19″	B = 30° 11′ 47″	c = 1471,8	C = 30° 32′ 54″	b = 1456,45	a = 2526,39
21)	B = 144° 0′ 5″	C = 20° 41′ 19″	a = 199,5	b = 444,1	c = 266,9	A = 15° 18′ 36″
22)	B = 70° 10′ 0″	C = 10° 9′ 11″	c = 174,51	b = 931,25	a = 975,8	A = 99° 40′ 49″
23)	A = 44° 4′ 0″	C = 44° 4′ 0″	b = 180	c = 125,256	a = 125,256	B = 91° 52′ 0″
24)	C = 33° 40′ 0″	B = 51° 50′ 0″	a = 703,9.	b = 555,1	c = 391,4	A = 94° 30′ 0″.

Nach dem pythagoräischen Satze liefert das Dreieck CBD

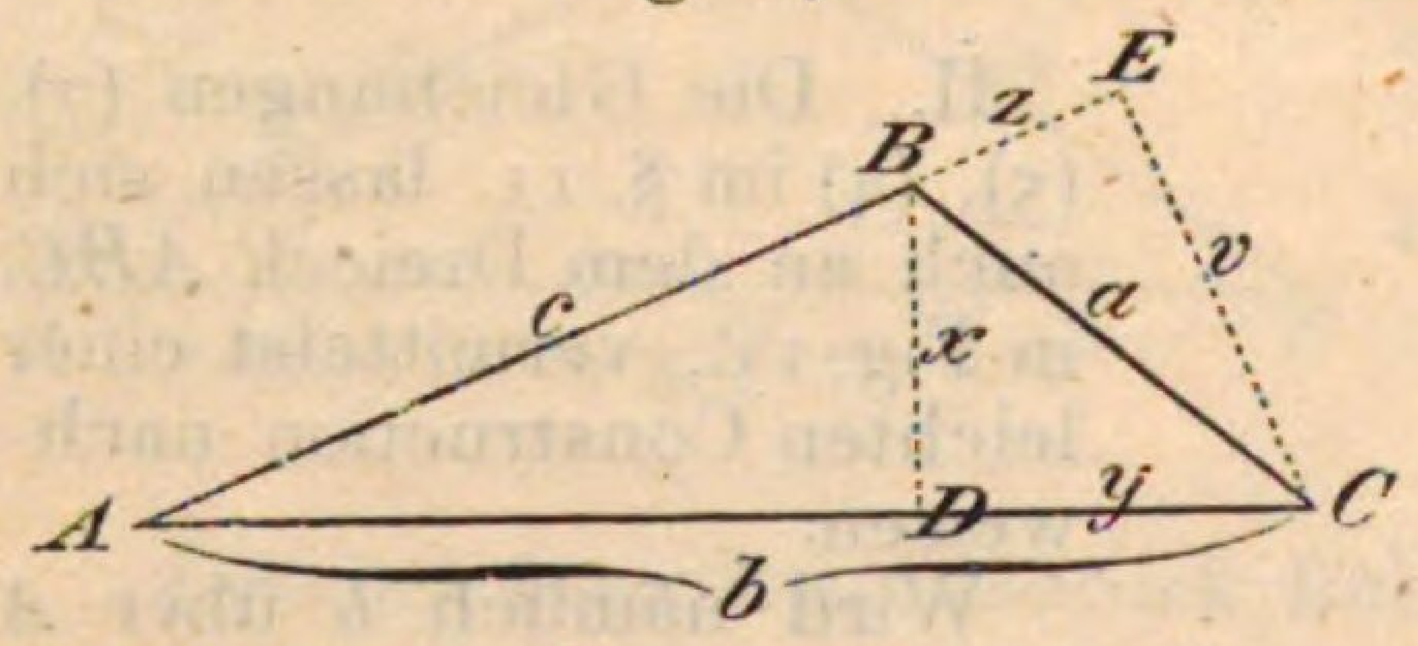
$$a^2 = x^2 + y^2,$$

also auch $a^2 = c^2 \sin^2 A + (b - c \cdot \cos A)^2,$

$$= c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2\,bc \cdot \cos A,$$

$$= c^2 + b^2 - 2\,bc \cdot \cos A.$$

Fig. 14.



Wenn $A > 90^\circ$ ist, so muss das Glied $-2\,bc \cdot \cos A$ additiv werden, weil der Cosinus eines stumpfen Winkels negativ ist. In Fig. 14. ist $B > 90^\circ$, deshalb muss auch in Bezug auf diesen Winkel erhalten werden

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot \cos B.$$

Um dieses zu beweisen, fälle man von C auf die Verlängerung von c die Normale CE, bezeichne diese mit v und BE mit z.

Es ist $\sin EBC = \sin B$ und $\cos EBC = -\cos B$,

folglich $v = a \sin B$ und $z = -a \cos B$.

Nach dem pythagoräischen Satze liefert das Dreieck ACE

$$b^2 = v^2 + (c + z)^2,$$

folglich $b^2 = a^2 \sin^2 B + (c - a \cdot \cos B)^2,$

$$= a^2 \sin^2 B + c^2 + a^2 \cos^2 B - 2\,ac \cdot \cos B,$$

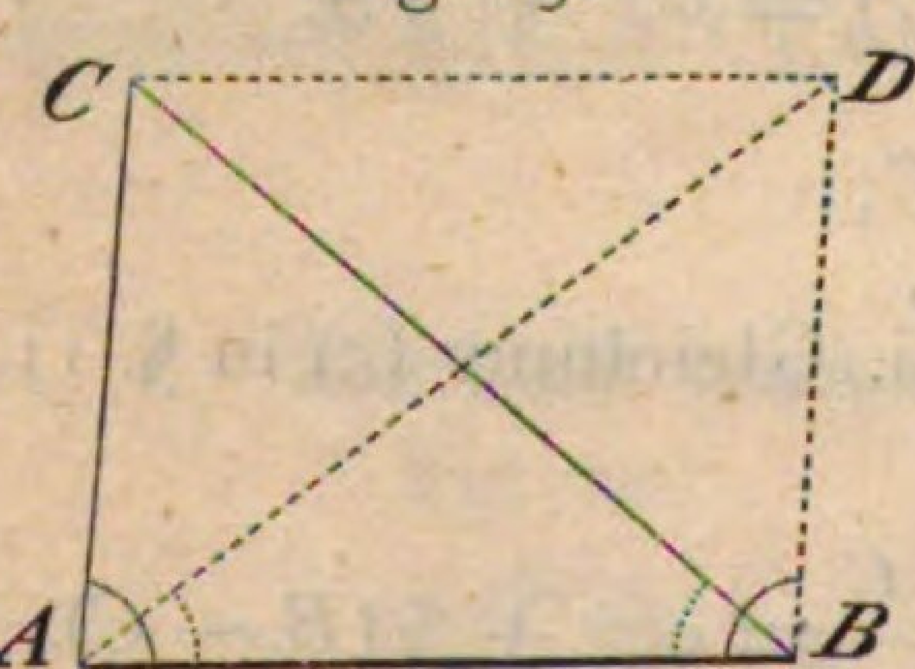
$$= a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot \cos B.$$

§. 15.

Anwendung der ebenen Trigonometrie bei Vermessungen von Theilen der Erdoberfläche.

Eine ausführliche Auseinandersetzung der Anwendungen, welche von der ebenen Trigonometrie bei Aufnahmen von Erdoberflächentheilen gemacht werden können, wird hier nicht gegeben, sondern es werden nur einige Aufgaben durchgenommen, die zu diesem Behuf unentbehrlich sind.

Fig. 15.



1. Aufgabe. Die Entfernung zwischen zwei Punkten B und C, Fig. 15., zu bestimmen, welche nicht direct gemessen werden kann.

Lösung. Von dem Punkte B aus messe man die Basis (Grundlinie) AB, jedoch so, dass der Winkel ABC weder zu spitz noch zu stumpf wird; demnächst messe man mit einem Winkelmess-Instrumente von B und A aus die Winkel ABC und BAC, so sind in dem ebenen Dreieck ABC die drei Winkel und die Seite AB gegeben, wodurch nach der Proportion

$$\sin C : \sin A = AB : BC$$

die Seite BC berechnet werden kann.

2. Aufgabe. Die Entfernung zwischen zwei nicht zugänglichen Punkten C und D (Fig. 15.) zu bestimmen.

Lösung. In der Ebene der beiden Punkte C und D messe man die Basis AB, jedoch so, dass sie mit CD eine möglichst parallele Lage hat. Dann messe man von B aus die Winkel ABC und CBD, und von A aus die Winkel BAD und DAC. Dadurch können in den Dreiecken ABD und ABC die Seiten BD und AD, BC und AC nach der Sinusregel berechnet werden. Nachdem diese gefunden, sind in den Dreiecken CBD und CAD zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt, wodurch die dritte, diesen beiden Dreiecken gemeinschaftliche, Seite CD gefunden werden kann nach den Gleichungen:

Ferner ist $A + \alpha = 92^\circ\ 53'\ 55''$, $C + \beta = 152^\circ\ 6'\ 5''$ und die logarithmische Rechnung nach (3)

lg a =	3,301030	lg b =	3,046105
lg sin $(A + \alpha)$ =	9,999440 — 10	lg sin $(C + \beta)$ =	9,670161 — 10
	13,300474 — 10		12,716266 — 10
lg sin α =	9,849485 — 10	lg sin β =	9,625948 — 10
lg DA =	3,450989	lg DC =	3,090318
DA =	2824,'8	DC =	1231,'17
lg a =	3,301030	lg b =	3,046105
lg sin A =	9,870380 — 10	lg sin C =	9,901768 — 10
	13,171410 — 10		12,947873 — 10
lg sin α =	9,849485 — 10	lg sin β =	9,625948 — 10
lg DB =	3,321925	lg DB =	3,321925.
DB =	2098,'6.		

Zu den Winkeln A und C kann man auch auf folgende Weise gelangen. Unter Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnungen ist

$$2\,S = A + C = 360^\circ - (B + \alpha + \beta),$$

also $C = 2\,S - A$.

Die Dreiecke ABD und BCD liefern

$$BD = \frac{a \cdot \sin A}{\sin \alpha},$$
$$= \frac{b \cdot \sin (2\,S - A)}{\sin \beta},$$

woraus folgt:

$$\frac{a \cdot \sin A}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \left\{ \sin 2\,S \cdot \cos A - \cos 2\,S \cdot \sin A \right\} \quad (\S.\ 7.\ \text{No. } 3.),$$

oder $$\frac{a \cdot \sin \beta}{b \cdot \sin \alpha} = \sin 2\,S \cdot \operatorname{cotg} A - \cos 2\,S,$$

oder $$\operatorname{cotg} A = \frac{a \cdot \sin \beta}{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\,S} + \operatorname{cotg} 2\,S.$$

Durch diese Gleichung kann A bestimmt werden, so lange die Methode noch brauchbar ist. Die Methode wird unbrauchbar, wenn $A + C = 2\,S = 180^\circ$ ist, in welchem Falle $\operatorname{cotg} A = \frac{a \cdot \sin \beta}{0} - \infty$, etwas Unmögliches giebt.

Obiges Beispiel giebt nach dieser Formel:

$$2\,S = 360^\circ - \{ 115^\circ + 45^\circ + 25^\circ \} = 175^\circ.$$

lg a =	3,301030	2,926978
lg sin β . =	9,625948 — 10	
lg b =	3,046105	1,835886
lg sin α . =	9,849485 — 10	
lg sin $2\,S$ =	8,940296 — 10	

$$\lg \left\{ \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \cdot \sin 2\,S} \right\} = 1{,}091092\ ..\ n\ \lg = \quad 12{,}333674$$

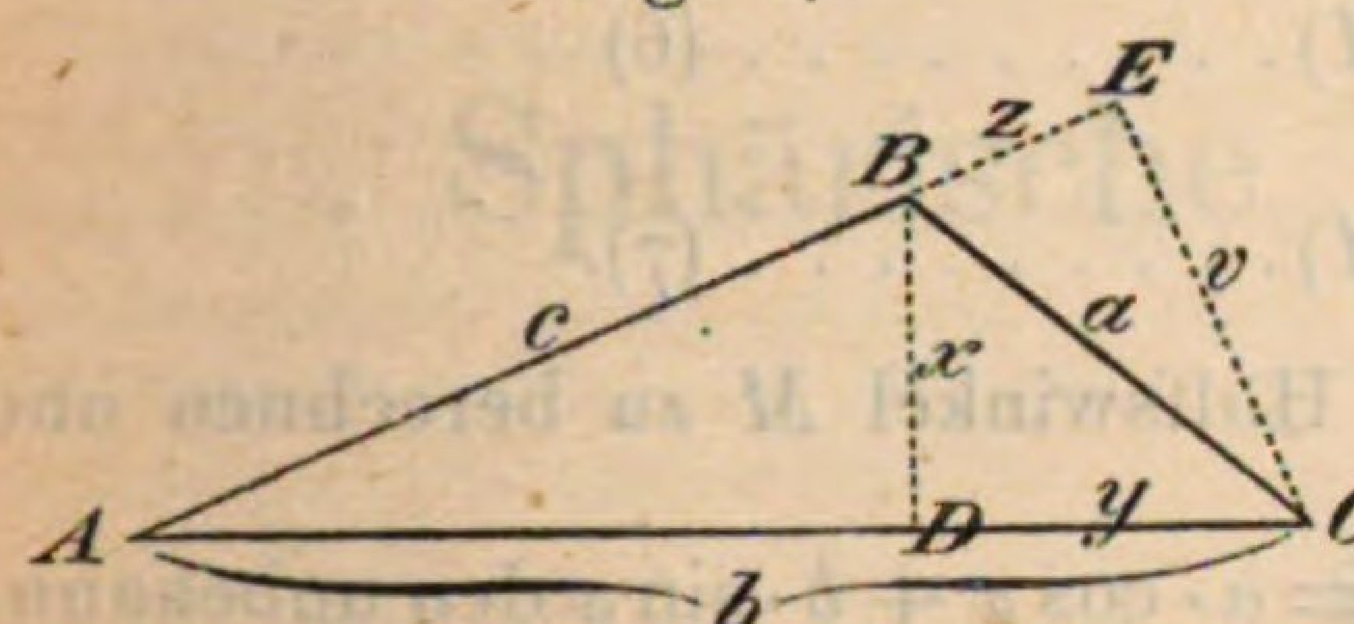
lg cotg $2\,S$ =	1,058048 n . n lg =	— 11,430053
	cotg A =	0,903621
	lg cotg A =	9,955986 — 10
	A =	$47^\circ\ 53'\ 54''$
	C =	$127^\circ\ 6'\ 6''$.

§. 16.

Ableitung der Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts der ebenen schiefwinkligen Dreiecke.

Im Folgenden sollen die Formeln entwickelt werden, nach welchen man mit den Stücken, die ein ebenes schiefwinkliges Dreieck bestimmen, dessen Flächeninhalt berechnen kann. Bezeichnet man die Winkel und Seiten des ebenen schiefwinkligen Dreiecks mit A, B, C und a, b, c (Fig. 14.) und dessen Flächeninhalt mit $\mathfrak{F}$, so gelangt man zu den Formeln für die verschiedenen Fälle, die sich an diesen Dreiecken nachweisen lassen, wie folgt:

Fig. 14.



1. Wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, z. B. c, A und C.

Es ist $b = \dfrac{c \cdot \sin(A + C)}{\sin C}$, $x = c \cdot \sin A$ und $\mathfrak{F} = \frac{1}{2} b\, x$, folglich

$$\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \cdot \sin(A + C)}{\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

2. Wenn ein Winkel und zwei Seiten gegeben sind, wovon die eine Seite diesem Winkel gegenüber liegt, z. B. a, c und A.

Es ist $\sin C = \dfrac{c \cdot \sin A}{a}$, $v = a \cdot \sin B = a \cdot \sin(A + C)$ und $\mathfrak{F} = \frac{1}{2} cv$, mithin

$$\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2} ca \cdot \sin(A + C) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

3. Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, z. B. b, c und A.

Man hat $x = c \cdot \sin A$ und $\mathfrak{F} = \frac{1}{2} bx$, also

$$\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2} bc \cdot \sin A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

4. Wenn die drei Seiten a, b, c gegeben sind.

Nach Gleichung (3) ist $\mathfrak{F} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$.

Es ist aber $\frac{1}{2} \sin A = \sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} A$. (§. 7. No. 69.),

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}} \quad \text{(§. 11. No. 14.)},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}} \quad \ldots \text{(§. 11. No. 15.), folglich}$$

$$\mathfrak{F} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

worin $S = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

§. 17.

In den §§. 11. und 15. wurden die trigonometrischen Rechnungen durch Einführung von Hülfswinkeln wesentlich erleichtert.

Oft können auch andere Rechnungen, besonders logarithmische, selbst wenn sie nicht Winkel betreffen, durch Einführung eines Hülfswinkels sehr erleichtert werden.

1. Aufgabe. Die Zahl $z = b \cdot \sin A + c \cdot \cos A$ zu finden.

Lösung. Setzt man

$$b = m \cdot \cos M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$c = m \cdot \sin M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

. Sphärische Trigonometrie.

§. 18.

Einleitung.

I. Wenn eine Kugel mit einer Ebene durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfläche eine Kreisebene, und wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, so entsteht eine grösste Kreisebene. Die Begrenzungen dieser Kreisebenen werden grösste oder kleinere Kreise genannt, je nachdem sie durch den Mittelpunkt der Kugel gehen oder nicht. Alle grössten Kreise einer Kugel sind diesemnach einander gleich, und jeder theilt die Kugel so wie ihre Oberfläche in zwei congruente Theile. Wenn zwei grösste Kreise sich schneiden, so halbiren sie einander, und die Verbindungslinie der beiden Durchschnittspunkte geht durch den Mittelpunkt der Kugel, weil die Ebenen dieser Kreise durch denselben gehen; deshalb ist sie ein Durchmesser der grössten Kreise und auch der Kugel.

Kleinere Kreise einer Kugel sind einander gleich, wenn ihre Ebenen gleichen Abstand von dem Mittelpunkt der Kugel haben. Dieser Abstand ist die Normale zwischen dem Centrum der Kugel und dem der Kreisebene, oder die Verbindungslinie zwischen dem Centrum der Kugel und dem der Kreisebene. Kleinere Kreise können sich gegenseitig nicht halbiren.

Drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte bestimmen, wie bekannt, die Lage der durch sie gelegten Ebene, weshalb durch zwei Punkte auf der Oberfläche einer Kugel, die nicht Endpunkte eines Durchmessers derselben sind, nur ein grösster Kreis gelegt werden kann. Dagegen kann man durch einen Punkt, oder durch zwei Punkte auf der Oberfläche der Kugel, wenn diese Endpunkte eines Kugeldurchmessers sind, unendlich viele grösste Kreise ziehen. Man wird also durch zwei beliebige Punkte auf der Oberfläche einer Kugel, mit Ausnahme der Endpunkte eines Kugeldurchmessers, unendlich viele kleinere Kreise legen können, weil die Lage ihrer Mittelpunkte beliebig ist. Vergleicht man nun alle möglichen Kreisbögen zwischen diesen beiden Punkten mit einander, wovon aber jeder kleiner als sein Halbkreis sein muss, so wird der kleinste von allen der sein, dessen Radius der grösste ist, und der grösste wieder der, dessen Radius der kleinste ist. Der kürzeste Weg zwischen beiden Punkten auf der Oberfläche einer Kugel ist somit immer ein grösster Kreisbogen. Jede Normale, die man in dem Mittelpunkt auf der Ebene eines Kugelkreises errichtet, geht durch den Mittelpunkt der Kugel und ist, wenn bis an die Oberfläche der Kugel verlängert, ein Durchmesser derselben. Jeder Durchmesser der Kugel, der normal

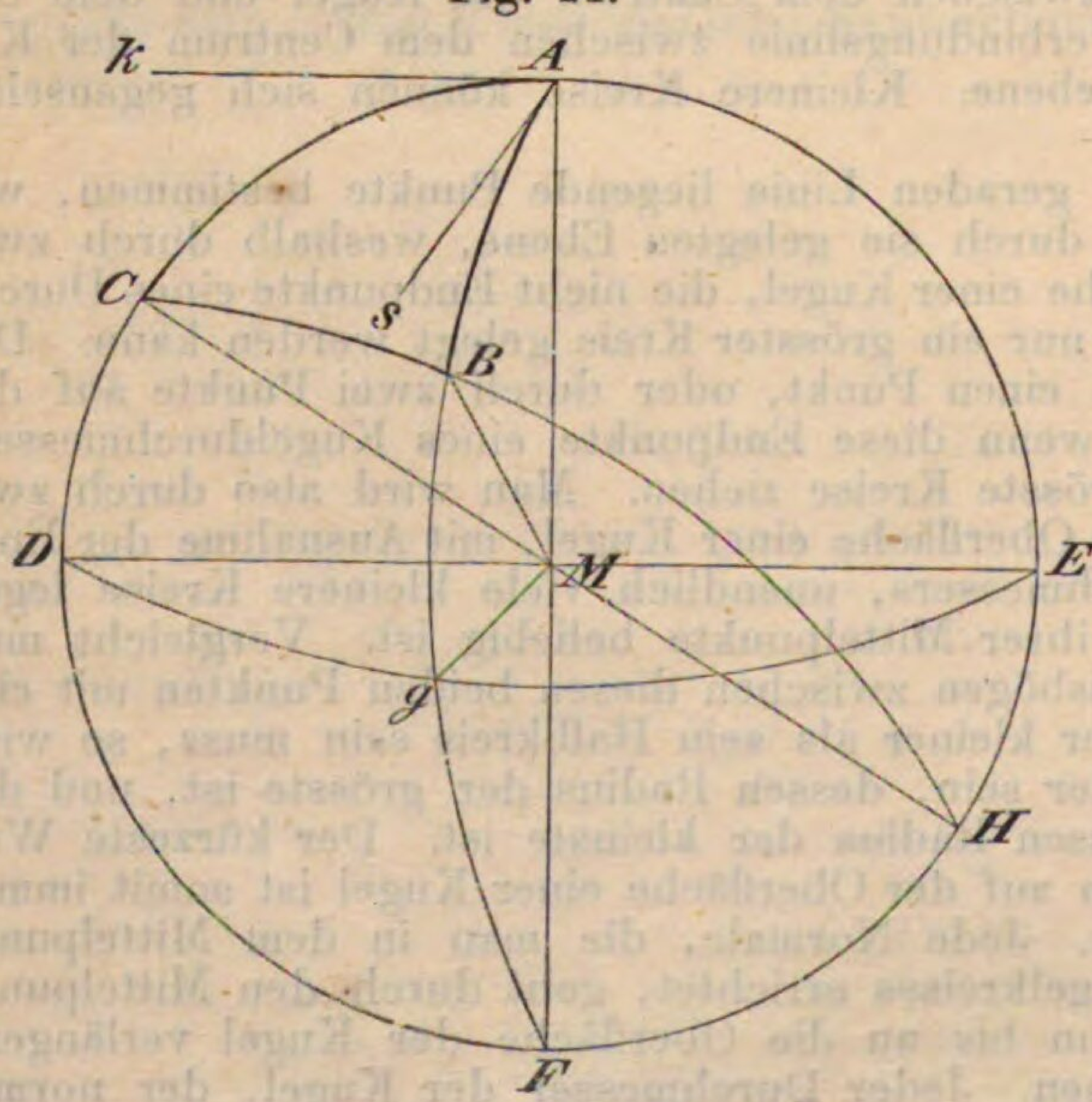
auf einer Kreisebene derselben steht, — also durch deren Mittelpunkt geht, — wird Axe dieses Kreises genannt, und die Endpunkte der Axe sind dessen Pole. Der Pol eines Kreises ist hiernach von allen seinen Punkten gleich weit entfernt; wenn daher mehrere Punkte auf der Oberfläche einer Kugel von einem Punkt derselben gleichen Abstand haben, so liegen alle in einem Kreise. Die Pole eines grössten Kreises stehen von allen Punkten desselben gleich weit ab, und zwar um einen grössten Kreisquadranten.

II. Eine gerade Linie steht normal auf einer Ebene, wenn die in letzterer, durch den Schnittpunkt beider, beliebig gezogenen geraden Linien mit jener rechte Winkel bilden. Wenn man also in einer Ebene eine Normale errichten will, so ziehe man in jener durch den gegebenen oder angenommenen Punkt zwei, sich unter einem spitzen, rechten oder stumpfen Winkel schneidende Linien, und errichte in dem Schnittpunkt dieser eine dritte Linie, welche mit jeder der beiden andern einen rechten Winkel macht, so ist sie die verlangte Normale.

Wenn ferner eine Gerade eine Ebene schneidet, so bildet jene mit dieser einen gewissen Winkel; fällt man nun von einem beliebigen Punkt der Linie, aber ausserhalb der Ebene befindlich, eine Normale auf letztere, und verbindet diesen Schnittpunkt und den gegebenen in der Ebene durch eine gerade Linie, so ist der Winkel, den diese Linie mit der gegebenen macht, der Winkel, den die Ebene mit der sie schneidenden Geraden bildet.

Der Neigungswinkel zweier sich schneidenden Ebenen ist derjenige ebene Winkel, der erhalten wird, wenn man von einem beliebigen Punkt aus in der gemeinschaftlichen Schnittlinie auf diese Normalen in jeder Ebene zieht. Wenn daher eine Gerade auf einer Ebene normal steht, und durch erstere eine Ebene gelegt wird, die letztere schneidet, so stehen diese beiden Ebenen normal auf einander. Wenn zwei Kreisebenen auf einander normal stehen, so stehen auch die Kreise selbst normal auf einander, und stehen erstere schief gegen einander, so auch letztere. Der Neigungswinkel zweier grössten Kreisbögen ist demnach gleich dem Winkel der Kreisebenen derselben.

Fig. 21.



Geht ein grösster Kreis durch die Pole eines andern grössten Kreises, so stehen beide normal auf einander, woraus folgt, dass, wenn mehrere grösste Kreise durch die Pole eines andern grössten Kreises gehen, jene alle normal auf diesem stehen.

III. Die Neigung zweier sich schneidenden grössten Kreisbögen heisst ein sphärischer Winkel, die Kreisbögen selbst werden seine Schenkel und der Schnittpunkt sein Scheitelpunkt genannt.

So ist z. B. $\angle CAB$ (Fig. 21.) ein sphärischer Winkel, weil seine Schen-

kel AC und AB Bögen der grössten Halbkreise ACF und ABF sind. Die gemeinschaftliche Schnittlinie dieser beiden grössten Kreisebenen ist AF. Ist nun A der Pol des grössten Halbkreises DgE, so ist der Winkel DMg = dem sphärischen Winkel BAC, weil die Radien DM und gM in den Ebenen der Bögen AC und AB auf ihrer Schnittlinie AF in M normal sind. Da der Bogen Dg Maass von dem Winkel DMg ist, so ist er es auch von dem sphärischen Winkel CAB, und da die Schenkel $AD = Ag = 90°$ sind, so folgt daraus, dass, wenn man die Schenkel eines sphärischen Winkels zu 90° ergänzt und durch die Endpunkte dieser Ergänzungen einen grössten Kreisbogen legt, dieser Maass von dem sphärischen Winkel ist. Wenn man ferner in A an die Bögen AC und AB die Tangenten Ak und As zieht, so muss auch der Winkel kAs gleich dem sphärischen Winkel CAB sein, weil $Ak \mathrel{+\!\!\!\!=} MD$ und $As \mathrel{+\!\!\!\!=} Mg$ ist.

IV. Der Theil der Kugeloberfläche, der von zwei grössten Halbkreisen begrenzt wird, wie z. B. $ADFgA$ (Fig. 21.), heisst ein sphärisches Zweieck, und die Winkel desselben, als DAg und DFg, sind einander gleich. Die grössten Halbkreise eines sphärischen Zweiecks sind seine beiden Seiten und zusammengenommen = 360°. Nimmt man in jeder Seite eines sphärischen Zweiecks einen beliebigen Punkt an, und legt durch beide einen grössten Kreisbogen, so entstehen zwei sphärische Dreiecke, als z. B. ACB und CBF. Ein sphärisches Dreieck ist somit ein Theil der Kugeloberfläche, begrenzt von drei grössten Kreisbögen, von welchen letzteren aber jeder kleiner als 180° ist. Da, wie man leicht sieht, $FC + FB > BC$, d. i. zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks grösser sind als die dritte, und $AC + AB + FC + FB = 360°$ ist, so wird $AC + AB + BC < 360°$ sein, d. h. die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks zusammengenommen sind immer kleiner als 360°.

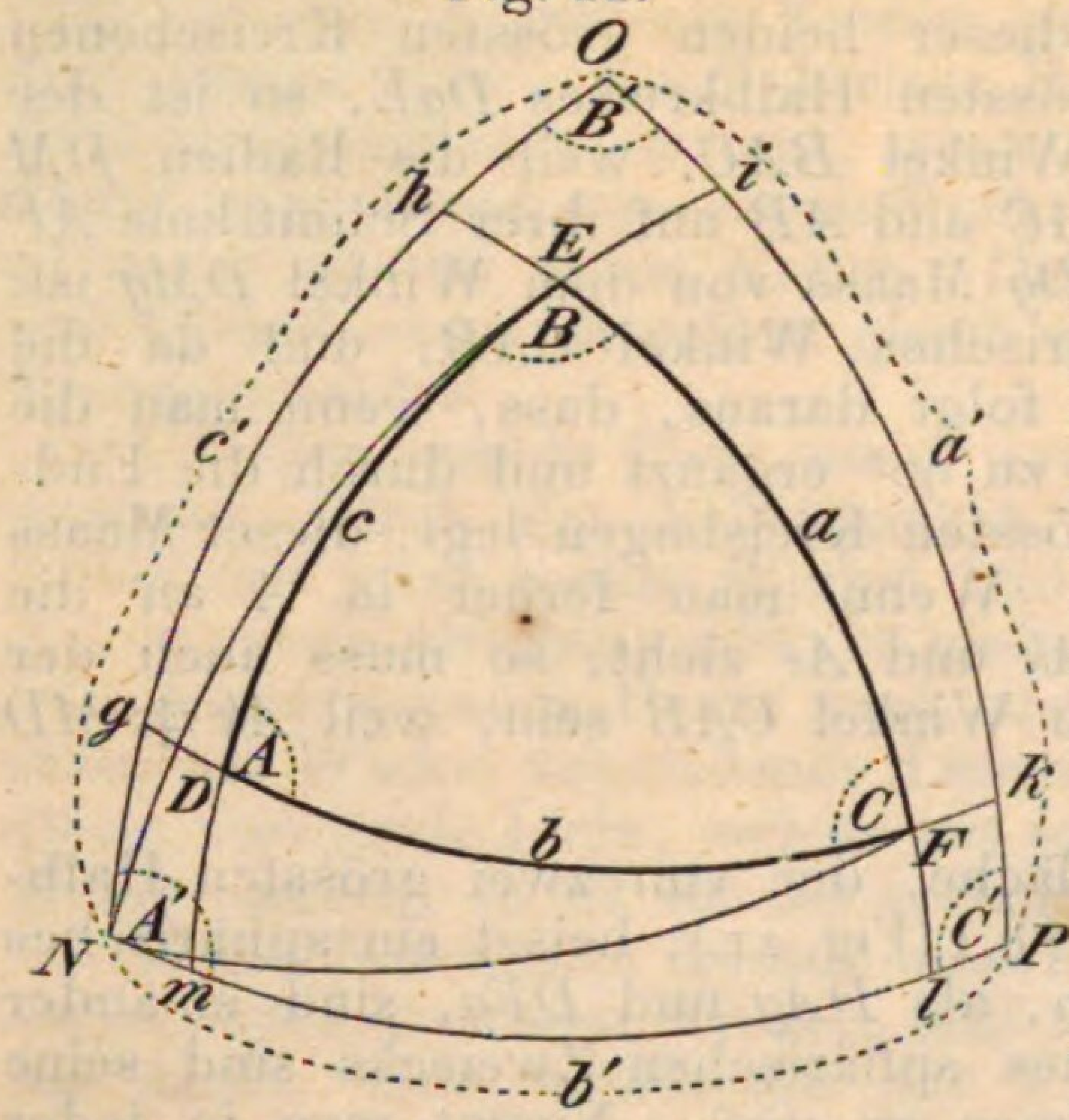
Die sphärischen Dreiecke theilt man in rechtwinklige und schiefwinklige; sie heissen rechtwinklig, wenn sie wenigstens einen rechten Winkel haben, und schiefwinklig, wenn kein Winkel ein rechter ist. Rechtseitig nennt man die Dreiecke auch, wenn wenigstens eine Seite darin gleich 90° ist.

Denkt man sich durch die Seiten des sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 21.) die Kreisebenen gelegt, so durchschneiden diese sich in den Kugelradien AM, BM, CM, und es entsteht eine Art dreiseitiger Pyramide $ABCM$, deren Grundfläche das sphärische Dreieck ABC ist, und deren Spitze M in dem Centrum der Kugel liegt. Diese Pyramide wird ein körperliches Dreieck genannt, und hängt mit dem sphärischen innig zusammen. Denn es sind die Seiten des sphärischen Dreiecks Maasse von den Winkeln der Kanten des körperlichen Dreiecks, wie z. B. die Bögen AC, AB und BC von den Winkeln AMC, AMB, BMC, und die Winkel des ersteren gleich den Winkeln der Seitenebenen des letzteren (III.).

Man hat also hiernach bei Behandlung der sphärischen Dreiecke nur mit ebenen und sphärischen Winkeln zu thun, woraus denn weiter folgt, dass bei Berechnung dieser Dreiecke nur trigonometrische Linien oder Functionen vorkommen können.

Da leicht einzusehen ist, dass die Winkel der drei Kanten des körperlichen Dreiecks, als: AMB, AMC, BMC, zusammengenommen kleiner als 360° sind, so müssen die Seiten des sphärischen Dreiecks, als Maasse dieser Winkel, zusammengenommen auch kleiner als 360° sein, welches schon auf anderem Wege dargethan ist.

Fig. 22.



V. Es sei, in Fig. 22., DEF ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel und Seiten auf die gewöhnliche Weise durch A, B, C und a, b, c bezeichnet werden mögen. Der Einfachheit wegen sei hier jede Seite $< 90°$. Ergänzt man nun jede Seite zu $90°$ und zwar über beide Endpunkte hinaus, so dass $Fh = Fg = Di = Dk = El = Em = 90°$ wird, und legt demnächst durch die Punkte g und h, i und k, l und m grösste Kreise, so entsteht das Dreieck NOP, dessen Winkel und Seiten mit A', B', C' und a', b', c' bezeichnet sind.

Die beiden Dreiecke DEF und NOP stehen in gewisser Beziehung zu einander, die sich aus Folgendem ergeben wird. Da $Di = Dk = 90°$ ist, so ist D der Pol von OP oder a'. Auf ähnliche Weise lässt sich darthun, dass E der Pol von NP oder b' und F der Pol von ON oder c' ist. Hieraus folgt nun $NE = NF = 90°$, $OD = OF = 90°$, und $PE = PD = 90°$, also ist N der Pol von a, O der Pol von b, P der Pol von c. Es sind also die Winkelspitzen des einen Dreiecks die Pole der Seiten des andern, und diesem zufolge nennt man das eine Dreieck in Bezug auf das andere Polar- auch Supplementar-Dreieck.

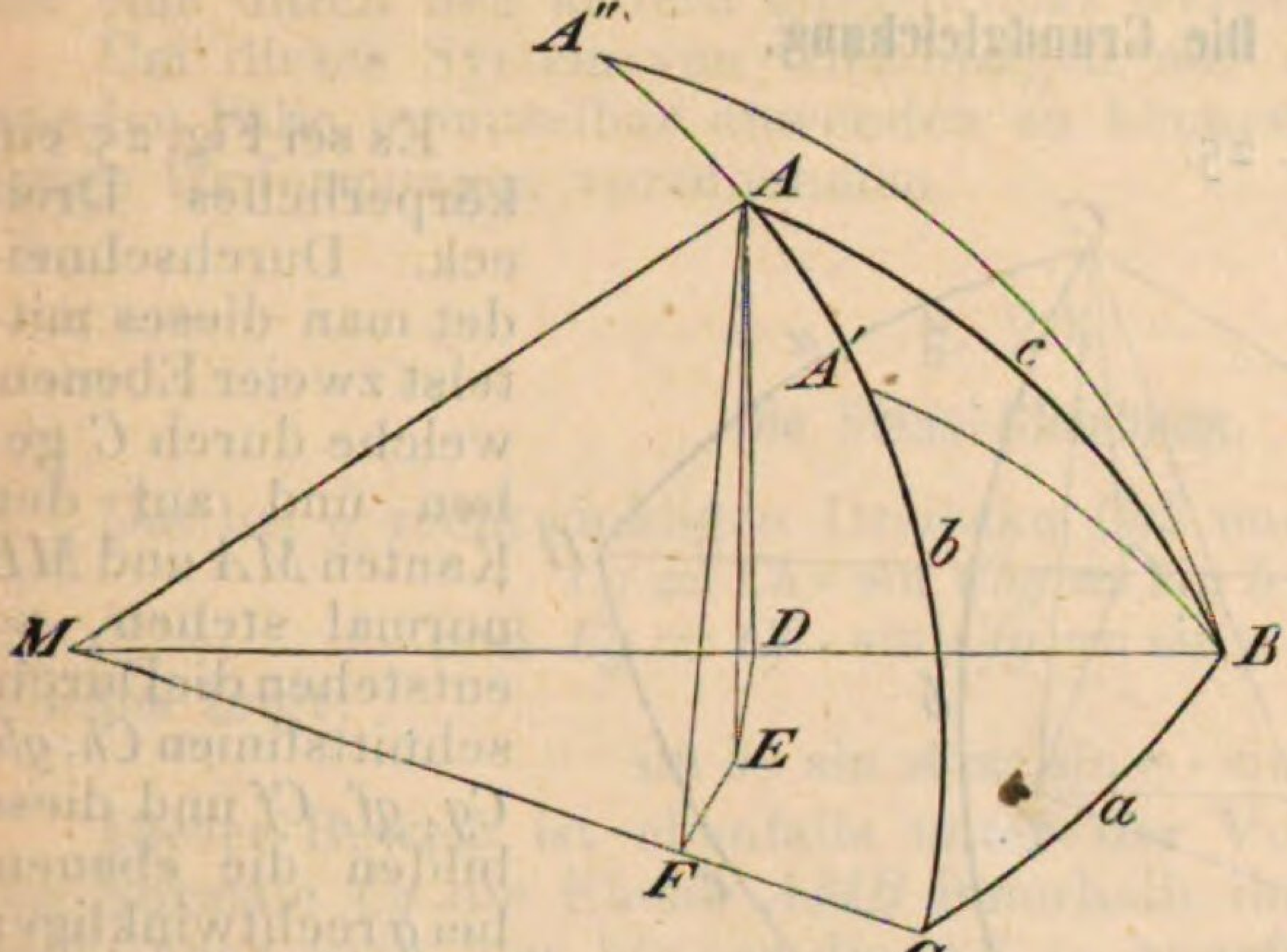
Es ist $hF + El = gF + kD = iD + mE = 180°$, oder was dasselbe ist $hl + a = gk + b = mi + c = 180°$. Da aber hl, gk, mi die Maasse von A', B', C' sind, so ist auch $A' + a = B' + b = C' + c = 180°$. Ferner ist $kO + iP = mP + lN = hN + gO = 180°$, oder auch $ik + OP = ml + NP = gh + NO = 180°$, und weil ik, ml, gh die Maasse von A, B, C sind, so auch $A + a' = B + b' = C + c' = 180°$. Die Seiten des einen Dreiecks sind hiernach die Supplemente der Winkel des andern und umgekehrt. Wenn auch nicht alle Seiten des Dreiecks DEF spitz oder stumpf sind, so wird es doch immer ein Dreieck geben, welches zu diesem in der angeführten Beziehung steht, und der diesfällige Beweis ist nicht schwieriger als der vorhergehende.

Da nach IV. die Seiten eines sphärischen Dreiecks zusammengenommen grösser als 0 und kleiner als $360°$ sind, und nach diesem Abschnitt $A' + a + B' + b + C' + c = 540°$, oder $A' + B' + C' = 540° - (a + b + c)$ ist, so müssen die Winkel eines sphärischen Dreiecks zusammengenommen grösser als $180°$ und kleiner als $540°$ sein. Demnach kann es sphärische Dreiecke geben, in welchen jeder Winkel ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer ist.

Da $A' + B' - C' = 180° - a + 180° - b - 180° + c = 180° - (a + b - c)$ und $a + b > c$, so ist $A' + B' - C' < 180°$, d. h. die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks weniger des dritten Winkels ist kleiner als $180°$.

VI. In dem sphärischen Dreieck ABC, Fig. 23., sei $\angle C = \angle B$ und M Centrum der Kugel. Fällt man nun von A die Normale AE auf die Ebene BMC, zieht AF normal auf MC und AD normal auf MB, und demnächst FE und DE, so ist auch EF normal auf MC, und DE normal auf MB, also $\angle AFE = C$, $\angle ADE = B$, und die Dreiecke AEF und AED bei E rechtwinklig. Da ferner $C = B$, so ist auch $\sin C = \sin B$. Es ist aber $\sin C = \frac{AE}{AF}$ und $\sin B = \frac{AE}{AD}$, folglich $AF = AD$.

Fig. 23.



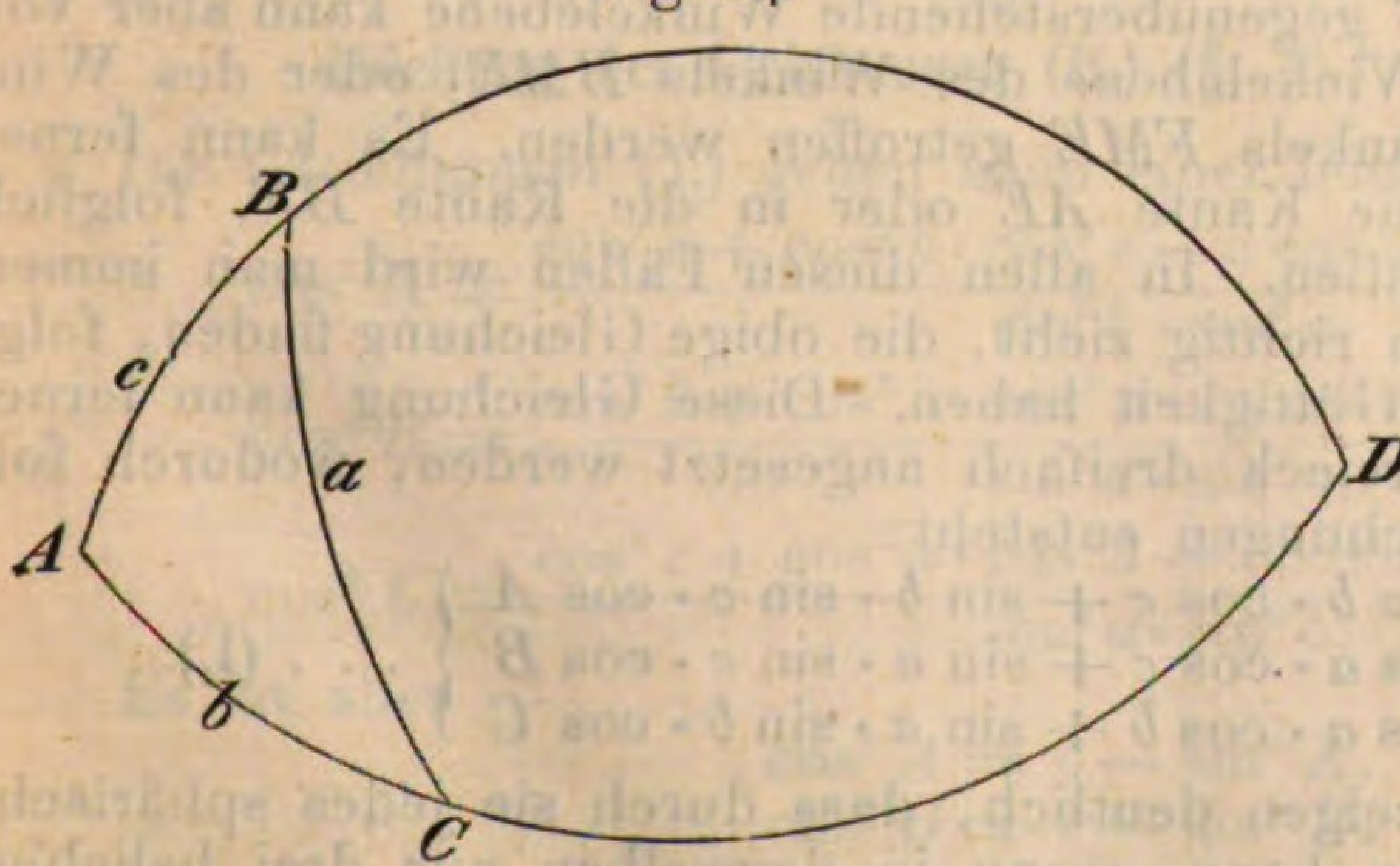
Ferner ist $\frac{AD}{AM} = \sin c$ und $\frac{AF}{AM} = \sin b$, folglich $b = c$. Wenn also in einem sphärischen Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, so sind hiernach die denselben gegenüberliegenden Seiten einander gleich und umgekehrt. Diesem zufolge muss nun auch das gleichseitige Dreieck ein gleichwinkliges sein.

VII. In (Fig. 23.) dem Dreieck ABC sei $\angle B > \angle C$ und zwar sei $\angle CBA' = \angle C$, so ist $CA' = BA'$ nach (VI.) und $CA' + A'A = BA' + A'A$ oder $CA = BA' + A'A$. Es ist aber $BA' + A'A > AB$ nach (IV.), also auch $CA > BA$, oder $b > c$, d. h. dem grösseren Winkel in einem sphärischen Dreieck liegt auch die grössere Seite gegenüber.

Wenn nun $b > c$ ist, so kann nicht $C > B$ sein und auch nicht $C = B$ (nach dem Vorstehenden), sondern es muss $B > C$ sein, d. h. der grösseren Seite muss auch der grössere Winkel gegenüber liegen.

VIII. Wenn (Fig. 23.) das sphärische Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist und $AC = 90^\circ$, so ist A der Pol von BC, also $AB = 90^\circ$ und $\angle B = 90^\circ$. Verlängert man CA über A hinaus bis A'' und zieht den grössten Kreisbogen $A''B$, so ist $CA'' > 90^\circ$, auch $\angle CBA'' > 90^\circ$, weil $A''C > AC$ und $\angle A''BC > \angle ABC$. Es ist aber $CA' < 90^\circ$ und $\angle CBA' < 90^\circ$, weil $CA' < CA$ und $\angle CBA' < \angle CBA$. Hieraus geht hervor, dass in jedem sphärischen rechtwinkligen Dreieck die Kathete gleichartig ist mit dem ihr gegenüberliegenden Winkel, d. h. entweder sind beide grösser oder beide kleiner als 90°.

Fig. 24.

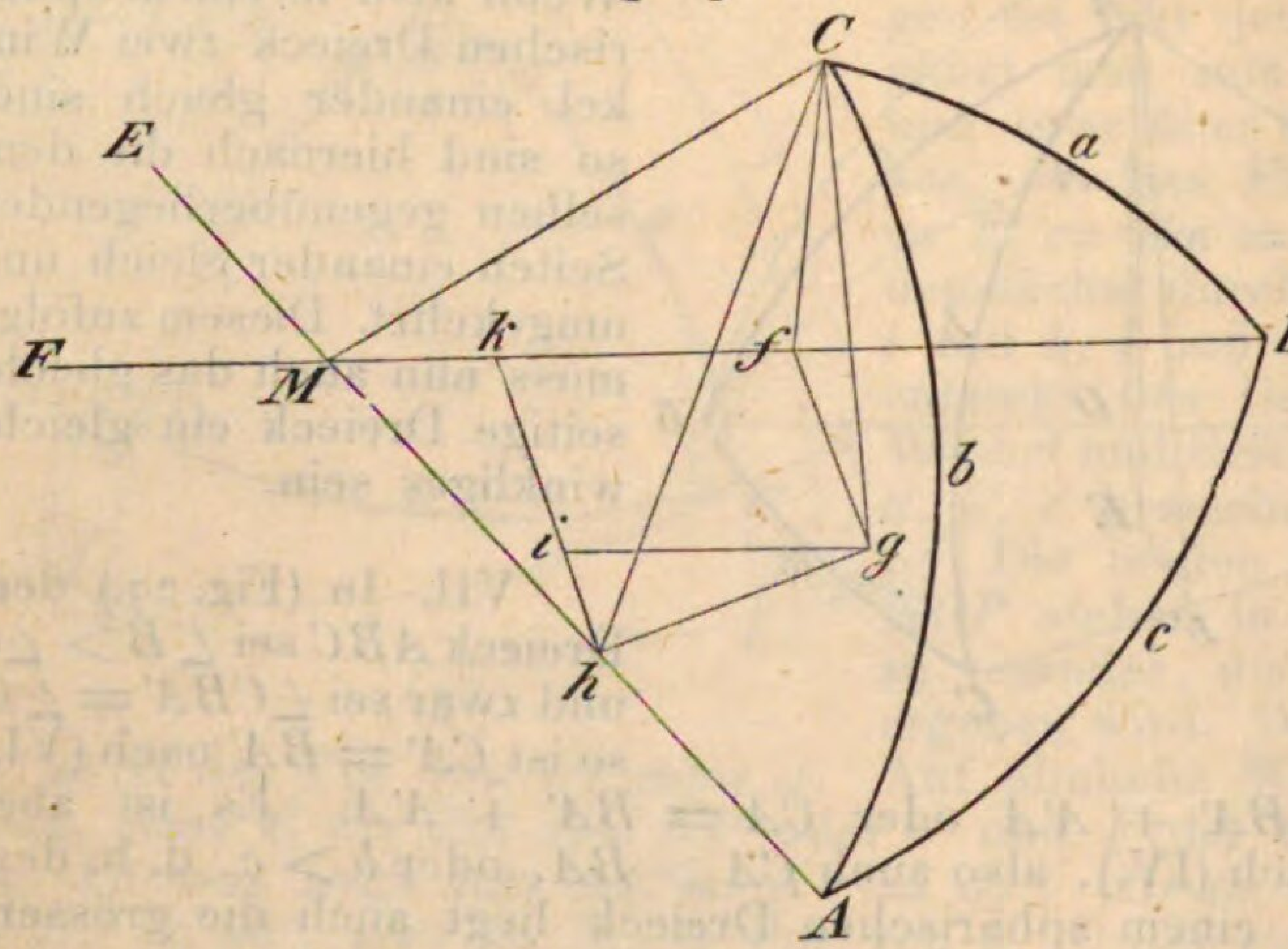


IX. In Fig. 24. sei $ABDC$ ein sphärisches Zweieck und $\angle A = \angle D = 90^\circ$. In diesem bilde man das Dreieck ABC, aber so, dass die Katheten AB und AC, jede $< 90^\circ$ werde; alsdann werden in dem bei D rechtwinkligen Dreieck BDC die Katheten BD und CD, jede $> 90^\circ$ sein. Beide Dreiecke haben die Hypotenuse BC gemeinschaftlich und diese muss kleiner als 90° sein, weil sie nur dann 90° werden kann, wenn jede Kathete $= 90^\circ$ ist. Daher, wenn die Hypotenuse spitz ist, müssen die beiden Katheten entweder beide spitz oder beide stumpf sein.

§. 19.

Die Grundgleichung.

Fig. 25.



Es sei Fig. 25. ein körperliches Dreieck. Durchschneidet man dieses mittelst zweier Ebenen, welche durch C gehen und auf den Kanten MA und MB normal stehen, so entstehen die Durchschnittslinien Ch, gh, Cg, gf, Cf und diese bilden die ebenen, bei g rechtwinkligen Dreiecke Cgh und Cgf, in welchen $\angle\, Chg = A$ und $\angle\, Cfg = B$ ist, weil Cf und fg beide normal auf MB, und Ch und gh beide normal auf MA stehen. Zieht man nun $hk \parallel gf$ und $gi \parallel BM$, so entsteht das ebene, bei i rechtwinklige Dreieck gih, worin $\angle\, ghi = \angle\, AMB = c$ ist.

Setzt man nun $CM = 1$, so ist:

$$Cf = \sin a,$$
$$Mf = \cos a,$$
$$Ch = \sin b,$$
$$Mh = \cos b.$$

Die ebenen rechtwinkligen Dreiecke Cgh, ghi und Mhk liefern:

$$gh = Ch \cdot \cos Chg = \sin b \cdot \cos A,$$
$$kf = gi = hg \cdot \sin ghi = \sin b \cdot \cos A \cdot \sin c,$$
$$Mk = Mh \cdot \cos AMB = \cos b \cdot \cos c.$$

Es ist $Mf = Mk + kf$,

also $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$.

Der Beweis dieser Gleichung ist hier so geführt, dass die von C auf die Ebene BMA gefällte Normale Cg diese innerhalb ihrer Winkelebene trifft. Die dem Winkel C gegenüberstehende Winkelebene kann aber von der Normale Cg in der Winkelebene des Winkels BME, oder des Winkels AMF, oder des Winkels FME getroffen werden. Es kann ferner der Schnittpunkt g in die Kante AE oder in die Kante BF, folglich auch in den Punkt M fallen. In allen diesen Fällen wird man immer, wenn man die Hülfslinien richtig zieht, die obige Gleichung finden, folglich wird sie allgemeine Gültigkeit haben. Diese Gleichung kann ferner in jedem sphärischen Dreieck dreifach angesetzt werden, wodurch folgendes System von Gleichungen entsteht:

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\end{array}\right\} \ldots \text{(I.)}.$$

Diese Gleichungen zeigen deutlich, dass durch sie jedes sphärische Dreieck aufgelöst werden kann, wenn in demselben nur drei beliebige Stücke gegeben sind, denn in ihnen kommen die drei Winkel und Seiten vor, also sechs Stücke, und wenn von diesen drei gegeben sind, so kann man mit drei Gleichungen die übrigen drei unbekannten Stücke

finden. Hierbei ist noch zu bemerken, dass der Sinus und Cosinus einer unbekannten Grösse immer nur als eine Unbekannte anzusehen ist, da der eine durch den andern ausgedrückt werden kann.

Um dieses System von Gleichungen auf die verschiedenen vorkommenden Fälle unmittelbar anwenden zu können, hat man mit ihnen noch einige Umformungen vorzunehmen.

§. 20.

Die Sinus-Gleichung.

Die bei g rechtwinkligen Dreiecke Cgh und Cgf in Fig. 25. liefern:

$$Cg = Ch \cdot \sin Chg = \sin b \cdot \sin A$$

$$\text{und } Cg = Cf \cdot \sin Cfg = \sin a \cdot \sin B,$$

woraus folgt:

$$\sin b \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin B.$$

Dieser Beweis ist ebenfalls unter der Voraussetzung geführt, dass die Normale Cg die Ebene AMB innerhalb ihrer Schenkel BM und AM trifft; aber auch hier können die in §. 19. angeführten Fälle eintreten, und in allen diesen Fällen wird man, wenn die Hülfslinien richtig gezogen werden, die vorstehende Gleichung erhalten, folglich muss auch sie allgemeine Gültigkeit haben. Diese Gleichung kann in jedem sphärischen Dreieck dreifach angesetzt werden, dadurch entsteht dann das folgende System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin b \cdot \sin A &= \sin a \cdot \sin B \\ \sin b \cdot \sin C &= \sin c \cdot \sin B \\ \sin a \cdot \sin C &= \sin c \cdot \sin A \end{aligned}\right\} \ldots \text{(II.)}.$$

Diese Gleichungen als Proportionen geschrieben sind:

$$\sin b : \sin a = \sin B : \sin A,$$
$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C,$$
$$\sin a : \sin c = \sin A : \sin C,$$

oder als fortschreitende Proportion geschrieben:

$$\sin b : \sin a : \sin c = \sin B : \sin A : \sin C.$$

Sie enthalten den Satz, dass in einem jeden sphärischen Dreieck die Sinusse der Winkel sich zu einander verhalten wie die Sinusse der diesen gegenüberliegenden Seiten.

§. 21.

Ableitung der Gleichungen (II.) (§. 20.) aus (I.) (§. 19.).

Die Gleichungen (I.) geben nach einer leichten Umformung:

$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c},$$

$$\cos^2 B = \frac{\cos^2 b + \cos^2 a \cdot \cos^2 c - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 c},$$

$$\cos^2 C = \frac{\cos^2 c + \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}.$$

Es ist aber

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A,$$
$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B,$$
$$\cos^2 C = 1 - \sin^2 C.$$

Substituirt man nun diese Werthe in die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach, so giebt die erste:

$$\sin^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)\cdot(1-\cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c},$$

und wenn man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks rechts mit $\sin^2 a$ multiplicirt und demnächst auf beiden Seiten die Quadratwurzel nimmt, so hat man:

$$(\alpha) \;.\;.\; \sin A = \sin a \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c};$$

die zweite liefert:

$$\sin^2 B = 1 - \frac{\cos^2 b + \cos^2 a \cdot \cos^2 c - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 c},$$

und wenn man nun den Ausdruck rechts mit $\sin^2 b$ oben und unten multiplicirt, demnächst auf beiden Seiten die Wurzel nimmt, so ist:

$$(\beta) \;.\;.\; \sin B = \sin b \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}.$$

Aus der dritten wird man auf ähnliche Weise finden:

$$(\gamma) \;.\;.\; \sin C = \sin c \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}.$$

Dividirt man nun (α) durch (β), (α) durch (γ), und (β) durch (γ), so hat man:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c},$$

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c},$$

oder:

$$\sin A \cdot \sin b = \sin a \cdot \sin B,$$
$$\sin A \cdot \sin c = \sin a \cdot \sin C,$$
$$\sin B \cdot \sin c = \sin b \cdot \sin C,$$

die Gleichungen (II.) in §. 20.

§. 22.

Die Gleichungen, worin drei Seiten und zwei Winkel vorkommen.

Nach §. 19. ist in Fig. 25.

$$Ch = \sin b,$$
$$Mh = \cos b,$$
$$Cf = \sin a,$$
$$Mf = \cos a,$$
$$\angle Cfg = B,$$
$$\angle Chg = A.$$

und die Dreiecke *Cgf*, *Cgh*, *ghi* und *Mhk* liefern:

$$ki = fg = fC \cdot \cos Cfg = \sin a \cdot \cos B,$$
$$gh = hC \cdot \cos Chg = \sin b \cdot \cos A,$$
$$hi = gh \cdot \cos ghi = \sin b \cdot \cos A \cdot \cos c,$$
$$hk = Mh \cdot \sin hMk = \cos b \cdot \sin c.$$

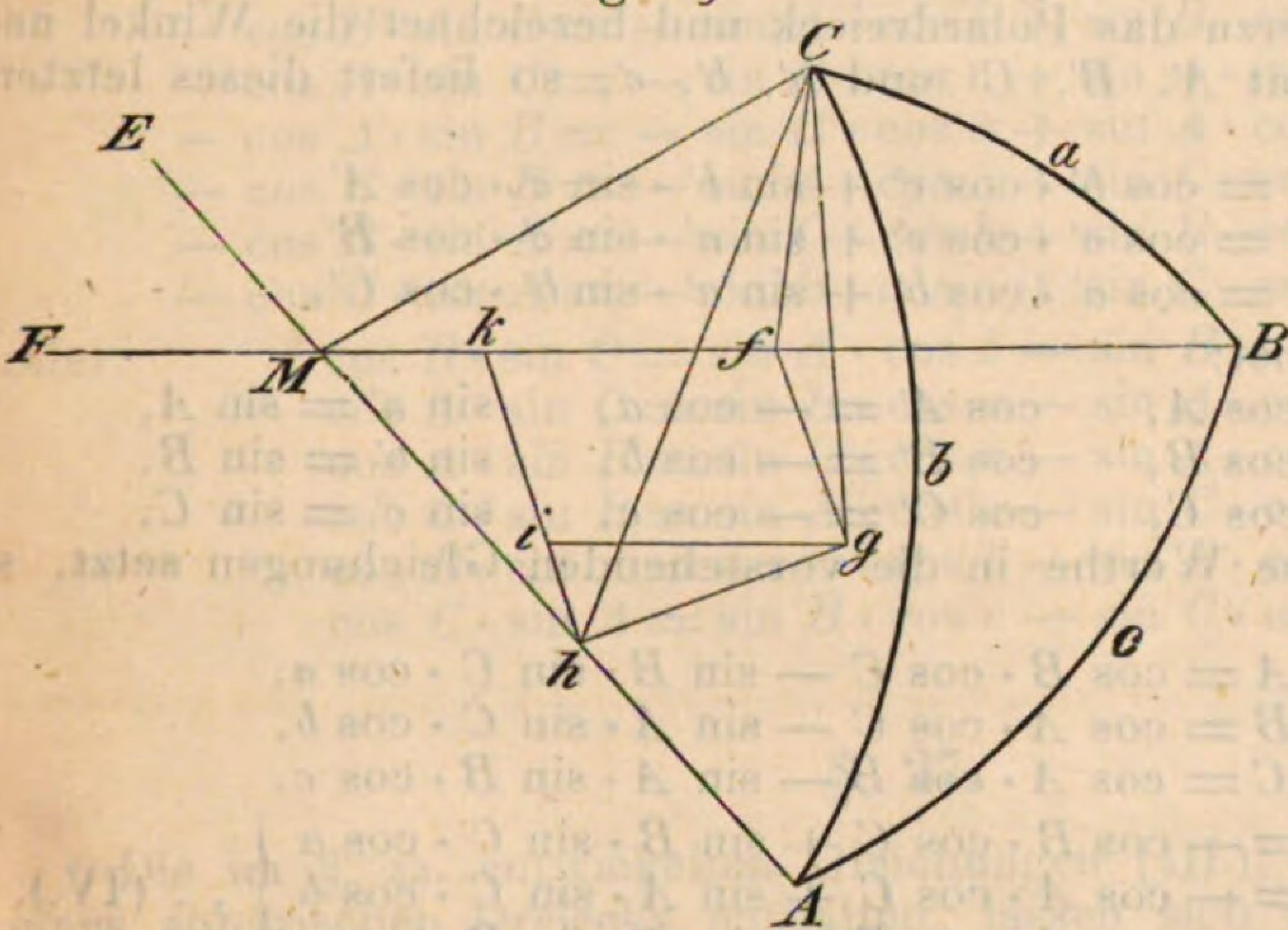
Es ist nun $hk = ki + hi$, folglich:

$$\cos b \cdot \sin c = \sin a \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A.$$

Dieses ist die eine Gleichung: legt man nun noch in Fig. 25. durch f und g Parallelen mit resp. gh und MA, so gelangt man zu der zweiten:

$$\cos a \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B.$$

Fig. 25.



Diese beiden Gleichungen lassen sich in allen den Fällen erweisen, in welchen g nicht in der Winkelebene des Winkels *BMA* liegt, deshalb haben sie auch allgemeine Gültigkeit.

Führt man von den Winkelspitzen *A* und *B* (Fig. 25.) ähnliche Constructionen aus als von *C*, so gelangt man zu vier Gleichungen, die den vorigen ähnlich sind.

Das sphärische Dreieck liefert demnach sechs Gleichungen, welche sind:

$$\left.\begin{aligned}
\cos b \cdot \sin c &= \sin a \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \\
\cos a \cdot \sin c &= \sin b \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B \\
\cos a \cdot \sin b &= \sin c \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C \\
\cos c \cdot \sin b &= \sin a \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A \\
\cos b \cdot \sin a &= \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C \\
\cos c \cdot \sin a &= \sin b \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B
\end{aligned}\right\} \;.\;. \text{(III.)}$$

§. 23.

Die Gleichungen (III.) in dem vorstehenden Paragraphen ergeben sich aus den Gleichungen (I.) in §. 19., wenn man in der ersten Gleichung das eine Mal für $\cos b$ den Werth aus der zweiten Gleichung und das andere Mal für $\cos c$ den Werth aus der dritten Gleichung setzt, demnächst mit der zweiten und dritten Gleichung es ebenso macht. Hiernach hat man:

1) $\cos a = \cos a \cdot \cos^2 c + \cos c \cdot \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$
$= \cos a - \cos a \cdot \sin^2 c + \cos c \cdot \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$
oder $0 = -\cos a \cdot \sin^2 c + \cos c \cdot \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A;$
dividirt man mit $\sin c$ und formt um, so wird erhalten:

$$\cos a \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B,$$

welches die zweite Gleichung in (III.) §. 22. ist.

2) $\cos a = \cos a \cdot \cos^2 b + \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$
$= \cos a - \cos a \cdot \sin^2 b + \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$
oder $0 = -\cos a \cdot \sin^2 b + \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A;$

dividirt man nun mit sin b und formt um, so wird:

$$\cos a \cdot \sin b = \sin c \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C,$$

welches die dritte Gleichung in (III.) §. 22. ist.

§. 24.

Gleichungen, worin drei Winkel und eine Seite vorkommen.

In einem sphärischen Dreieck seien wieder die Winkel mit A, B, C und die Seiten, die ihnen gegenüber liegen, mit a, b, c bezeichnet. Denkt man sich hierzu das Polardreieck und bezeichnet die Winkel und Seiten desselben mit A', B', C' und a', b', c', so liefert dieses letztere nach §. 19. (I.):

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos A'$$
$$\cos b' = \cos a' \cdot \cos c' + \sin a' \cdot \sin c' \cdot \cos B'$$
$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos C'.$$

Nach §. 18. V. ist:

$$\cos a' = -\cos A, \quad \cos A' = -\cos a, \quad \sin a' = \sin A,$$
$$\cos b' = -\cos B, \quad \cos B' = -\cos b, \quad \sin b' = \sin B,$$
$$\cos c' = -\cos C, \quad \cos C' = -\cos c, \quad \sin c' = \sin C,$$

und wenn man diese Werthe in die vorstehenden Gleichungen setzt, so liefern sie:

$$-\cos A = \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$
$$-\cos B = \cos A \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b,$$
$$-\cos C = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c \end{aligned}\right\} \quad . . (IV.).$$

§. 25.

Eine zweite Ableitung der Gleichungen (IV.).

Die Gleichungen (IV.) lassen sich aus den Gleichungen (III.) (§. 22.) ableiten. Multiplicirt man nämlich die zweite Gleichung mit cos B, addirt sie hiernach zur sechsten und setzt demnächst $1 - \sin^2 B$ für $\cos^2 B$, so erhält man

$$\sin a \cdot \cos c \cdot \sin^2 B = \sin b\,[\cos A \cdot \cos B + \cos C].$$

Es ist aber nach §. 20. (II.)

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A,$$

folglich, wenn man diesen Werth substituirt und darauf mit sin b dividirt,

$$\cos c \cdot \sin A \cdot \sin B = \cos A \cdot \cos B + \cos C,$$
$$\text{oder } \cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c.$$

Durch ein ähnliches Verfahren wird man zu den übrigen beiden Gleichungen in §. 24. gelangen.

§. 26.

Die Seiten und Winkel des gegebenen Dreiecks seien mit a, b, c und A, B, C, die des dazu gehörigen Polardreiecks mit a', b', c', A', B', C' bezeichnet, so liefert dies nach §. 22. (III.):

$$\cos b' \cdot \sin c' = \sin a' \cdot \cos B' + \sin b' \cdot \cos c' \cdot \cos A'$$
$$\cos a' \cdot \sin c' = \sin b' \cdot \cos A' + \sin a' \cdot \cos c' \cdot \cos B'$$
$$\cos a' \cdot \sin b' = \sin c' \cdot \cos A' + \sin a' \cdot \cos b' \cdot \cos C'$$
$$\cos c' \cdot \sin b' = \sin a' \cdot \cos C' + \sin c' \cdot \cos b' \cdot \cos A'$$
$$\cos b' \cdot \sin a' = \sin c' \cdot \cos B' + \sin b' \cdot \cos a' \cdot \cos C'$$
$$\cos c' \cdot \sin a' = \sin b' \cdot \cos C' + \sin c' \cdot \cos a' \cdot \cos B';$$

da aber

$$\cos a' = -\cos A, \quad \cos A' = -\cos a, \quad \sin a' = \sin A,$$
$$\cos b' = -\cos B, \quad \cos B' = -\cos b, \quad \sin b' = \sin B,$$
$$\cos c' = -\cos C, \quad \cos C' = -\cos c, \quad \sin c' = \sin C,$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe:

$$-\cos B \cdot \sin C = -\sin A \cdot \cos b + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a$$
$$-\cos A \cdot \sin C = -\sin B \cdot \cos a + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b$$
$$-\cos A \cdot \sin B = -\sin C \cdot \cos a + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c$$
$$-\cos C \cdot \sin B = -\sin A \cdot \cos c + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a$$
$$-\cos B \cdot \sin A = -\sin C \cdot \cos b + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos c$$
$$-\cos C \cdot \sin A = -\sin B \cdot \cos c + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
\cos B \cdot \sin C &= \sin A \cdot \cos b - \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a \\
\cos A \cdot \sin C &= \sin B \cdot \cos a - \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b \\
\cos A \cdot \sin B &= \sin C \cdot \cos a - \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c \\
\cos C \cdot \sin B &= \sin A \cdot \cos c - \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a \\
\cos B \cdot \sin A &= \sin C \cdot \cos b - \sin B \cdot \cos A \cdot \cos c \\
\cos C \cdot \sin A &= \sin B \cdot \cos c - \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b
\end{aligned}\right\} \ldots (V.).$$

§. 27.

Die im §. 22. entwickelten Gleichungen (III.), welche fünf Stücke eines sphärischen Dreiecks enthalten, lassen sich in andere umformen, in welchen nur vier vorkommen. Setzt man nämlich in die erste Gleichung $\frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin B}$ für $\sin a$ [§. 20. (II.)], so erhält man

$$\cos b \cdot \sin c = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin B} \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A,$$

und wenn man auf beiden Seiten mit $\sin b$ dividirt, ergiebt sich

$$\operatorname{cotg} b \cdot \sin c = \sin A \cdot \operatorname{cotg} B + \cos c \cdot \cos A.$$

Setzt man ferner $\frac{\sin c \cdot \sin A}{\sin C}$ für $\sin a$ in die vierte Gleichung und dividirt diese demnächst durch $\sin c$, so findet man

$$\operatorname{cotg} c \cdot \sin b = \sin A \cdot \operatorname{cotg} C + \cos b \cdot \cos A.$$

Wird in die zweite Gleichung $\frac{\sin B \cdot \sin a}{\sin A}$ für $\sin b$ gesetzt, demnächst mit $\sin a$ dividirt, so ergiebt sich

$$\operatorname{cotg} a \cdot \sin c = \sin B \cdot \operatorname{cotg} A + \cos c \cdot \cos B.$$

Verfährt man nun noch mit der dritten, fünften und sechsten Gleichung auf ähnliche Weise, so gelangt man zu dem folgenden System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg} b \cdot \sin c &= \sin A \cdot \operatorname{cotg} B + \cos c \cdot \cos A \\
\operatorname{cotg} c \cdot \sin b &= \sin A \cdot \operatorname{cotg} C + \cos b \cdot \cos A \\
\operatorname{cotg} a \cdot \sin c &= \sin B \cdot \operatorname{cotg} A + \cos c \cdot \cos B \\
\operatorname{cotg} a \cdot \sin b &= \sin C \cdot \operatorname{cotg} A + \cos b \cdot \cos C \\
\operatorname{cotg} b \cdot \sin a &= \sin C \cdot \operatorname{cotg} B + \cos a \cdot \cos C \\
\operatorname{cotg} c \cdot \sin a &= \sin B \cdot \operatorname{cotg} C + \cos a \cdot \cos B
\end{aligned}\right\} \ldots (VI.).$$

§. 28.

Auch die im §. 26. entwickelten Gleichungen (V.), welche ebenfalls fünf Stücke eines sphärischen Dreiecks enthalten, lassen sich in andere verwandeln, worin nur vier vorkommen. Setzt man nämlich in die erste Gleichung $\frac{\sin B \cdot \sin a}{\sin b}$ für $\sin A$ und dividirt hiernach mit $\sin B$, so erhält man:

$$\operatorname{cotg} B \cdot \sin C = \sin a \cdot \operatorname{cotg} b - \cos C \cdot \cos a.$$

Verfährt man ähnlich mit allen Gleichungen in §. 26. (V.), so entsteht das folgende System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg} B \cdot \sin C &= \sin a \cdot \operatorname{cotg} b - \cos C \cdot \cos a \\
\operatorname{cotg} A \cdot \sin C &= \sin b \cdot \operatorname{cotg} a - \cos C \cdot \cos b \\
\operatorname{cotg} A \cdot \sin B &= \sin c \cdot \operatorname{cotg} a - \cos B \cdot \cos c \\
\operatorname{cotg} C \cdot \sin B &= \sin a \cdot \operatorname{cotg} c - \cos B \cdot \cos a \\
\operatorname{cotg} B \cdot \sin A &= \sin c \cdot \operatorname{cotg} b - \cos A \cdot \cos c \\
\operatorname{cotg} C \cdot \sin A &= \sin b \cdot \operatorname{cotg} c - \cos A \cdot \cos b
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(VII.)}.$$

§. 29.

Die bisher entwickelten Formeln bilden die Grundlage der sphärischen Trigonometrie. Sie geben unmittelbar die Auflösung aller Fälle, die bei einem sphärischen Dreieck nur vorkommen können, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.

Die Gleichungen im System (I.) §. 19., nämlich:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\
\cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\
\cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C,
\end{aligned}$$

liefern auch:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Vermittelst der drei ersten Gleichungen kann man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite, und vermittelst der drei letzten aus den drei Seiten die drei Winkel finden.

§. 30.

Nach den Gleichungen im System (II.) §. 20., nämlich:

$$\begin{aligned}
\sin b \cdot \sin A &= \sin a \cdot \sin B \\
\sin b \cdot \sin C &= \sin c \cdot \sin B \\
\sin a \cdot \sin C &= \sin c \cdot \sin A
\end{aligned}$$

kann man aus zwei Seiten und einem Winkel, der der einen Seite gegenübersteht, den Winkel, der der andern Seite gegenübersteht, finden. Ferner kann man dadurch aus zwei Winkeln und einer gegenüberliegenden Seite, die Seite, welche dem andern Winkel gegenüberliegt, bestimmen.

§. 31.

Die Gleichungen in dem System (IV.) §. 24., nämlich:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c,$$

geben auch:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C},$$
$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C},$$
$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

Von diesen Gleichungen dienen die drei ersten, um aus zwei Winkeln und der zwischen ihnen liegenden Seite den dritten Winkel, und die drei letzten, um aus den drei Winkeln jede der drei Seiten zu finden.

§. 32.

Die Gleichungen in dem System (VI.) §. 27. gehen nach einer leichten Umformung in folgende über:

$$\cot g\, b = \frac{\sin A \cdot \cot g\, B + \cos c \cdot \cos A}{\sin c},$$
$$\cot g\, c = \frac{\sin A \cdot \cot g\, C + \cos b \cdot \cos A}{\sin b},$$
$$\cot g\, a = \frac{\sin B \cdot \cot g\, A + \cos c \cdot \cos B}{\sin c},$$
$$\cot g\, a = \frac{\sin C \cdot \cot g\, A + \cos b \cdot \cos C}{\sin b},$$
$$\cot g\, b = \frac{\sin C \cdot \cot g\, B + \cos a \cdot \cos C}{\sin a},$$
$$\cot g\, c = \frac{\sin B \cdot \cot g\, C + \cos a \cdot \cos B}{\sin a},$$

nach welchen man aus zwei Winkeln und der zwischen ihnen liegenden Seite die beiden andern Seiten des Dreiecks finden kann.

§. 33.

Aus den Gleichungen im System (VII.) §. 28. ergeben sich unmittelbar folgende:

$$\cot g\, B = \frac{\sin a \cdot \cot g\, b - \cos C \cdot \cos a}{\sin C},$$
$$\cot g\, A = \frac{\sin b \cdot \cot g\, a - \cos C \cdot \cos b}{\sin C},$$
$$\cot g\, A = \frac{\sin c \cdot \cot g\, a - \cos B \cdot \cos c}{\sin B},$$
$$\cot g\, C = \frac{\sin a \cdot \cot g\, c - \cos B \cdot \cos a}{\sin B},$$

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\sin c \cdot \operatorname{cotg} b - \cos A \cdot \cos c}{\sin A}.$$

$$\operatorname{cotg} C = \frac{\sin b \cdot \operatorname{cotg} c - \cos A \cdot \cos b}{\sin A}.$$

Nach diesen Gleichungen kann man aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die beiden andern Winkel finden.

§. 34.

Die Gleichungen in den Systemen von incl. (I.) bis (VII.) lassen sich sehr vereinfachen, wenn das Dreieck rechtwinklig angenommen wird. Setzt man daher $A = 90^\circ$, so ist $\sin A = 1$, $\cos A = 0$, und wenn man aus diesen Systemen nur diejenigen Gleichungen nimmt, in welchen drei Functionen der Seiten a, b, c und der Winkel B, C vorkommen, und die Wiederholungen unberücksichtigt bleiben, so wird man erhalten:

1) . . . $\cos a = \cos b \cdot \cos c$ (§. 19.)

2) . . . $\sin b = \sin a \cdot \sin B$
3) . . . $\sin c = \sin a \cdot \sin C$ } (§. 20.)

4) . . . $\cos a = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C$
5) . . . $\cos B = \sin C \cdot \cos b$
6) . . . $\cos C = \sin B \cdot \cos c$ } . . (§. 24.)

7) . . . $\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \cdot \sin c$
8) . . . $\operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} c \cdot \sin b$
9) . . . $\cos B = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} c$
10) . . . $\cos C = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} b$ } . . (§. 27.).

Die Gleichungen 7) und 8) können auch geschrieben werden:

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} B \cdot \sin c \text{ und } \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} C \cdot \sin b.$$

Die vorstehenden zehn Gleichungen sind ausreichend zur Auflösung aller rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, wenn in denselben ausser dem rechten Winkel noch zwei Stücke gegeben sind, denn die fünf Stücke a, b, c, B, C gestatten nur, zu je dreien, zehn Verbindungen. Nimmt man von diesen zehn Gleichungen nur diejenigen, welche wesentlich verschieden sind, so erhält man die sechs folgenden:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cdot \cos c,\\
\sin b &= \sin a \cdot \sin B,\\
\cos a &= \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C,\\
\cos B &= \sin C \cdot \cos b,\\
\operatorname{tang} b &= \sin c \cdot \operatorname{tang} B,\\
\operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} a \cdot \cos C,
\end{aligned}$$

die, gehörig umgestellt, zur Auflösung aller sphärischen rechtwinkligen Dreiecke hinreichend sein werden. Für das rechtseitige Dreieck würde man ähnliche Gleichungen ableiten können; diese haben aber keinen praktischen Werth.

Zu den sechs Gleichungen von 4) bis 10) gelangt man auch auf folgende Weise mit Benutzung der letzten beiden Gleichungen in (I.) im §. 19. Diese sind umgeformt:

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \cos B = \cos b - \cos a \cdot \cos c \text{ und}$$
$$\sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \cos c - \cos a \cdot \cos b.$$

Setzt man aus 1) hierin $\cos b \cdot \cos c$ für $\cos a$, so erhält man:

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \cos B = \cos b - \cos b \cdot \cos^2 c \text{ und}$$
$$\sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \cos c - \cos c \cdot \cos^2 b,$$

oder wie man leicht sieht:

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin^2 c \text{ und}$$
$$\sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin^2 b.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\cos B = \frac{\cos b \cdot \sin c}{\sin a} \quad \ldots (11.)$$

$$\cos C = \frac{\cos c \cdot \sin b}{\sin a} \quad \ldots (12.).$$

In (11.) $\sin a \cdot \sin C$ für $\sin c$ aus 3) und in (12.) $\sin a \cdot \sin B$ für $\sin b$ aus 2) gesetzt, giebt:

$$\left.\begin{array}{l}\cos B = \sin C \cdot \cos b \\ \cos C = \sin B \cdot \cos c\end{array}\right\} \text{ die Gleich. 5) und 6).}$$

Nach 2) und 3) ist $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$, und diese Werthe für $\sin a$ in (11.) und (12.) gesetzt, geben:

$$\cos B = \frac{\cos b \cdot \sin c \cdot \sin B}{\sin b} \text{ und}$$

$$\cos C = \frac{\cos c \cdot \sin b \cdot \sin C}{\sin c},$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \cdot \sin c \\ \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} c \cdot \sin b\end{array}\right\} \text{ die Gleich. 7) und 8).}$$

Nach 1) ist $\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$ und $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, welche Werthe für $\cos b$ in (11.) und $\cos c$ in (12.) gesetzt, liefern:

$$\left.\begin{array}{l}\cos B = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} c \\ \cos C = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} b\end{array}\right\} \text{ die Gleich. 9) und 10).}$$

Aus 5) und 6) folgt: $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$ und $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$, und diese Werthe für $\cos b$ und $\cos c$ in 1) gesetzt, geben:

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C, \text{ d. i. Gleich. 4).}$$

§. 35.

Die Gleichung $\cos a = \cos b \cdot \cos c$ im vorstehenden Paragraphen liefert den Satz: wenn in dem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck die Hypotenuse a spitz (kleiner als 90°) ist, so müssen die beiden Katheten b und c entweder beide spitz (kleiner als 90°) oder stumpf (grösser als 90°) sein, wie schon auf anderm Wege in §. 18. IX. gezeigt ist. Denn es ist, wenn $a < 90°$, $\cos a$ positiv, folglich muss auch $\cos b \cdot \cos c$ positiv werden; dieses wird aber nur dann der Fall sein, wenn b und c entweder beide grösser oder kleiner als 90° sind.

Wenn a stumpf ist, so wird $\cos a$ negativ, und dann muss auch $\cos b \cdot \cos c$ negativ sein; dieses ist aber nur dann der Fall, wenn entweder b stumpf und c spitz, oder b spitz und c stumpf ist. Dieses liefert den Satz: ist die Hypotenuse stumpf, so muss die eine Kathete spitz, die andere stumpf sein.

§. 36.

So elegant die Gleichungen in den §§. 29., 31., 32. und 33. auch sind und obgleich sie ausserdem zu erkennen geben, ob das gefundene Stück kleiner oder grösser als 90° ist, welche Eigenschaft die Gleichungen in

§. 20. nicht haben, so sind erstere für den Gebrauch der Logarithmen doch nicht bequem und bedürfen hierzu noch einiger Umformungen, wodurch Zähler und Nenner in Factoren zerlegt werden. Gewöhnlich wird jeder Gleichung in den eben erwähnten Paragraphen eine logarithmische Gestalt gegeben; hier aber sollen nur die Gleichungen in den §§. 29. und 31. logarithmisch gemacht und aus den so erhaltenen Gleichungen für die in den §§. 32. und 33. angeführten Fälle logarithmische Gleichungen abgeleitet werden.

Die Gleichung

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (§. 29.)$$

wenn zu $1 = 1$ addirt, liefert:

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$= \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$= \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \cdot \sin c},$$

und da $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$ (§. 7. No. 53.)
und $\cos a - \cos (b+c) = 2 \sin \frac{1}{2} (a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2} (b+c-a)$ (§. 7. No. 26.),
so ergiebt sich:

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2} (b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c},$$

oder:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a).$$

Subtrahirt man aber die obige Gleichung von $1 = 1$, so erhält man:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$= \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$= \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c},$$

oder:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2} (a+c-b)}{\sin b \cdot \sin c},$$

oder:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b).$$

Dividirt man Gleichung (b) durch (a), so hat man

$$\tan \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}} \quad \ldots\ldots \quad (c).$$

Jede der Gleichungen (a), (b), (c) lässt sich in einem sphärischen Dreieck dreifach ansetzen, wodurch, wenn man der Kürze wegen $\frac{a+b+c}{2} = s$ setzt, folgendes System von Gleichungen entsteht:

$$(1) \ldots\ldots \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s - a)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

$$(2) \ldots \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}},$$

$$(3) \ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}},$$

$$(4) \ldots \cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin c}},$$

$$(5) \ldots \sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin c}},$$

$$(6) \ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-b)}},$$

$$(7) \ldots \cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}},$$

$$(8) \ldots \sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}},$$

$$(9) \ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin s\cdot\sin(s-c)}}.$$

§. 37.

Wenn man die vierte Gleichung in §. 31. zu $1 = 1$ addirt, so hat man:

$$1 + \cos a = 1 + \frac{\cos A + \cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C},$$

$$= \frac{\sin B\cdot\sin C + \cos A + \cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C},$$

$$= \frac{\cos A + \cos(B - C)}{\sin B\cdot\sin C}.$$

Es ist aber $1 + \cos a = 2\cos^2\tfrac{1}{2}a$ (§. 7. No. 70.)
$\cos A + \cos(B - C) = 2\cos\tfrac{1}{2}(A + B - C)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(A + C - B)$ (§. 7. No. 25.), folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\cdot\sin C}} \quad . . (a).$$

Subtrahirt man die vierte Gleichung in §. 31. von $1 = 1$, so erhält man:

$$1 - \cos a = 1 - \frac{\cos A + \cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C},$$

$$= \frac{\sin B\cdot\sin C - \cos A - \cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C},$$

$$= \frac{-[\cos A + \cos(B + C)]}{\sin B\cdot\sin C},$$

folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\cdot\sin C}} \quad (b).$$

Dividirt man (b) durch (a), so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}} \quad (c).$$

Die Gleichungen (b) und (c) werden durch das Minuszeichen des Zählers unter dem Wurzelzeichen nicht imaginair, weil $\frac{1}{2}(A + B + C) > 90^\circ$ und $< 270^\circ$ sein muss, und der Cosinus der Winkel im II. und III. Quadranten immer negativ ist. Jede der Gleichungen (a), (b), (c) lässt sich im sphärischen Dreieck dreifach ansetzen, und wenn man hierbei der Kürze wegen $\frac{1}{2}(A + B + C) = S$ setzt, so gelangt man zu dem folgenden System von Gleichungen:

$$(1) \ldots\ldots \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cdot\cos(S-C)}{\sin B\cdot\sin C}},$$

$$(2) \ldots\ldots \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-A)}{\sin B\cdot\sin C}},$$

$$(3) \ldots\ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cdot\cos(S-C)}},$$

$$(4) \ldots\ldots \cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin C}},$$

$$(5) \ldots\ldots \sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin C}},$$

$$(6) \ldots\ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cdot\cos(S-C)}},$$

$$(7) \ldots\ldots \cos\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin B}},$$

$$(8) \ldots\ldots \sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin B}},$$

$$(9) \ldots\ldots \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)}}.$$

§. 38.

Wenn man die Gleichungen im §. 36., nämlich (1) und (4), (2) und (5), (1) und (5), (2) und (4), mit einander multiplicirt, so liefert dies:

$$1) \ldots \cos\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin s}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}},$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin s}{\sin c}\cdot\sin\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

$$2) \ldots \sin\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}},$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\cdot\sin\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

$$3) \ldots \cos\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}},$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

$$4) \ldots \sin\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}},$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (4).$$

Addirt man nun (1) und (2), so erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = [\sin s + \sin(s-c)]\cdot\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin c},$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(s+s-c)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(s-s+c)}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cdot\cos\tfrac{1}{2}c}\cdot\sin\tfrac{1}{2}C$$

(§. 7. No. 23. und No. 43.),

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\cdot\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (a).$$

Subtrahirt man (2) von (1), so ergiebt sich:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = [\sin s - \sin(s-c)]\cdot\frac{\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin c},$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(s+s-c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(s-s+c)}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cdot\cos\tfrac{1}{2}c}\cdot\sin\tfrac{1}{2}C,$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (b).$$

Addirt man (4) und (3), so erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = [\sin(s-b) + \sin(s-a)]\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin c},$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(s-b+s-a)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(s-b-s+a)}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cdot\cos\tfrac{1}{2}c}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cdot\cos\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (c).$$

Subtrahirt man (3) von (4), so ergiebt sich:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cdot\cos\tfrac{1}{2}B - \cos\tfrac{1}{2}A\cdot\sin\tfrac{1}{2}B = [\sin(s-b) - \sin(s-a)]\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin c},$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(s-b+s-a)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(s-b-s+a)}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cdot\cos\tfrac{1}{2}c}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cdot\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cdot\cos\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (d).$$

Die Gleichungen (a), (b), (c), (d) sind die Gaussischen, und jede derselben lässt sich auf ein sphärisches Dreieck dreifach anwenden.

§. 39.

Aus den Gaussischen Gleichungen ergeben sich die Napier'schen. Dividirt man nämlich im §. 38. die Gleichungen (d) durch (a), (c) durch (b), (d) durch (c) und (a) durch (b), so erhält man:

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (1)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (2)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \quad \ldots \ldots \ldots (4).$$

Jede von diesen Gleichungen kann auf ein sphärisches Dreieck dreifach angewandt werden.

Sie enthalten der Reihe nach folgende Sätze:

I. Der Sinus der halben Summe zweier Seiten verhält sich zum Sinus der halben Differenz derselben, wie die Cotangente des halben von ihnen eingeschlossenen Winkels zur Tangente der halben Differenz der beiden andern Winkel.

II. Der Cosinus der halben Summe zweier Seiten verhält sich zum Cosinus der halben Differenz derselben, wie die Cotangente des halben von ihnen eingeschlossenen Winkels zur Tangente der halben Summe der beiden andern Winkel.

III. Der Sinus der halben Summe zweier Winkel verhält sich zum Sinus der halben Differenz derselben, wie die Tangente der halben zwischen ihnen liegenden Seite zur Tangente der halben Differenz der beiden andern Seiten.

IV. Der Cosinus der halben Summe zweier Winkel verhält sich zum Cosinus der halben Differenz derselben, wie die Tangente der halben zwischen ihnen liegenden Seite zur Tangente der halben Summe der beiden andern Seiten.

Nach den Gleichungen (1) und (2) kann man aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die beiden andern Winkel des Dreiecks berechnen, und sind diese Gleichungen hierzu bequemer als die in §. 33. Nach den Gleichungen (3) und (4) kann man aus zwei Winkeln und der zwischen ihnen liegenden Seite die beiden andern Seiten des Dreiecks finden. Auch diese sind hierzu viel bequemer als die Gleichungen in §. 32.

§. 40.

Aus den vier Gleichungen in §. 39. ergeben sich unmittelbar die folgenden:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \quad \ldots \ldots \ldots (4).$$

Jede dieser Gleichungen kann im sphärischen Dreieck dreifach angesetzt werden. Sie enthalten die Sätze, nach welchen man die dritte Seite oder den dritten Winkel finden kann, wenn im sphärischen Dreieck zwei Seiten und die diesen gegenüberliegenden Winkel gegeben sind.

Wenn man zu den Gleichungen in den §§. 36., 37., 39., 40. noch die in den §§. 20. und 34. nimmt, so wird man alles zur Auflösung der sphärischen schiefwinkligen und rechtwinkligen Dreiecke Erforderliche beisammen haben.

§. 41.

Von der Auflösung der sphärischen schiefwinkligen Dreiecke.

Bei der Berechnung sphärischer schiefwinkliger Dreiecke, deren Winkel und Seiten wie bisher mit A, B, C und a, b, c bezeichnet werden sollen, können folgende sechs Fälle vorkommen:

1. Aus den drei Seiten die drei Winkel zu finden.

 Hierzu dienen die Gleichungen in §. 36., und am genauesten werden die Winkel nach der 3., 6. und 9. Gleichung gefunden.

2. Aus den drei Winkeln die drei Seiten zu finden.

 Dieses kann nach den Gleichungen in §. 37. geschehen, und am genauesten werden die Seiten nach der 3., 6. und 9. Gleichung gefunden.

3. Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die beiden andern Winkel und die dritte Seite zu finden.

 Die halbe Summe und halbe Differenz der beiden unbekannten Winkel kann durch die Gleichungen (1) und (2), oder durch die Sätze I. und II. §. 39. gefunden werden, und aus denselben die beiden Winkel. Die dritte Seite wird demnächst nach der Gleichung (3) oder (4) in §. 40. gefunden werden können.

4. Aus zwei Winkeln und der zwischen ihnen liegenden Seite die beiden andern Seiten und den dritten Winkel zu finden.

 Die halbe Differenz und halbe Summe der beiden unbekannten Seiten kann nach den Gleichungen (3) und (4), oder nach den Sätzen III. und IV. in §. 39. gefunden werden, und demnächst die Seiten selbst. Der dritte Winkel wird dann durch die Gleichung (1) oder (2) in §. 40. gefunden werden können.

5. Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel die beiden andern Winkel und die dritte Seite zu finden.

 Zuerst suche man nach der Sinusregel den andern Gegenwinkel, demnächst unter Benutzung dieses Winkels nach den Gleichungen in §. 40. die fehlenden Stücke.

6. Aus zwei Winkeln und einer Gegenseite die beiden andern Seiten und den dritten Winkel zu finden.

 Auch hier suche man zuerst nach der Sinusregel die andere Gegenseite, und demnächst mit diesen vier bekannten Stücken nach den Gleichungen in §. 40. die fehlenden Stücke.

Da nach §. 18. die Seiten und Winkel der hier betrachteten Dreiecke kleiner als $180°$ sind, so kann in den vorstehenden vier ersten Fällen keine Zweideutigkeit stattfinden. Denn es ist die Wurzelgrösse der im ersten und zweiten Falle gebrauchten Gleichungen die trigonometrische Function einer halben Seite oder eines halben Winkels, also immer positiv. Ferner bestimmen die gegebenen Stücke der im dritten und vierten Falle benutzten Gleichungen das Zeichen der Tangente der gesuchten Grösse, folglich auch diese selbst. Es muss nämlich immer in diesen Gleichungen $\tang \frac{1}{2}(A+B)$ mit $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ und $\tang \frac{1}{2}(a+b)$ mit $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ von gleichem Zeichen sein.

Der im fünften und sechsten Falle nach der Sinusregel gefundene Gegenwinkel, resp. Gegenseite, kann spitz oder stumpf, oder beides sein, weil der Sinus des gefundenen Stücks allein hierüber nicht entscheidet. Denn, ist a, b und A gegeben, so sucht man nach $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$

den Gegenwinkel B, der kleiner oder grösser als 90°, oder auch beides sein kann, wenn man nicht auf andere Weise zu bestimmen vermag, welcher Werth genommen werden muss. Die vorstehende Proportion, welche die Gleichung liefert:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B},$$

woraus weiter folgt:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)}$$

(§. 7. No. 35.) entscheidet hierüber. Denn es ist nach §. 18. $\frac{1}{2}(a-b) < 90°$ und auch $\frac{1}{2}(A-B) < 90°$, folglich sind die Nenner dieser letzten Gleichung immer positiv; sind aber die Nenner immer von gleichen Zeichen, so müssen auch die Zähler dieser Gleichung gleiche Zeichen haben. Dieses wird der Fall sein, wenn $\frac{1}{2}(a+b) \lessgtr 90°$, alsdann auch $\frac{1}{2}(A+B) \lessgtr 90°$ ist. Genügt dieser Bedingung nur der spitze oder der stumpfe Werth von B, so kann man mit den drei gegebenen Stücken a, b, A nur ein Dreieck construiren; genügen aber beide Werthe von B, so können mit diesen drei gegebenen Stücken zwei verschiedene Dreiecke construirt werden. Im ersten Falle sagt man, das Dreieck ist bestimmt, im andern, es ist zweideutig.

In dem folgenden Paragraphen ist nun ein Beispiel von jedem der sechs vorhergehenden Fälle eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks berechnet.

§. 42.

Beispiel 1. Im sphärischen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben: $a = 89° 21' 37''$; $b = 97° 18' 39''$; $c = 86° 53' 46''$; wie gross sind die fehlenden Stücke?

Um A zu finden, hat man nach §. 36.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-a)}},$$

$a =$	89° 21′ 37″		
$b =$	97° 18′ 39″		
$c =$	86° 53′ 46″		
	273° 34′ 2″		
$s =$	136° 47′ 1″	c. lg sin =	0,164464
$s - a =$	47° 25′ 24″	c. lg sin =	0,132903
$s - b =$	39° 28′ 22″	lg sin =	9,803260 — 10
$s - c =$	49° 53′ 15″	lg sin =	9,883537 — 10
			19,984164 — 20
$\frac{1}{2} A =$	44° 28′ 40″	lg tg =	9,992082 — 10
$A =$	88° 57′ 20″.		

Um B und C durch den Cosinus und Sinus zu finden, hat man nach demselben Paragraphen:

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin c}},$$

$$\begin{array}{rlrl}
a = & 89^\circ\ 21'\ 37'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}000028 \\
c = & 86^\circ\ 53'\ 46'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}000638 \\
s = & 136^\circ\ 47'\ 1'' & \lg\sin = & 9{,}835536 - 10 \\
s - b = & 39^\circ\ 28'\ 22'' & \lg\sin = & 9{,}803260 - 10 \\
\hline
 & & & 19{,}639462 - 20 \\
\hline
\frac{1}{2}B = & 48^\circ\ 40'\ 42'' & \lg\cos = & 9{,}819731 - 10 \\
B = & 97^\circ\ 21'\ 24''. & &
\end{array}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}},$$

$$\begin{array}{rlrl}
a = & 89^\circ\ 21'\ 37'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}000028 \\
b = & 97^\circ\ 18'\ 39'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}003546 \\
s - a = & 47^\circ\ 25'\ 24'' & \lg\sin = & 9{,}867097 - 10 \\
s - b = & 39^\circ\ 28'\ 22'' & \lg\sin = & 9{,}803260 - 10 \\
\hline
 & & & 19{,}673931 - 20 \\
\hline
\frac{1}{2}C = & 43^\circ\ 23'\ 39'' & \lg\sin = & 9{,}836965 - 10 \\
C = & 86^\circ\ 47'\ 18''. & &
\end{array}$$

Beispiel 2. Im sphärischen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben: $A = 71^\circ\ 33'\ 30''$; $B = 57^\circ\ 53'\ 55''$; $C = 77^\circ\ 22'\ 21''$; die Seiten zu finden.

Zur Bestimmung von c, a und b hat man in §. 37. der Reihe nach die verschiedenen Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)}},$$

$$\begin{array}{rlrl}
C = & 77^\circ\ 22'\ 21'' & & \\
B = & 57^\circ\ 53'\ 55'' & & \\
A = & 71^\circ\ 33'\ 30'' & & \\
\hline
 & 206^\circ\ 49'\ 46'' & & \\
\hline
S = & 103^\circ\ 24'\ 53'' & \lg-\cos = & 9{,}365484 - 10 \\
S - C = & 26^\circ\ 2'\ 32'' & \lg\ \ \cos = & 9{,}953504 - 10 \\
S - B = & 45^\circ\ 30'\ 58'' & c.\ \lg\cos = & 0{,}154463 \\
S - A = & 31^\circ\ 51'\ 23'' & c.\ \lg\cos = & 0{,}070901 \\
\hline
 & & & 19{,}544352 - 20 \\
\frac{1}{2}c = & 30^\circ\ 37'\ 2'' & \lg\operatorname{tg} = & 9{,}772176 - 10 \\
c = & 61^\circ\ 14'\ 4''; & &
\end{array}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-A)}{\sin B\cdot\sin C}},$$

$$\begin{array}{rlrl}
B = & 57^\circ\ 53'\ 55'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}072061 \\
C = & 77^\circ\ 22'\ 21'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}010634 \\
S = & 103^\circ\ 24'\ 53'' & \lg-\cos = & 9{,}365484 - 10 \\
S - A = & 31^\circ\ 51'\ 23'' & \lg\ \ \cos = & 9{,}929099 - 10 \\
\hline
 & & & 19{,}377278 - 20 \\
\frac{1}{2}a = & 29^\circ\ 13'\ 31'' & \lg\sin = & 9{,}688639 - 10 \\
a = & 58^\circ\ 27'\ 2''; & &
\end{array}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin C}},$$

$$\begin{array}{rlll}
A = & 71^\circ\ 33'\ 30'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}022896 \\
C = & 77^\circ\ 22'\ 21'' & c.\ \lg\sin = & 0{,}010634 \\
S-A = & 31^\circ\ 51'\ 23'' & \lg\cos = & 9{,}929099-10 \\
S-C = & 26^\circ\ \ 2'\ 32'' & \lg\cos = & 9{,}953504-10 \\
 & & & 19{,}916133-20 \\
\tfrac{1}{2}b = & 24^\circ\ 46'\ 30'' & \lg\cos = & 9{,}958067-10 \\
b = & 49^\circ\ 33'\ \ 0''. & &
\end{array}$$

Beispiel 3. Im sphärischen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben: $b = 118^\circ\ 2'\ 14''$; $c = 120^\circ\ 18'\ 33''$; $A = 27^\circ\ 22'\ 34''$; wie gross ist das Uebrige?

Um die Winkel B und C zu finden, hat man nach §. 39. die Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C-B) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C+B) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}(c+b)},$$

$$C = \tfrac{1}{2}(C+B)+\tfrac{1}{2}(C-B),$$
$$B = \tfrac{1}{2}(C+B)-\tfrac{1}{2}(C-B).$$

$$\begin{array}{rlll}
c = & 120^\circ\ 18'\ 33'' & & \\
b = & 118^\circ\ \ 2'\ 14'' & & \\
\tfrac{1}{2}(c+b) = & 119^\circ\ 10'\ 23{,}''5 & c.\lg\sin = 0{,}058911\ \ldots & c.\ \lg\cos = 0{,}312069n \\
\tfrac{1}{2}(c-b) = & 1^\circ\ \ 8'\ \ 9{,}''5 & \lg\sin = 8{,}297217-10 & \lg\cos = 9{,}999915-10 \\
\tfrac{1}{2}A = & 13^\circ\ 41'\ 17'' & \lg\operatorname{cotg} = 0{,}613407\ \ldots & \lg\operatorname{cotg} = 0{,}613407 \\
\tfrac{1}{2}(C-B) = & 5^\circ\ 19'\ 33{,}''7 & \lg\operatorname{tang} = 9{,}969535-10 & \\
\tfrac{1}{2}(C+B) = & 96^\circ\ 46'\ 18{,}''5 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \lg\operatorname{tang} = 0{,}925391n \\
C = & 102^\circ\ \ 5'\ 52'' & & \\
B = & 91^\circ\ 26'\ 45''. & &
\end{array}$$

Zur Berechnung von a hat man die Formeln:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(C+B)}{\sin\frac{1}{2}(C-B)},$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B)}{\cos\frac{1}{2}(C-B)}.$$

$$\begin{array}{rlrl}
c.\ \lg\sin\tfrac{1}{2}(C-B) = & 1{,}032345 & c.\ \lg\cos\tfrac{1}{2}(C-B) = & 0{,}001879 \\
\lg\sin\tfrac{1}{2}(C+B) = & 9{,}996959-10 & \lg\cos\tfrac{1}{2}(C+B) = & 9{,}071570-10n \\
\lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b) = & 8{,}297302-10 & \lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b) = & 0{,}253158n \\
\lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\ \ldots = & 9{,}326606-10 & \lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\ \ldots = & 9{,}326607-10 \\
\tfrac{1}{2}a = & 11^\circ\ 58'\ 36'' & & \\
a = & 23^\circ\ 57'\ 12''. & &
\end{array}$$

Beispiel 4. Im sphärischen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben: $a = 74^\circ\ 16'\ 0''$; $B = 46^\circ\ 34'\ 0''$; $C = 81^\circ\ 20'\ 0''$; die fehlenden Stücke zu finden.

Um c und b zu finden, hat man nach §. 39. die Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(C-B)}{\cos\frac{1}{2}(C+B)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(C-B)}{\sin\frac{1}{2}(C+B)},$$

$$c = \tfrac{1}{2}(c+b)+\tfrac{1}{2}(c-b),$$
$$b = \tfrac{1}{2}(c+b)-\tfrac{1}{2}(c-b).$$

$$
\begin{array}{rll}
C = 81^\circ\ 20'\ 0'' & & \\
B = 46^\circ\ 34'\ 0'' & & \\
\hline
\tfrac{1}{2}(C+B) = 63^\circ\ 57'\ 0'' & c.\ \lg\cos = 0{,}357382\ \ldots\ldots & c.\ \lg\sin = 0{,}046525 \\
\tfrac{1}{2}(C-B) = 17^\circ\ 23'\ 0'' & \lg\cos = 9{,}979697 - 10 & \lg\sin = 9{,}475327 - 10 \\
\tfrac{1}{2}a = 37^\circ\ 8'\ 0'' & \lg\operatorname{tang} = 9{,}879216 - 10 & \lg\operatorname{tang} = 9{,}879216 - 10 \\
\hline
\tfrac{1}{2}(c+b) = 58^\circ\ 42'\ 43'' & \lg\operatorname{tang} = 0{,}216295 & \\
\tfrac{1}{2}(c-b) = 14^\circ\ 8'\ 1'' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \lg\operatorname{tang} = 9{,}401068 - 10 \\
\hline
c = 72^\circ\ 50'\ 44'' & & \\
b = 44^\circ\ 34'\ 42''. & &
\end{array}
$$

Zur Bestimmung von A hat man die Gleichungen:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C-B)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)}{\sin\frac{1}{2}(c-b)},$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C+B)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(c+b)}{\cos\frac{1}{2}(c-b)}.$$

$$
\begin{array}{rl}
c.\ \lg\sin\tfrac{1}{2}(c-b) = 0{,}612283\ \ldots\ldots & c.\ \lg\cos\tfrac{1}{2}(c-b) = 0{,}013349 \\
\lg\sin\tfrac{1}{2}(c+b) = 9{,}931746 - 10 & \lg\cos\tfrac{1}{2}(c+b) = 9{,}715453 - 10 \\
\lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C-B) = 9{,}495630 - 10 & \lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C+B) = 0{,}310857 - 10 \\
\hline
\lg\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = 0{,}039659 & \lg\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = 0{,}039659 \\
\tfrac{1}{2}A = 42^\circ\ 23'\ 15'' & \\
A = 84^\circ\ 46'\ 30''. &
\end{array}
$$

Beispiel 5. Im sphärischen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben: $B = 76^\circ\ 10'\ 0''$; $c = 115^\circ\ 30'\ 0''$; $b = 70^\circ\ 40'\ 0''$; wie gross sind die fehlenden Stücke?

C wird berechnet nach:

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C.$$

$$
\begin{array}{r}
c.\ \lg\sin b = 0{,}025208 \\
\lg\sin c = 9{,}955488 - 10 \\
\lg\sin B = 9{,}987217 - 10 \\
\hline
\lg\sin C = 9{,}967913 - 10 \\
C = \begin{matrix} 68^\circ\ 14'\ 44'' \\ 111^\circ\ 45'\ 16''. \end{matrix}
\end{array}
$$

Da bei diesem Beispiele $\frac{1}{2}(c+b) > 90^\circ$, so muss auch nach §. 41. $\frac{1}{2}(C+B) > 90^\circ$ sein; dieser Bedingung genügt aber nur der zweite (stumpfe) Werth von C, folglich ist mit den gegebenen Stücken nur ein Dreieck möglich, und $C = 111^\circ\ 45'\ 16'$.

Zur Berechnung von a hat man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(C+B)}{\sin\frac{1}{2}(C-B)},$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B)}{\cos\frac{1}{2}(C-B)}.$$

$$
\begin{array}{rr}
c = 115^\circ\ 30'\ 0'' & C = 111^\circ\ 45'\ 16'' \\
b = 70^\circ\ 40'\ 0'' & B = 76^\circ\ 10'\ 0'' \\
\hline
\tfrac{1}{2}(c+b) = 93^\circ\ 5'\ 0'' & \tfrac{1}{2}(C+B) = 93^\circ\ 57'\ 38'' \\
\tfrac{1}{2}(c-b) = 22^\circ\ 25'\ 0'' & \tfrac{1}{2}(C-B) = 17^\circ\ 47'\ 38''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
c.\ \lg\sin\tfrac{1}{2}(C-B) = 0{,}514857 & c.\ \lg\cos\tfrac{1}{2}(C-B) = 0{,}021289 \\
\lg\sin\tfrac{1}{2}(C+B) = 9{,}998962 - 10 & \lg\cos\tfrac{1}{2}(C+B) = 8{,}839281 - 10n \\
\lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b) = 9{,}615435 - 10 & \lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b) = 1{,}268683 - 10n \\
\hline
\lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\ \ldots = 0{,}129254 & \lg\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\ \ldots = 0{,}129253 \\
\tfrac{1}{2}a = 53^\circ\ 24'\ 10{,}''6 & \\
a = 106^\circ\ 48'\ 21''. &
\end{array}
$$

Zur Berechnung von A dienen die Gleichungen:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C-B)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)}{\sin\frac{1}{2}(c-b)},$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C+B)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(c+b)}{\cos\frac{1}{2}(c-b)}.$$

$c.\ \lg\sin\frac{1}{2}(c-b) = 0{,}418688$	$c.\ \lg\cos\frac{1}{2}(c-b) = 0{,}034124$
$\lg\sin\frac{1}{2}(c+b) = 9{,}999371-10$	$\lg\cos\frac{1}{2}(c+b) = 8{,}730688-10n$
$\lg\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C-B) = 9{,}506432-10$	$\lg\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C+B) = 1{,}159680n$
$\lg\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A \ldots = 9{,}924491-10$	$\lg\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A \ldots = 9{,}924492-10$
$\frac{1}{2}A = 49^\circ\ 57'\ 21{,}''4$	
$A = 99^\circ\ 54'\ 43''.$	

Beispiel 6. Im sphärischen schiefwinkligen Dreieck ABC ist gegeben: $A = 81^\circ\ 38'\ 17''$; $B = 70^\circ\ 9'\ 38''$; $b = 64^\circ\ 46'\ 32''$; wie gross sind die übrigen Stücke?

a wird gefunden nach:

$$\sin B : \sin A = \sin b : \sin a.$$

$$\begin{aligned} c.\ \lg\sin B &= 0{,}026573 \\ \lg\sin A &= 9{,}995358-10 \\ \lg\sin b &= 9{,}956479-10 \\ \lg\sin a &= 9{,}978410-10 \\ a &= \begin{cases} 72^\circ\ 4'\ 59'' \\ 107^\circ\ 55'\ 1''. \end{cases} \end{aligned}$$

Da bei diesem Beispiel $\frac{1}{2}(A+B) < 90^\circ$, so muss auch $\frac{1}{2}(a+b) < 90^\circ$ sein. Dieser Bedingung genügen hier beide Werthe von a, folglich kann man mit den gegebenen drei Stücken zwei verschiedene Dreiecke construiren und deshalb müssen auch C und c zwei verschiedene Werthe haben.

Zur Bestimmung von C hat man die Gleichungen:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}.$$

$A = 81^\circ\ 38'\ 17''$
$B = 70^\circ\ 9'\ 38''$
$\frac{1}{2}(A+B) = 75^\circ\ 53'\ 57{,}''5$ $\lg\operatorname{tang} = 0{,}599988$
$\frac{1}{2}(A-B) = 5^\circ\ 44'\ 19{,}''5$ $\lg\operatorname{tang} = 9{,}002150-10$

$a = 72^\circ\ 4'\ 59''$	$a = 107^\circ\ 55'\ 1''$
$b = 64^\circ\ 46'\ 32''$	$b = 64^\circ\ 46'\ 32''$
$\frac{1}{2}(a+b) = 68^\circ\ 25'\ 45''$ $\lg\sin = 9{,}968466-10$	$\frac{1}{2}(a+b) = 86^\circ\ 20'\ 46{,}''5$ $\lg\cos = 8{,}804312-10$
$\frac{1}{2}(a-b) = 3^\circ\ 39'\ 13''$ $c.\ \lg\sin = 1{,}195688$	$\frac{1}{2}(a-b) = 21^\circ\ 34'\ 14{,}''5$ $c.\ \lg\cos = 0{,}031534$
$\lg\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C = 0{,}166304$	$\lg\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C = 9{,}435834-10$
$\frac{1}{2}C = 34^\circ\ 17'\ 18{,}''5$	$\frac{1}{2}C = 74^\circ\ 44'\ 29''$
$C = 68^\circ\ 34'\ 37''.$	$C = 149^\circ\ 28'\ 58''.$

Zur Bestimmung von c hat man die Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}.$$

$c.\ \lg\cos\frac{1}{2}(A-B) = 0{,}002182$	$c.\ \lg\sin\frac{1}{2}(A-B) = 1{,}000032$
$\lg\cos\frac{1}{2}(A+B) = 9{,}386725-10$	$\lg\sin\frac{1}{2}(A+B) = 9{,}986713-10$
$\lg\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b) = 0{,}403031$	$\lg\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = 9{,}596969-10$
$\lg\operatorname{tang}\frac{1}{2}c \ldots = 9{,}791938-10$	$\lg\operatorname{tang}\frac{1}{2}c \ldots = 0{,}583714$
$\frac{1}{2}c = 31^\circ\ 46'\ 19{,}''7$	$\frac{1}{2}c = 75^\circ\ 23'\ 0{,}''7$
$c = 63^\circ\ 32'\ 39''.$	$c = 150^\circ\ 46'\ 1''.$

§. 43.

Beispiele zur Uebung.

In den folgenden schiefwinkligen sphärischen Dreiecken, deren Seiten und Winkel mit a, b, c und A, B, C bezeichnet sind, ist

	gegeben:			gefunden:		
1)	$c = 80° 12' 21''$	$a = 50° 36' 39''$	$B = 68° 40' 26''$	$b = 67° 21' 40''$	$A = 51° 15' 50''$	$C = 95° 58' 3''$
2)	$b = 100° 21' 30''$	$a = 97° 18' 22''$	$B = 100° 28' 48''$	$c = 19° 22' 2''$ / $90° 16' 14''$	$C = 19° 21' 34''$ / $91° 37' 14''$	$A = 82° 31' 18''$ / $97° 28' 42''$
3)	$A = 59\ 29\ 6$	$B = 54\ 39\ 32$	$c = 68\ 32\ 46$	$C = 92\ 6\ 6$	$b = 49\ 26\ 21$	$a = 53\ 21\ 17$
4)	$c = 110\ 0\ 0$	$a = 116\ 0\ 0$	$b = 116\ 0\ 0$	$A = 134\ 9\ 4$	$B = 134\ 9\ 4$	$C = 131\ 23\ 47$
5)	$c = 53\ 16\ 32$	$a = 48\ 26\ 39$	$b = 51\ 36\ 30$	$A = 62\ 18\ 11$	$B = 68\ 1\ 56$	$C = 71\ 30\ 36$
6)	$c = 86\ 12\ 52$	$a = 79\ 38\ 21$	$b = 58\ 39\ 16$	$A = 80\ 10\ 6$	$B = 58\ 48\ 36$	$C = 91\ 52\ 45$
7)	$B = 80\ 20\ 0$	$c = 65\ 15\ 0$	$b = 72\ 30\ 0$	$a = 67\ 34\ 6$	$A = 72\ 49\ 47$	$C = 69\ 50\ 0$
8)	$A = 68\ 0\ 0$	$c = 60\ 0\ 0$	$C = 74\ 10\ 0$	$B = 66\ 11\ 0$	$a = 56\ 34\ 39$	$b = 55\ 26\ 20$
9)	$A = 54\ 30\ 0$	$c = 96\ 0\ 0$	$C = 124\ 5\ 0$	$B = 25\ 37\ 22$	$b = 31\ 16\ 59$	$a = 77\ 50\ 42$
10)	$B = 36\ 10\ 0$	$c = 44\ 5\ 0$	$C = 62\ 30\ 0$	$a = 51\ 34\ 36$	$b = 27\ 34\ 18$	$A = 92\ 43\ 13$
11)	$B = 46\ 50\ 0$	$c = 100\ 5\ 0$	$C = 115\ 45\ 0$	$a = 74\ 43\ 6$	$A = 61\ 56\ 42$	$b = 52\ 52\ 14$
12)	$A = 97\ 20\ 0$	$c = 115\ 10\ 0$	$a = 95\ 30\ 0$	$B = 95\ 31\ 33$	$C = 115\ 36\ 4$	$b = 92\ 38\ 10$
13)	$A = 127\ 30\ 0$	$c = 45\ 50\ 0$	$a = 116\ 0\ 0$	$B = 61\ 58\ 6$	$C = 39\ 17\ 3$	$b = 90\ 8\ 22$
14)	$B = 61\ 15\ 0$	$c = 78\ 0\ 0$	$a = 84\ 5\ 0$	$b = 60\ 42\ 0$	$A = 89\ 54\ 38$	$C = 79\ 32\ 28$
15)	$B = 120\ 10\ 0$	$c = 52\ 50\ 0$	$a = 26\ 35\ 0$	$b = 68\ 50\ 3$	$C = 47\ 37\ 45$	$A = 24\ 30\ 42$
16)	$B = 99\ 10\ 0$	$c = 126\ 50\ 0$	$A = 132\ 54\ 0$	$C = 122\ 49\ 8$	$a = 135\ 45\ 34$	$b = 70\ 5\ 28$
17)	$B = 24\ 0\ 0$	$c = 121\ 30\ 0$	$A = 76\ 15\ 0$	$C = 115\ 3\ 36$	$a = 113\ 53\ 52$	$b = 22\ 30\ 35$
18)	$B = 65\ 40\ 0$	$c = 55\ 0\ 0$	$a = 83\ 30\ 0$	$C = 54\ 32\ 10$	$A = 98\ 55\ 12$	$b = 66\ 24\ 14$
19)	$B = 25\ 0\ 0$	$c = 79\ 0\ 0$	$a = 18\ 20\ 0$	$C = 152\ 7\ 45$	$A = 8\ 36\ 55$	$b = 62\ 33\ 4$
20)	$B = 71\ 15\ 0$	$c = 53\ 0\ 0$	$A = 33\ 50\ 0$	$a = 26\ 26\ 16$	$b = 49\ 13\ 8$	$C = 87\ 7\ 14$
21)	$B = 16\ 50\ 0$	$c = 54\ 0\ 0$	$A = 124\ 30\ 0$	$a = 65\ 48\ 3$	$b = 18\ 41\ 38$	$C = 46\ 58\ 2$
22)	$c = 79\ 52\ 0$	$a = 25\ 50\ 0$	$b = 66\ 50\ 0$	$B = 56\ 46\ 23$	$C = 116\ 24\ 14$	$A = 23\ 21\ 31$
23)	$A = 81\ 36\ 0$	$B = 68\ 9\ 0$	$C = 60\ 31\ 0$	$c = 53\ 28\ 16$	$a = 65\ 57\ 3$	$b = 58\ 57\ 28$
24)	$c = 64\ 26\ 0$	$A = 49\ 0\ 0$	$B = 52\ 0\ 0$	$b = 45\ 56\ 46$	$a = 43\ 29\ 48$	$C = 98\ 28\ 5$
25)	$c = 96\ 14\ 50$	$a = 93\ 27\ 34$	$b = 100\ 4\ 26$	$A = 94\ 39\ 5$	$B = 100\ 32\ 20$	$C = 96\ 58\ 36$
26)	$c = 67\ 14\ 28$	$a = 40\ 18\ 29$	$A = 34\ 22\ 17$	$b = 89\ 47\ 5$ / $36\ 19\ 49$	$C = 53\ 35\ 15$ / $126\ 24\ 45$	$B = 119\ 13\ 31$ / $31\ 8\ 0$
27)	$c = 81\ 26\ 37$	$A = 40\ 18\ 22$	$B = 67\ 3\ 29$	$a = 40\ 50\ 56$	$C = 102\ 2\ 34$	$b = 68\ 36\ 49$
28)	$c = 128\ 13\ 47$	$C = 131\ 11\ 12$	$a = 77\ 25\ 11$	$b = 84\ 29\ 22$ / $132\ 57\ 12$	$A = 69\ 13\ 58$ / $110\ 46\ 2$	$B = 72\ 28\ 40$ / $135\ 28\ 40$
29)	$c = 121\ 30\ 0$	$A = 76\ 15\ 0$	$B = 124\ 0\ 0$	$b = 132\ 25\ 46$	$a = 59\ 51\ 38$	$C = 106\ 43\ 45$
30)	$A = 91\ 50\ 0$	$B = 80\ 46\ 0$	$C = 70\ 30\ 0.$	$c = 70\ 32\ 22$	$a = 88\ 40\ 18$	$b = 80\ 51\ 10.$

§. 44.

Auflösung der sphärischen rechtwinkligen Dreiecke.

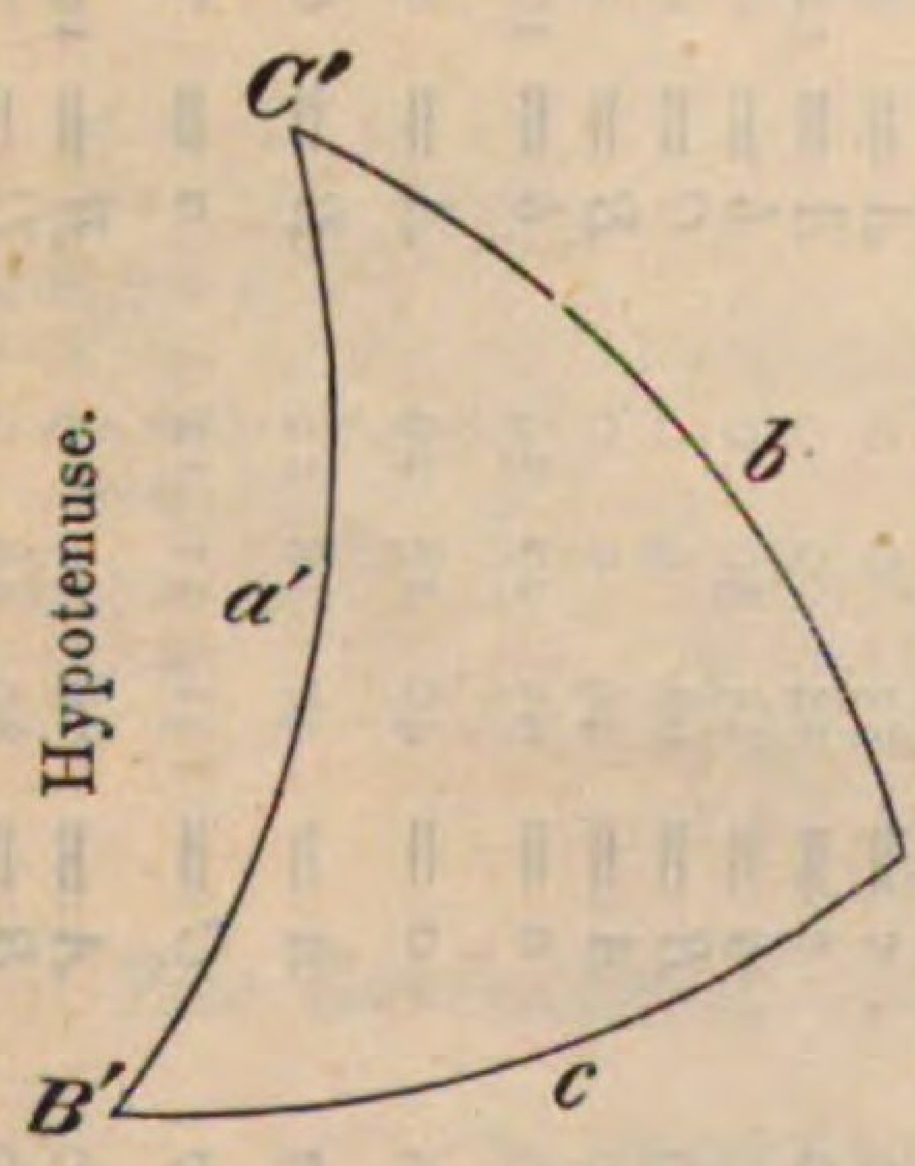
Nach den Gleichungen in §. 34. können die unbekannten Stücke sphärischer rechtwinkliger Dreiecke, wenn in denselben ausser dem rechten Winkel noch zwei Stücke gegeben sind, berechnet werden. Diese Gleichungen sich immer vergegenwärtigen zu können, ist nicht gut möglich, deshalb müssen einfache, leicht zu behaltende Regeln, wodurch man in jedem vorkommenden Falle obige Gleichungen ermitteln kann, sehr wünschenswerth sein. Napier, der Erfinder der Logarithmen, hat eine solche Regel gefunden, zu der man auf folgende Weise gelangt.

Werden zu diesem Zwecke die im §. 34. enthaltenen zehn Gleichungen wie die folgenden links stehenden geordnet, so ergeben sich aus denselben, wenn das Complement der Hypotenuse a mit a' und die Complemente der an dieser liegenden Winkel, nämlich B und C, mit B' und C' bezeichnet werden, die rechts daneben stehenden zehn Gleichungen:

1) $\cos a = \cos c \cdot \cos b$ $\sin a' = \cos c \cdot \cos b$
2) $\sin b = \sin a \cdot \sin B$ $\sin b = \cos a' \cdot \cos B'$
3) $\sin c = \sin a \cdot \sin C$ $\sin c = \cos a' \cdot \cos C'$
4) $\cos B = \cos b \cdot \sin C$ $\sin B' = \cos b \cdot \cos C'$
5) $\cos C = \cos c \cdot \sin B$ $\sin C' = \cos c \cdot \cos B'$

1) $\cos a = \cotg C \cdot \cotg B$. . . $\sin a' = \tang C' \cdot \tang B'$
2) $\sin c = \cotg B \cdot \tang b$. . . $\sin c = \tang B' \cdot \tang b$
3) $\sin b = \cotg C \cdot \tang c$. . . $\sin b = \tang C' \cdot \tang c$
4) $\cos B = \tang c \cdot \cotg a$. . . $\sin B' = \tang c \cdot \tang a'$
5) $\cos C = \tang b \cdot \cotg a$. . . $\sin C' = \tang b \cdot \tang a'$.

Die Regelmässigkeit dieser rechtsstehenden zehn Gleichungen ist nicht zu verkennen. Die rechte Seite der fünf ersten Gleichungen wird nämlich durch ein Product von Cosinussen, dieselbe Seite der fünf letzten Gleichungen durch ein Product von Tangenten gebildet, und auf der linken Seite steht in allen zehn Gleichungen nur der Sinus.



Aus nebenstehendem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, in welchem die gedachten Bezeichnungen gebraucht sind, sieht man, wenn der rechte Winkel als nicht vorhanden betrachtet wird, dass für alle zehn Gleichungen (rechts) das auf der linken Seite stehende Glied symmetrisch zwischen den beiden Stücken der rechten Seite liegt, d. h. wenn das auf der linken Seite stehende Glied unmittelbar mit einem auf der rechten Seite stehenden Gliede verbunden ist, so muss es auch mit dem andern verbunden sein, in welchem Falle man die Glieder verbunden nennt; ist es aber von dem einen der rechten Glieder durch ein zwischenliegendes Glied, welches nicht in der Gleichung vorkommt, getrennt, so muss dieses auch auf der andern Seite der Fall sein, und die Glieder der Gleichung werden in diesem Falle getrennt genannt. Hieraus folgt die nach ihrem Erfinder benannte

Napiersche Regel:

Der Sinus des Mittelstücks ist gleich dem Product der Tangenten der anliegenden (der sogenannten verbundenen), oder gleich dem Product der Cosinusse der getrennten Stücke.

Beispiel. Im sphärischen rechtwinkligen Dreieck ABC ist $B = 30^\circ\ 30'$, $c = 70^\circ\ 30'$ und $A = 90^\circ$; wie gross ist das Uebrige?

Um a zu finden, hat man nach §. 34. Gleichung 9:

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos B}{\operatorname{tang} c} = \cos B \cdot \operatorname{cotg} c.$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{cotg} c &= 9{,}549149 - 10 \\ \lg \cos B &= \underline{9{,}935320 - 10} \\ \lg \operatorname{cotg} a &= 9{,}484469 - 10 \\ a &= 73^\circ\ 1'\ 55''. \end{aligned}$$

Nach Napier's Regel hat man mit B, c und a zu thun. Diese Theile sind aneinanderliegend und B ist der mittlere Theil, folglich

$$\cos B = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} c,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{cotg} a = \cos B \cdot \operatorname{cotg} c,$$

also genau die vorige Gleichung.

Zur Berechnung von b dient Gleichung 7 in §. 34.:

$$\operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} B}{\sin c}.$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{cotg} B &= 0{,}229852 \\ c.\ \lg \sin c &= \underline{0{,}025653} \\ \lg \operatorname{cotg} b &= 0{,}255505 \\ b &= 29^\circ\ 2'\ 30''. \end{aligned}$$

Nach Napier's Vorschrift hat man es hier mit b, c und B zu thun. Diese Theile sind nicht getrennt und c ist der mittlere Theil, folglich

$$\sin c = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{tang} b,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} B}{\sin c}.$$

C wird gefunden nach:

$$\cos C = \sin B \cdot \cos c \ \ldots\ (6 \text{ in §. } 34.)$$

$$\begin{aligned} \lg \sin B &= 9{,}705469 - 10 \\ \lg \cos c &= \underline{9{,}523495 - 10} \\ \lg \cos C &= 9{,}228964 - 10 \\ C &= 80^\circ\ 14'\ 45''. \end{aligned}$$

Napier's Vorschrift zufolge hat man B, C, c zu betrachten, wovon C der mittlere Theil ist. Dies liefert, da diese Theile getrennt sind,

$$\cos C = \cos c \cdot \sin B.$$

§. 45.

Beispiele zur Uebung.

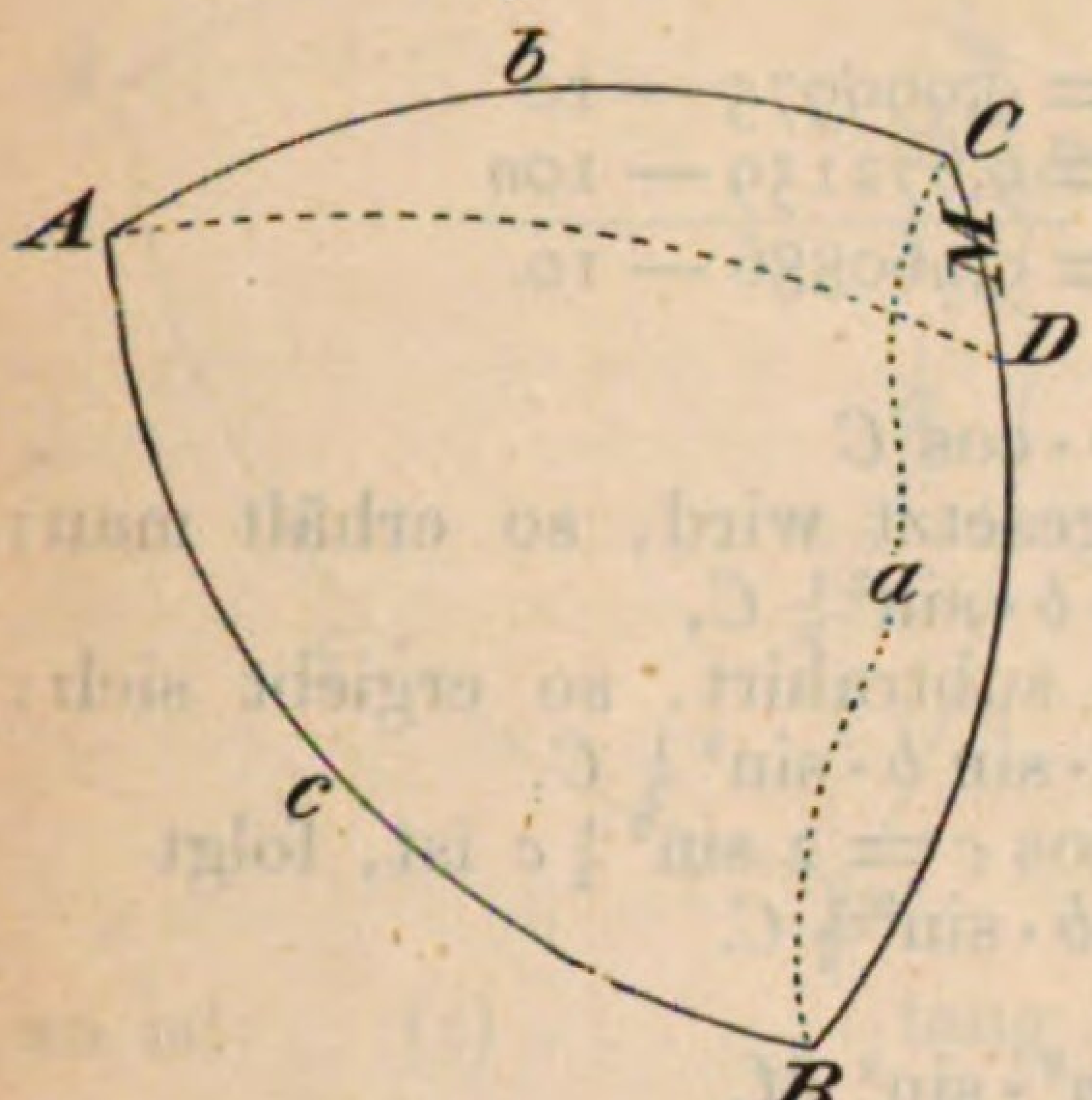
In den folgenden sphärischen, rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten und Winkel mit a, b, c und A, B, C bezeichnet sind, ist

	gegeben:			gefunden:		
1)	$c =$ 96° 50′	$a =$ 59° 15′	$B =$ 90°	$A =$ 59° 25′ 45″	$b =$ 93° 29′ 16″	$C =$ 95° 52′ 48″
2)	$c =$ 72° 15′	$C =$ 80′ 15″	$B =$ 90°	$b =$ 75° 5′ 42″ / 104° 54′ 18″	$a =$ 32° 27′ 58″ / 147° 32′ 2″	$A =$ 33° 44′ 40″ / 146° 15′ 20″
3)	$A =$ 110° 30′	$b =$ 70° 45′	$B =$ 90°	$C =$ 131 24 22	$a =$ 117 50 3	$c =$ 134 55 6
4)	$c =$ 36° 15′	$b =$ 120° 10′	$B =$ 90°	$A =$ 115 13 31	$C =$ 43 9 8	$a =$ 128 32 41
5)	$b =$ 75° 20′	$C =$ 60° 15′	$B =$ 90°	$a =$ 62 11 28	$c =$ 57 7 50	$A =$ 66 6 24
6)	$b =$ 68° 0′	$a =$ 18° 0′	$B =$ 90°	$A =$ 19 28 6	$C =$ 82 27 25	$c =$ 66 48 13
7)	$A =$ 26° 50′	$a =$ 23° 29′	$B =$ 90°	$b =$ 61 58 45 / 118 1 15	$C =$ 76 37 52 / 103 22 8	$c =$ 59 11 18 / 120 48 42
8)	$C =$ 115° 30′	$a =$ 70° 0′	$B =$ 90°	$A =$ 72 1 8	$c =$ 116 54 42	$b =$ 98 54 20
9)	$A =$ 14° 10′	$C =$ 88° 5′	$B =$ 90°	$b =$ 82 22 54	$c =$ 82 8 44	$a =$ 14 2 22
10)	$c =$ 118° 21′ 4″	$A =$ 23° 40′ 12″	$B =$ 90°	$b =$ 116 17 55	$C =$ 100 59 26	$a =$ 21 5 42
11)	$c =$ 53° 14′ 20″	$A =$ 91° 25′ 53″	$B =$ 90°	$b =$ 91 4 9	$C =$ 53 15 8	$a =$ 91 47 11
12)	$c =$ 48 24 16	$a =$ 59 38 27	$B =$ 90°	$b =$ 70 23 42	$A =$ 66 20 41	$C =$ 52 32 55
13)	$c =$ 151 23 9	$a =$ 16 35 14	$B =$ 90°	$b =$ 147 16 52	$C =$ 117 37 21	$A =$ 31 52 50
14)	$c =$ 73 4 31	$b =$ 86 12 15	$B =$ 90°	$a =$ 76 51 20	$A =$ 77 24 23	$C =$ 73 29 40
15)	$b =$ 118 32 12	$c =$ 47 26 35	$B =$ 90°	$a =$ 134 56 20	$A =$ 126 19 2	$C =$ 56 58 44
16)	$c =$ 138 25 34	$b =$ 49 27 16	$B =$ 90°	$a =$ 150 20 8	$A =$ 139 21 35	$C =$ 119 9 35
17)	$b =$ 68 14 20	$C =$ 70 21 15	$B =$ 90°	$a =$ 40 6 18	$c =$ 61 0 23	$A =$ 43 55 2
18)	$b =$ 53 25 31	$A =$ 124 26 7	$B =$ 90°	$a =$ 138 31 13	$c =$ 142 41 18	$C =$ 130 59 38
19)	$b =$ 102 15 27	$a =$ 49 13 18	$B =$ 90°	$c =$ 108 58 9	$A =$ 50 47 48	$C =$ 104 35 22
20)	$C =$ 38 14 3	$A =$ 59 20 7	$B =$ 90°	$a =$ 34 30 11	$c =$ 24 3 3	$b =$ 41 11 18
21)	$C =$ 171 4 0	$A =$ 92 6 0	$B =$ 90°	$b =$ 76 30 37	$c =$ 171 18 57	$a =$ 103 38 57
22)	$b =$ 61 3 22	$A =$ 49 28 12	$B =$ 90°	$c =$ 49 36 6	$C =$ 60 29 19	$a =$ 41 41 31
23)	$c =$ 29 12 50	$C =$ 37 26 21	$B =$ 90°	$A =$ 65 27 55 / 114 32 5	$b =$ 53 24 12 / 126 35 48	$a =$ 46 55 2 / 133 4 58
24)	$c =$ 54 21 35	$C =$ 61 2 15	$B =$ 90°	$a =$ 129 28 27 / 50 31 33	$b =$ 111 44 33 / 68 15 27	$A =$ 123 47 44 / 56 12 16
25)	$c =$ 46 18 23	$A =$ 34 27 39	$B =$ 90°	$b =$ 51 46 15	$a =$ 26 23 29	$C =$ 66 59 26
26)	$c =$ 29 41 32	$a =$ 116 30 43	$B =$ 90°	$b =$ 112 48 58	$A =$ 103 52 47	$C =$ 32 30 22
27)	$b =$ 70 45 0	$A =$ 110 30 0	$B =$ 90°,	$c =$ 134 55 8	$a =$ 117 50 3	$C =$ 131 24 21.

§. 46.

Berechnung der sphärischen schiefwinkligen Dreiecke mittelst Hülfswinkel.

Fig. 26.



Aufgabe. In dem sphärischen Dreieck ABC, Fig. 26., sei gegeben b und a, und der eingeschlossene Winkel C, die dritte Seite c zu finden.

Lösung I. Nach (I.) in §. 19. hat man für diesen Fall:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C.$$

Setzt man

$$\cos b = m \cdot \cos M$$

und

$$\sin b \cdot \cos C = m \cdot \sin M,$$

worin m eine Hülfszahl und M ein Hülfswinkel ist, so ergiebt sich:

$$(1) \; .\;.\;.\;.\; \tan M = \tan b \cdot \cos C,$$

$$(2) \; .\;.\;.\;.\; m = \frac{\cos b}{\cos M} = \frac{\sin b \cdot \cos C}{\sin M},$$

und

$$\cos c = m\,[\cos a \cdot \cos M + \sin a \cdot \sin M],$$

$$(3) \; .\;.\;.\;.\; \cos c = m \cdot \cos(a - M),$$

$$(4) \; .\;.\;.\;.\; \cos c = \frac{\cos b \cdot \cos(a - M)}{\cos M}.$$

Nach den Gleichungen (1), (2) und (3), oder nach (1) und (4) kann c durch logarithmische Rechnung gefunden werden. Der Hülfswinkel M ergiebt sich auch durch folgende geometrische Betrachtung. Fällt man nämlich in Fig. 26. von A die Normale AD auf a, so entsteht das sphärische bei D rechtwinklige Dreieck ACD, in welchem $CD = M$ und b die Hypotenuse ist. In diesem Dreieck hat man nach Gleichung (10) in §. 34.

$$\cos C = \cot b \cdot \tan M,$$

woraus folgt:

$$\tan M = \cos C \cdot \tan b \; .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{d. i. Gleichung (1).}$$

Substituirt man nun in

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

für $\cos C$ den gleichen Werth $\cot b \cdot \tan M$, so erhält man:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cot b \cdot \tan M,$$

$$= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \cos b \cdot \frac{\sin M}{\cos M},$$

$$= \frac{\cos b}{\cos M} \cdot [\cos a \cdot \cos M + \sin a \cdot \sin M],$$

$$= \frac{\cos b}{\cos M} \cdot \cos(a - M) \;\; \text{d. i. die Gleichung (4).}$$

Beispiel. Es sei $b = 118^\circ\, 2'\, 14''$, $a = 120^\circ\, 18'\, 33''$, $C = 27^\circ\, 22'\, 34''$. Um c nach den Gleichungen (1) und (4) zu finden, ist die logarithmische Rechnung:

$$
\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang} b &= 0{,}273645n \\
\lg \cos C &= 9{,}948416 - 10 \\
\hline
\lg \operatorname{tang} M &= 0{,}222061n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
M = 120^\circ\ 57'\ 5'' & c.\ \lg \cos & = 0{,}288774n \\
a = 120^\circ\ 18'\ 33'' & & \\
\hline
a - M = -0^\circ\ 38'\ 32'' & \lg \cos & = 9{,}999973 - 10 \\
 & \lg \cos b & = 9{,}672139 - 10n \\
\hline
c = 23^\circ\ 57'\ 13'' & \lg \cos & = 9{,}960886 - 10.
\end{array}
$$

Lösung II. Wenn in

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

für $\cos C$ der gleiche Werth $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$ gesetzt wird, so erhält man:

$$\cos c = \cos (a - b) - 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$

und wenn man diese Gleichung von $1 = 1$ subtrahirt, so ergiebt sich:

$$1 - \cos c = 1 - \cos (a - b) + 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$

woraus auch, weil nach (§. 7. No. 54) $1 - \cos c = 2 \sin^2 \frac{1}{2} c$ ist, folgt

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin^2 \tfrac{1}{2} (a - b) + \sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Setzt man nun

$$\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} C = m^2 \cdot \sin^2 M,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} (a - b) = m^2 \cdot \cos^2 M,$$

so ist

$$\operatorname{tang}^2 M = \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C}{\sin^2 \frac{1}{2} (a - b)},$$

oder

$$(1) \ldots\ldots \operatorname{tang} M = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} (a - b)} \cdot \sqrt{\sin a \cdot \sin b},$$

und wenn man substituirt, so wird

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = m^2 [\cos^2 M + \sin^2 M],$$

$$= m^2,$$

oder

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C}{\sin^2 M},$$

oder

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (a - b)}{\cos^2 M}.$$

Nimmt man nun aus den beiden letzten Gleichungen auf beiden Seiten die Wurzel, so erhält man

$$(2) \ldots\ldots \sin \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin M} \cdot \sqrt{\sin a \cdot \sin b},$$

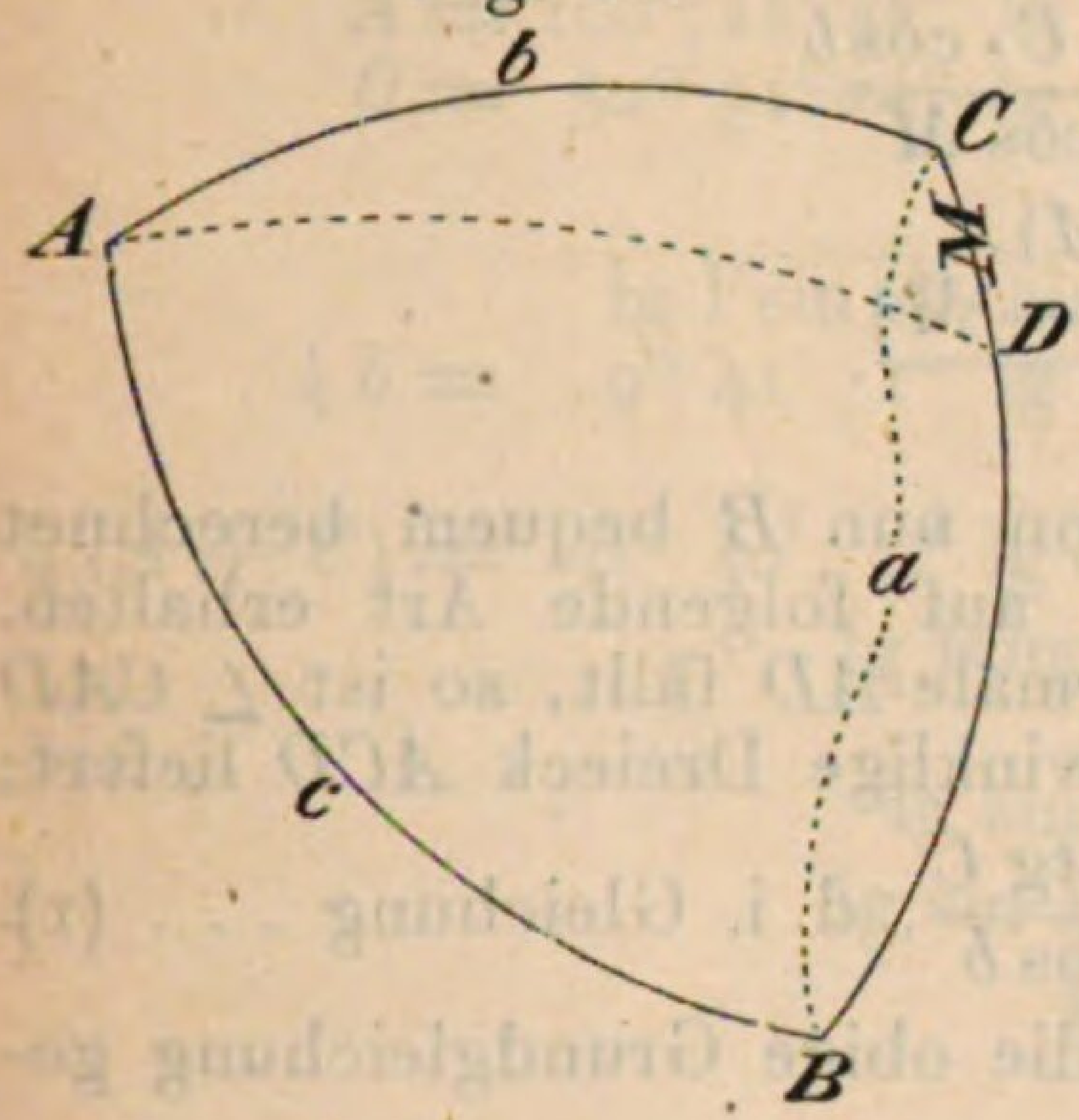
$$(3) \ldots\ldots \sin \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\cos M}.$$

Die dritte Seite c kann nun aus a, b, C nach Gleichung (1) und (2), oder nach (1) und (3) gefunden werden. Diese Formeln auf das vorige Beispiel angewandt, liefern:

$$
\begin{array}{rll}
a = 120^\circ\ 18'\ 33''\ \lg \sin = & 9{,}936169 - 10 & \\
b = 118^\circ\ 2'\ 14''\ \lg \sin = & 9{,}945785 - 10 & \\
\hline
 & 19{,}881954 - 20 & \\
\lg \sqrt{\sin a \cdot \sin b} = & 9{,}940977 - 10 & \\
\tfrac{1}{2} C = 13^\circ\ 41'\ 17''\ \lg \sin = & 9{,}374080 - 10 & \\
\hline
 & 9{,}315057 - 10 & \\
\tfrac{1}{2}(a - b) = 1^\circ\ 8'\ 9{,}''5\ \lg \sin = & 8{,}297217 - 10 \ldots\ldots & 8{,}297217 - 10 \\
\hline
\lg \operatorname{tang} M = & 1{,}017840 & \\
M = & 84^\circ\ 31'\ 4''\ \lg \cos = & 9{,}980171 - 10 \\
\lg \sin M = & 9{,}998009 - 10 & \\
\hline
\lg \sin \tfrac{1}{2} c = & 9{,}317048 - 10 & 9{,}317046 - 10 \\
\tfrac{1}{2} c = & 11^\circ\ 58'\ 36'' & \\
c = & 23^\circ\ 57'\ 12''. &
\end{array}
$$

§. 47.

Fig. 26.



Aufgabe. In dem sphärischen Dreieck ABC, Fig. 26., sind gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, nämlich a, b und C, dadurch einen der andern Winkel A oder B zu finden.

Lösung. Zur Bestimmung von B dient die fünfte Gleichung in (VI.) §. 27., nämlich:

$$\operatorname{cotg} b \cdot \sin a = \sin C \cdot \operatorname{cotg} B + \cos a \cdot \cos C,$$

welche auch wie folgt geschrieben werden kann

$$\sin C \cdot \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \cdot \sin a - \cos a \cdot \cos C.$$

Setzt man hierin

$$\operatorname{cotg} b = m \cdot \cos M$$
$$\text{und } \cos C = m \cdot \sin M,$$

so ist: $(1) \ldots\ldots \operatorname{tang} M = \cos C \cdot \operatorname{tang} b,$

$$(2) \ldots\ldots m = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos M} = \frac{\cos C}{\sin M},$$

und $\sin C \cdot \operatorname{cotg} B = m \cdot \sin (a - M),$

oder
$$(3) \ldots\ldots \operatorname{cotg} B = \frac{m \cdot \sin (a - M)}{\sin C},$$

$$(4) \ldots\ldots \operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} C \cdot \sin (a - M)}{\sin M}.$$

B wird nun am leichtesten nach den Gleichungen (1) und (4) gefunden. — Der Hülfswinkel M ist hier wieder der Bogen CD in Fig. 26.

Beispiel. Es ist $a = 120^\circ\ 18'\ 33''$; $b = 118^\circ\ 2'\ 14''$; $C = 27^\circ\ 22'\ 34''$. Die logarithmische Berechnung von B nach (1) und (4) ist:

$b = 118^\circ\ 2'\ 14''$ lg tang $= 0{,}273645n$
$C = 27^\circ\ 22'\ 34''$ lg cos $= 9{,}948416 - 10$ lg cotg $= 0{,}285820$
lg tang $M = 0{,}222061n$
$M = 120^\circ\ 57'\ 5''$ c. lg sin $= 0{,}066713$
$a = 120^\circ\ 18'\ 33''$
$a - M = -0^\circ\ 38'\ 32''$.. lg sin $= 8{,}049554 - 10n$
lg cotg $B = 8{,}402087 - 10n$
$B = 91^\circ\ 26'\ 45''$.

Zur Bestimmung von A würde man durch ein ähnliches Verfahren die Gleichungen

$$\operatorname{tang} M = \cos C \cdot \operatorname{tang} a$$
$$\text{und } \operatorname{cotg} A = \frac{\operatorname{cotg} C \cdot \sin (b - M)}{\sin M}$$

erhalten.

§. 48.

Aufgabe. Im sphärischen Dreieck ABC, Fig. 26., sei gegeben A, C und b, dadurch B zu finden.

Lösung I. Die zweite Gleichung in (IV.) §. 24., d. i.

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$

dient hierzu. Um sie logarithmisch zu machen, setze man

$$\cos C = m \cdot \sin M$$
$$\text{und } \sin C \cdot \cos b = m \cdot \cos M,$$

so ist (1) $\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{cotg} C}{\cos b}$,

(2) $m = \frac{\cos C}{\sin M} = \frac{\sin C \cdot \cos b}{\cos M}$,

(3) $\cos B = m \cdot \sin (A - M)$,

oder (4) $\cos B = \frac{\cos C \cdot \sin (A - M)}{\sin M}$.

Nach den Gleichungen (1) und (4) kann nun B bequem berechnet werden. Diese Gleichungen werden auch auf folgende Art erhalten. Wenn man in Fig. 26. von A auf a die Normale AD fällt, so ist $\angle CAD$ der Hülfswinkel M, denn das bei D rechtwinklige Dreieck ACD liefert:

$\cos b = \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg} M$, oder $\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{cotg} C}{\cos b}$, d. i. Gleichung . . . (1).

Wird nun dieser Werth für $\cos b$ in die obige Grundgleichung gesetzt, so geht sie über in:

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg} M,$$
$$= \frac{\cos C}{\sin M} [\sin A \cdot \cos M - \cos A \cdot \sin M],$$
$$= \frac{\cos C}{\sin M} \cdot \sin (A - M).$$

Beispiel. Es sei $A = 100^\circ\ 28'\ 48''$; $C = 82^\circ\ 31'\ 14''$ und $b = 19^\circ\ 22'\ 2''$, so ist die Berechnung von B nach (1) und (4):

$C = 82^\circ\ 31'\ 14''$	lg cotg = 9,118224 — 10	lg cos = 9,114513 — 10	
$b = 19^\circ\ 22'\ 2''$	lg cos = 9,974702 — 10		
$M = 7^\circ\ 55'\ 21''$	lg tang = 9,143522 — 10	c. lg sin = 0,860645	
$A = 100^\circ\ 28'\ 48''$			
$A - M = 92^\circ\ 33'\ 27''$		lg sin = 9,999567 — 10	
	$B = 19^\circ\ 21'\ 30''$	lg cos = 9,974725 — 10.	

Lösung II. Wenn man in

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$

für $\cos b$ den gleichen Werth $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b$ setzt, so ergiebt sich

$$\cos B = -\cos (A + C) - 2 \sin A \cdot \sin C \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} b,$$

und wenn man diese Gleichung von $1 = 1$ abzieht, so erhält man

$$1 - \cos B = 1 + \cos (A + C) + 2 \sin A \cdot \sin C \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} b,$$

oder nach einer bekannten Substitution

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} B = \cos^2 \tfrac{1}{2} (A + C) + \sin A \cdot \sin C \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} b.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} (A + C) = m^2 \cdot \cos^2 M$$

und $\sin A \cdot \sin C \cdot \sin^2 \frac{1}{2} b = m^2 \cdot \sin^2 M$,

so ist (1) $\operatorname{tang} M = \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} (A + C)} \cdot \sqrt{\sin A \cdot \sin C}$,

(2) $\sin^2 \frac{1}{2} B = m^2 = \frac{\sin A \cdot \sin C \cdot \sin^2 \frac{1}{2} b}{\sin^2 M}$,

$= \frac{\cos^2 \frac{1}{2} (A + C)}{\cos^2 M}$,

oder (3) $\sin \frac{1}{2} B = \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\sin M} \cdot \sqrt{\sin A \cdot \sin C}$,

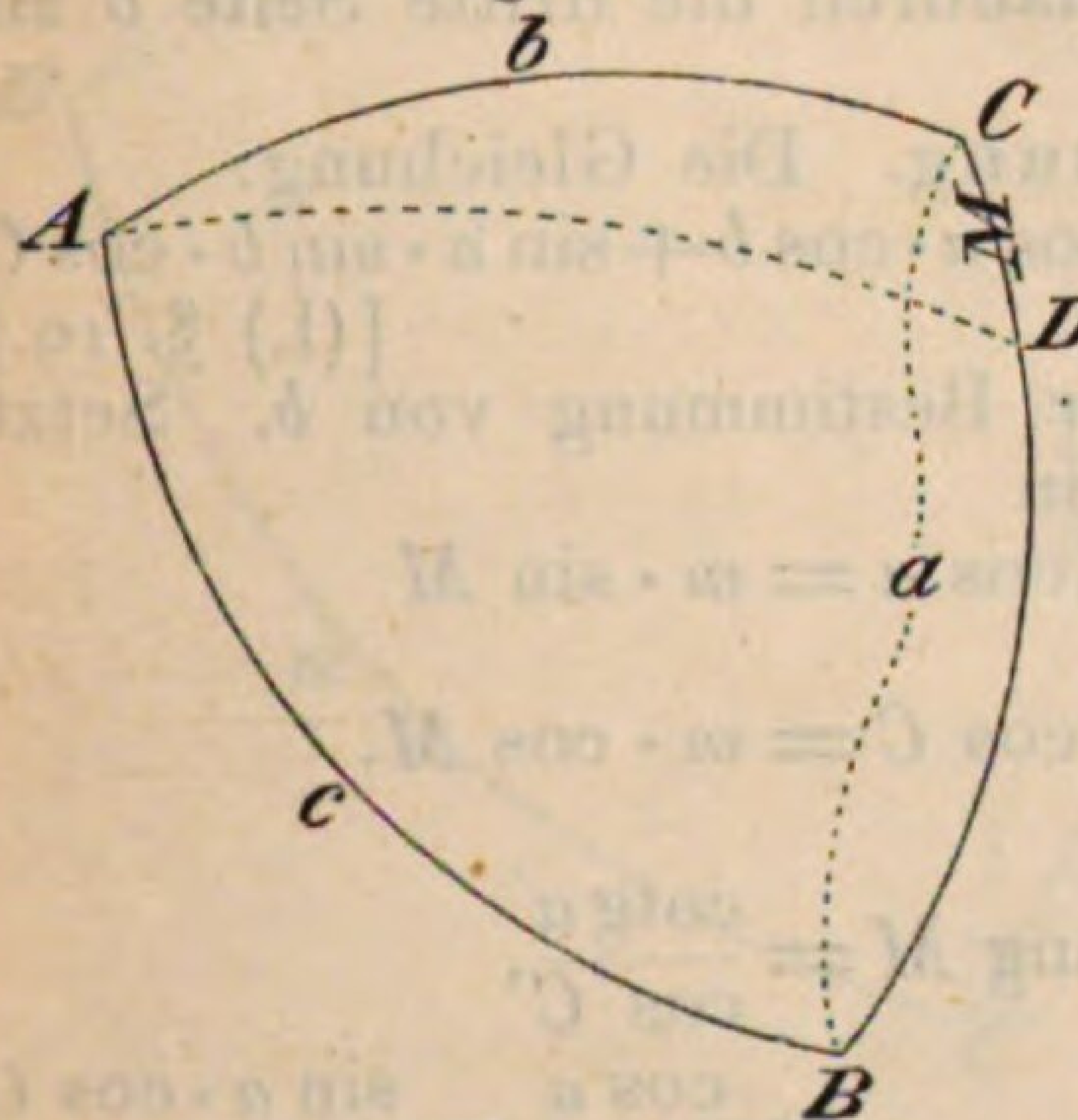
oder (4) $\sin \frac{1}{2} B = \frac{\cos \frac{1}{2} (A + C)}{\cos M}$.

Die Gleichungen (1), (3) und (4) auf das vorige Beispiel angewandt, liefern:

$$\begin{array}{rll} A = 100^\circ\, 28'\, 48'' & \lg\sin = & 9{,}992694 - 10 \\ C = 82^\circ\, 31'\, 14'' & \lg\sin = & 9{,}996289 - 10 \\ \hline & & 19{,}988983 - 20 \\ \hline & \lg\sqrt{\sin A \cdot \sin C} = & 9{,}994492 - 10 \\ \tfrac{1}{2}b = 9^\circ\, 41'\, 1'' & \lg\sin = & 9{,}225845 - 10 \\ \hline & & 9{,}220337 - 10 \\ \tfrac{1}{2}(A+C) = 91^\circ\, 30'\, 1'' & \lg\cos = & 8{,}417999 - 10n \;\ldots\; 8{,}417999 - 10n \\ & \lg\operatorname{tang} M = & 0{,}802338n \\ & M = & 98^\circ\, 57'\, 30'' \;\lg\cos = 9{,}192334 - 10n \\ & \lg\sin M = & 9{,}994670 - 10 \\ \hline & \lg\sin\tfrac{1}{2}B = & 9{,}225667 - 10 \qquad 9{,}225665 - 10 \\ & \tfrac{1}{2}B = & 9^\circ\, 40'\, 46{,}''5 \\ & B = & 19^\circ\, 21'\, 33''. \end{array}$$

§. 49.

Fig. 26.



Aufgabe. Im sphärischen Dreieck ABC, Fig. 26., sind gegeben die Winkel A und C, und die zwischenliegende Seite b, dadurch die andern Seiten a und c zu bestimmen.

Lösung. Zur Bestimmung von c dient die Gleichung:

$$\operatorname{cotg} c \cdot \sin b = \sin A \cdot \operatorname{cotg} C + \cos b \cdot \cos A$$
(VI. §. 27.).

Setzt man hierin:

$$\cos b = m \cdot \cos M$$

und

$$\operatorname{cotg} C = m \cdot \sin M,$$

so ergiebt sich:

$$(1) \;\ldots\; \operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{cotg} C}{\cos b},$$

$$(2) \;\ldots\; m = \frac{\cos b}{\cos M} = \frac{\operatorname{cotg} C}{\sin M},$$

$$(3) \;\ldots\; \operatorname{cotg} c = m\,\frac{\cos(A - M)}{\sin b},$$

$$(4) \;\ldots\; \operatorname{cotg} c = \frac{\operatorname{cotg} b \cdot \cos(A - M)}{\cos M}.$$

Das geometrische Bild des Hülfswinkels M ist in diesem Dreieck wieder $\angle\, CAD$. Am leichtesten wird c nach (1) und (4) gefunden.

Beispiel. Es sei $A = 100^\circ\, 28'\, 48''$, $C = 82^\circ\, 31'\, 14''$ und $b = 19^\circ\, 22'\, 2''$.

$$\begin{array}{rll} C = 82^\circ\, 31'\, 14'' & \lg\operatorname{cotg} = 9{,}118224 - 10 & \\ b = 19^\circ\, 22'\, 2'' & \lg\cos = 9{,}974702 - 10 & \lg\operatorname{cotg} = 0{,}454059 \\ \hline M = 7^\circ\, 55'\, 21'' & \lg\operatorname{tang} = 9{,}143522 - 10 & c.\lg\cos = 0{,}004165 \\ A = 100^\circ\, 28'\, 48'' & & \\ \hline A - M = 92^\circ\, 33'\, 27'' & \ldots\ldots\ldots\ldots & \lg\cos = 8{,}649549 - 10n \\ \hline & c = 97^\circ\, 18'\, 13'' & \lg\operatorname{cotg} = 9{,}107773 - 10n. \end{array}$$

Zur Bestimmung von a ergeben sich folgende Gleichungen:

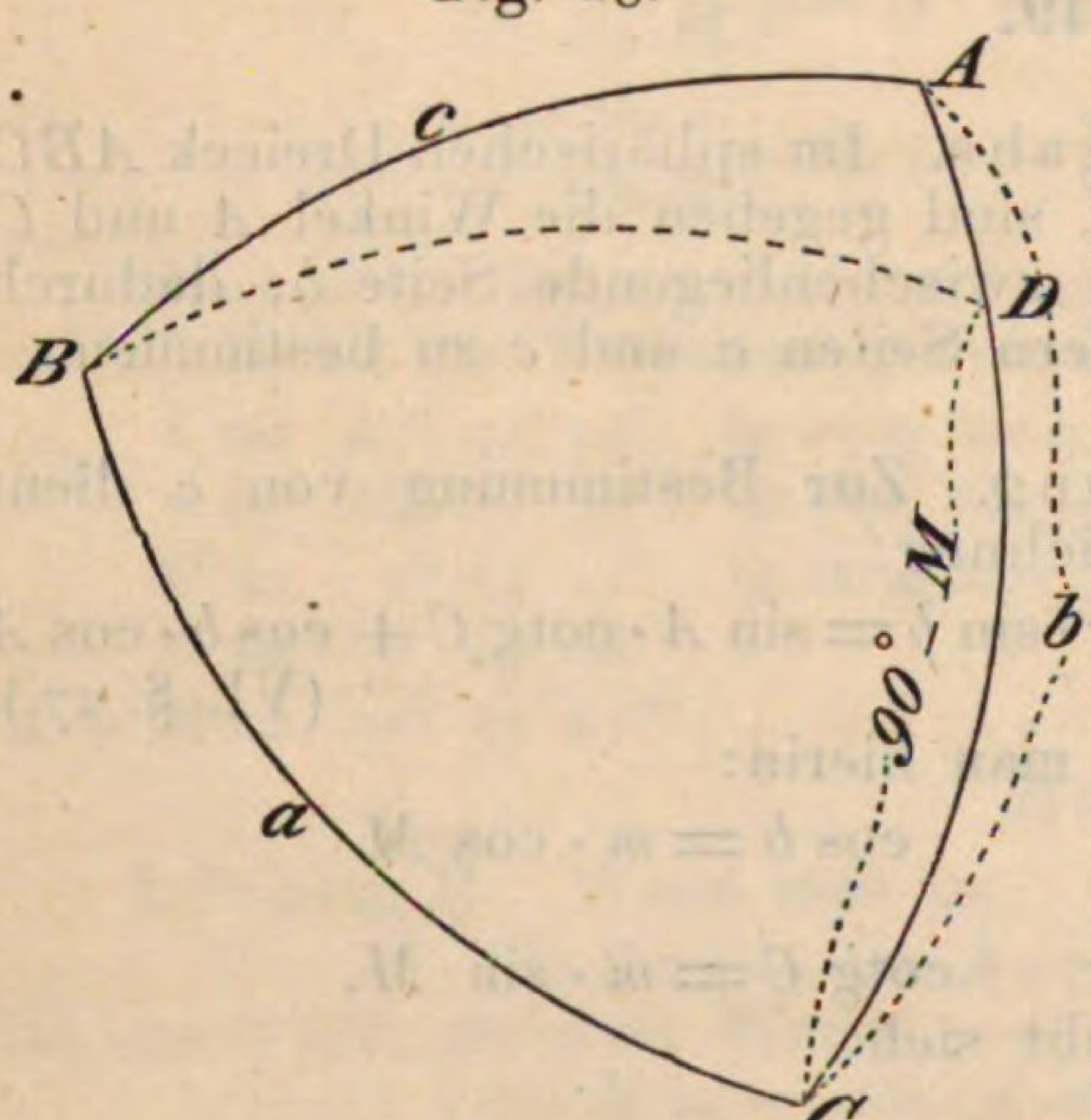
$$\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos b}$$

$$\text{und } \operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{cotg} b \cdot \cos(C - M)}{\cos M}.$$

$A = 100^\circ\ 28'\ 48''$	lg cotg $= 9{,}267120 - 10n$		
$b = 19^\circ\ 22'\ 2''$	lg cos $= 9{,}974706 - 10$	lg cotg $= 0{,}454059$	
$M = -11^\circ\ 5'\ 36''$	lg tang $= 9{,}292414 - 10n$,	c. lg cos $= 0{,}008192$	
$C = 82^\circ\ 31'\ 14''$			
$C - M = 93^\circ\ 36'\ 50''$		lg cos $= 8{,}799564 - 10n$	
	$a = 100^\circ\ 21'\ 20''$	lg cotg $= 9{,}261815 - 10n$.	

§. 50.

Fig. 28.



Aufgabe. Im sphärischen Dreieck ABC, Fig. 28., seien die Seiten a und c, und der Gegenwinkel C gegeben, dadurch die dritte Seite b zu finden.

Lösung. Die Gleichung:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

[(I.) §. 19.]

dient zur Bestimmung von b. Setzt man darin

$$\cos a = m \cdot \sin M$$

und

$$\sin a \cdot \cos C = m \cdot \cos M,$$

so wird:

$$(1) \ldots \operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos C},$$

$$(2) \ldots m = \frac{\cos a}{\sin M} = \frac{\sin a \cdot \cos C}{\cos M}$$

und $\cos c = m \cdot \sin(M + b)$,

oder

$$(3)\ \sin(M + b) = \frac{\cos c}{m}.$$

Nach den Gleichungen (1), (2) und (3) kann b logarithmisch berechnet werden. Der Hülfswinkel M kann auch in diesem Dreieck nachgewiesen werden. Fällt man nämlich von B auf b die Normale BD, so entsteht das bei D rechtwinklige Dreieck BDC, in welchem $DC = 90^\circ - M$ ist, weil es die Gleichung

$$\cos C = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} CD = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} M$$

liefert.

Beispiel. Es sei $c = 128^\circ\ 13'\ 47''$, $a = 77^\circ\ 25'\ 11''$, $C = 131^\circ\ 11'\ 12''$.

lg cotg $a = 9{,}348626 - 10$

lg cos $C = 9{,}818565 - 10n$

lg tang $M = 9{,}530061 - 10n$

$M = 161^\circ\ 16'\ 44''$

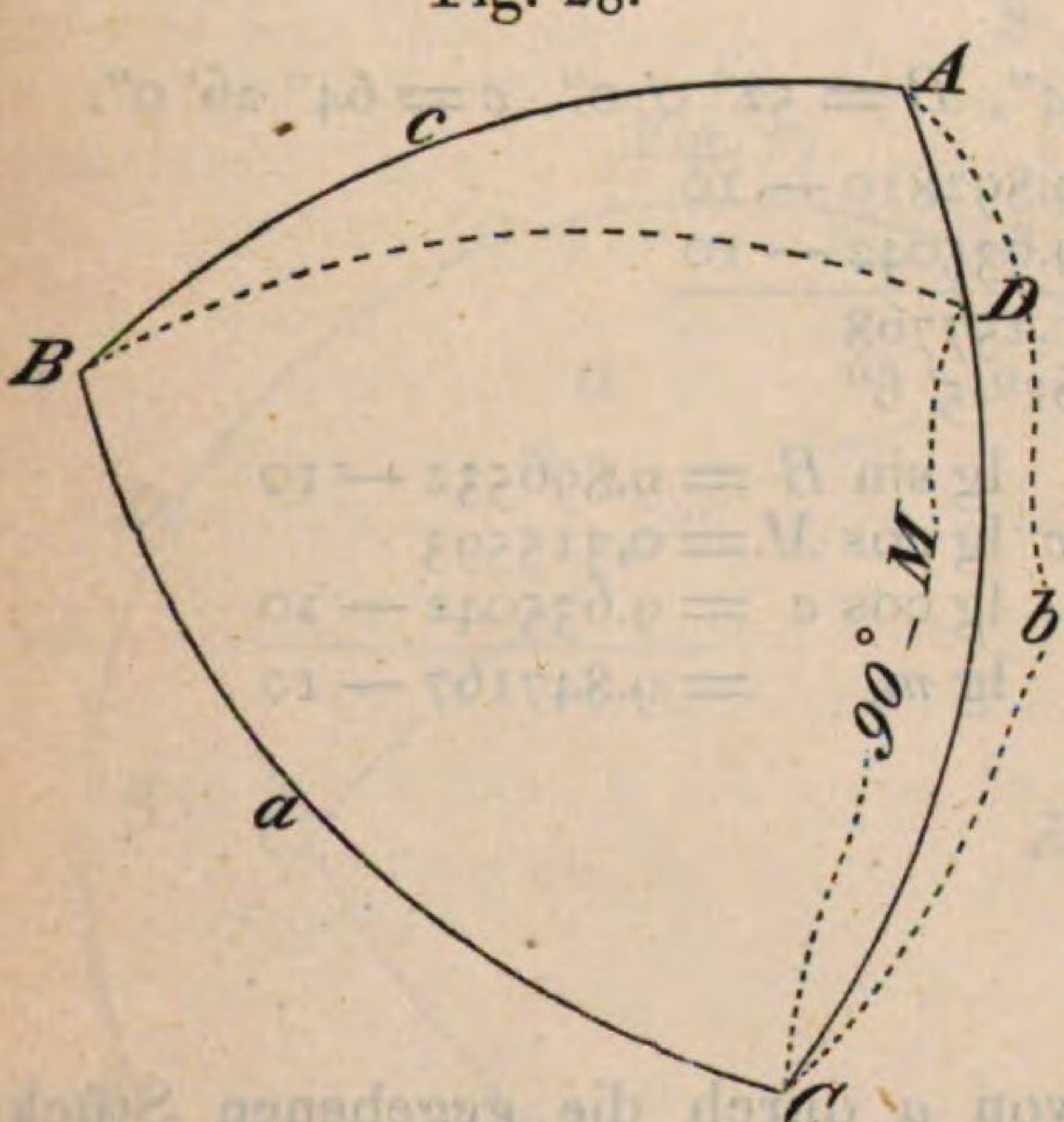
$$
\begin{array}{ll}
\lg \cos a = 9{,}338073 - 10 & \lg \cos C = 9{,}818565 - 10n \\
\lg \sin M = 9{,}506454 - 10 & \lg \sin a = 9{,}989446 - 10 \\
& c.\ \lg \cos M = 0{,}023608\,n \\
\hline
\lg m = 9{,}831619 - 10 & \lg m = 9{,}831619 - 10
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\lg \cos c & = 9{,}791561 - 10n \\
\lg \sin (M+b) & = 9{,}959942 - 10n \\
M+b & = 245^\circ\ 46'\ 4'' \text{ oder } 294^\circ\ 13'\ 56'' \\
M & = 161^\circ\ 16'\ 44'' \quad \text{»} \quad 161^\circ\ 16'\ 44'' \\
\hline
b & = 84^\circ\ 29'\ 20'' \text{ oder } 132^\circ\ 57'\ 12''.
\end{array}
$$

Hier sind beide Werthe von b zu nehmen, denn wenn A nach der Sinusregel berechnet wird, so findet man, dass (nach §. 41.) A sowohl spitz als stumpf sein kann.

§. 51.

Fig. 28.



Aufgabe. In dem sphärischen Dreieck ABC, Fig. 28., sind gegeben die Seiten a und c, und der Gegenwinkel C, dadurch den Winkel B zu bestimmen.

Lösung. Hierzu ist die sechste Gleichung in (VI.) §. 27., d. i.

$$\operatorname{cotg} c \cdot \sin a = \sin B \cdot \operatorname{cotg} C + \cos a \cdot \cos B$$

zu benutzen; denn setzt man:

$$\operatorname{cotg} C = m \cdot \cos M,$$
$$\cos a = m \cdot \sin M$$

und substituirt diese Werthe, so wird:

$$(1) \ldots \operatorname{tang} M = \frac{\cos a}{\operatorname{cotg} C},$$

$$(2) \ldots m = \frac{\operatorname{cotg} C}{\cos M} = \frac{\cos a}{\sin M},$$

$$(3) \ldots \sin (M+B) = \frac{\operatorname{cotg} c \cdot \sin a}{m},$$

nach welchen drei Gleichungen B gefunden werden kann.

Beispiel. Es sei $c = 128^\circ\ 13'\ 47''$, $a = 77^\circ\ 25'\ 11''$, $C = 131^\circ\ 11'\ 12''$.

$$
\begin{array}{rl}
\lg \cos a & = 9{,}338073 - 10 \\
\lg \operatorname{cotg} C & = 9{,}942019 - 10n \\
\hline
\lg \operatorname{tang} M & = 9{,}396054 - 10n \\
M & = 166^\circ\ 1'\ 20''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\lg \operatorname{cotg} C = 9{,}942019 - 10n & \lg \cos a = 9{,}338073 - 10 \\
\lg \cos M = 9{,}986946 - 10n & \lg \sin M = 9{,}382999 - 10 \\
\hline
\lg m = 9{,}955073 - 10 & \lg m = 9{,}955074 - 10
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
c.\ \lg m & = 0{,}044927 \\
\lg \sin a & = 9{,}989446 - 10 \\
\lg \operatorname{cotg} c & = 9{,}896395 - 10n \\
\hline
\lg \sin (M+B) & = 9{,}930769 - 10n \\
M+B & = 238^\circ\ 30'\ 2'' \text{ oder } 301^\circ\ 29'\ 58'' \\
M & = 166^\circ\ 1'\ 20'' \quad \text{»} \quad 166^\circ\ 1'\ 20'' \\
\hline
B & = 72^\circ\ 28'\ 42'' \text{ oder } 135^\circ\ 28'\ 38''.
\end{array}
$$

Hier sind wieder beide Werthe für B zu nehmen, da A zweideutig ist.

§. 52.

Aufgabe. In dem sphärischen Dreieck ABC, Fig. 28., sei gegeben C und B, und die Gegenseite c, dadurch A und a zu finden.

Lösung I. A kann gefunden werden nach der Gleichung

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c \; \ldots \; [(\mathrm{IV.})\ §.\ 24.].$$

Setzt man nämlich $\cos B = m \cdot \sin M$

und $\sin B \cdot \cos c = m \cdot \cos M$,

so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{cotg} B}{\cos c} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1),$$

$$m = \frac{\cos B}{\sin M} = \frac{\sin B \cdot \cos c}{\cos M} \; \ldots \; (2),$$

$$\sin(A - M) = \frac{\cos C}{m} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3).$$

Beispiel. Es sei $C = 81^\circ\ 31'\ 54''$, $B = 52^\circ\ 0'\ 0''$, $c = 64^\circ\ 26'\ 0''$.

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{cotg} B &= 9{,}892810 - 10 \\
\lg \cos c &= 9{,}635042 - 10 \\
\hline
\lg \operatorname{tang} M &= 0{,}257768 \\
M &= 61^\circ\ 5'\ 6''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg \cos B &= 9{,}789342 - 10 \\
\lg \sin M &= 9{,}942176 - 10 \\
\hline
\lg m &= 8{,}847166 - 10 \\
\lg \cos C &= 9{,}168093 - 10 \\
\hline
\lg \sin(A - M) &= 9{,}320927 - 10 \\
A - M &= 12^\circ\ 5'\ 9'' \\
M &= 61^\circ\ 5'\ 6'' \\
\hline
A &= 73^\circ\ 10'\ 15''.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\lg \sin B &= 9{,}896532 - 10 \\
c.\ \lg \cos M &= 0{,}315593 \\
\lg \cos c &= 9{,}635042 - 10 \\
\hline
\lg m &= 9{,}847167 - 10
\end{aligned}$$

Lösung II. Zur Bestimmung von a durch die gegebenen Stücke C, B und c dient die Gleichung:

$$\operatorname{cotg} C \cdot \sin B = \sin a \cdot \operatorname{cotg} c - \cos a \cdot \cos B \; \ldots \; [(\mathrm{VII.})\ §.\ 28.].$$

Setzt man nun $\operatorname{cotg} c = m \cdot \cos M$

und $\cos B = m \cdot \sin M$,

so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\operatorname{tang} M = \frac{\cos B}{\operatorname{cotg} c} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1),$$

$$m = \frac{\operatorname{cotg} c}{\cos M} = \frac{\cos B}{\sin M} \; \ldots\ldots \; (2),$$

$$\sin(a - M) = \frac{\operatorname{cotg} C \cdot \sin B}{m} \; \ldots\ldots\ldots \; (3).$$

Diese auf das vorige Beispiel angewendet, liefern:

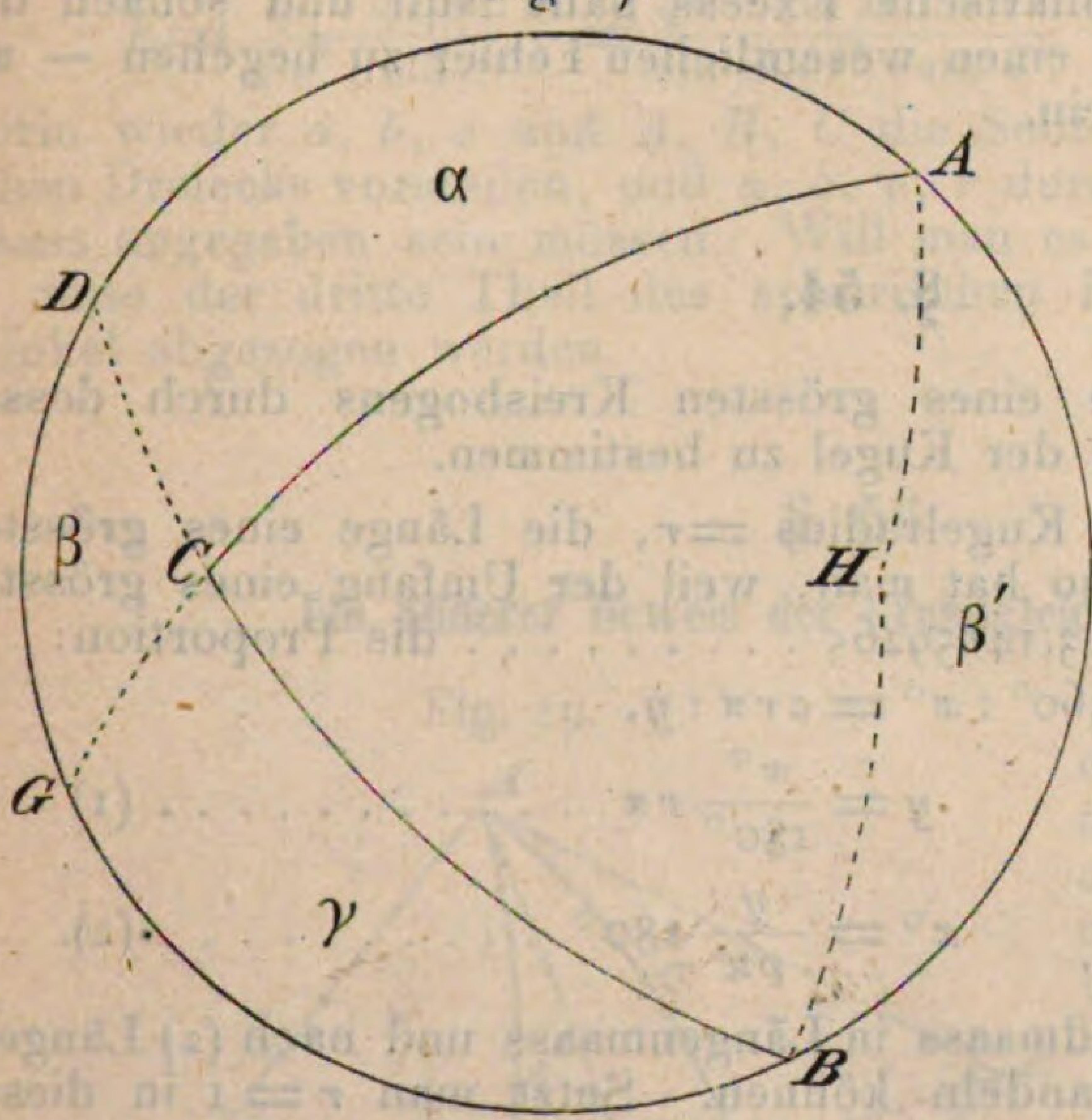
$$\begin{aligned}
\lg \cos B &= 9{,}789342 - 10 \\
\lg \operatorname{cotg} c &= 9{,}679795 - 10 \\
\hline
\lg \operatorname{tang} M &= 0{,}109547 \\
M &= 52^\circ\ 9'\ 3''
\end{aligned}$$

$\lg \cotg c = 9{,}679795 - 10$		$\lg \cos B = 9{,}789342 - 10$	
$\lg \cos M = 9{,}787876 - 10$		$\lg \sin M = 9{,}897422 - 10$	
$\lg m = 9{,}891919 - 10$		$\lg m = 9{,}891920 - 10$	
$c.\ \lg m = 0{,}108081$			
$\lg \cotg C = 9{,}172854 - 10$			
$\lg \sin B = 9{,}896532 - 10$			
$\lg \sin (a - M) = 9{,}177467 - 10$			
$a - M = 8^\circ\ 39'\ 16''$			
$M = 52^\circ\ 9'\ 3''$			
$a = 60^\circ\ 48'\ 19''.$			

Dieses Dreieck ist nach §. 41. ein bestimmtes, denn b hat nur einen Werth, weshalb auch A und a nur einen Werth haben können. Wäre aber das Dreieck zweideutig, so hätte man, um zu den zweiten Werthen von A und a zu gelangen, die Supplemente von $A - M$ und $a - M$ nehmen müssen.

§. 53.

Fig. 27.



Aufgabe. Den Flächeninhalt F des sphärischen Dreiecks ABC, Figur 27., durch dessen Winkel A, B, C in Gradmaass und den Kugelradius r in Längenmaass angegeben, zu bestimmen.

Lösung. Bezeichnet man die Oberfläche der Kugel mit O, so ist bekanntlich

$$O = 4r^2\pi.$$

Ferner ist, wie man leicht findet, der Inhalt eines sphärischen Zweiecks dieser Kugel, wovon jeder Winkel $= x^\circ$ sein mag,

$$= O\frac{x^\circ}{360^\circ} = 4r^2\pi\frac{x^\circ}{360^\circ}.$$

Man verlängere AB zum vollständigen Kreise, so wird $ABGD$ die halbe Oberfläche der Kugel von oben gesehen sein. Nun verlängere man noch BC und AC über A, B und C hinaus, bis diese Verlängerungen einander in H und somit auch den grössten Kreis $ABGD$ in D und G schneiden, so ist der Bogen $ACG = BCD = CAH = CBH = 180^\circ$ und die sphärischen Dreiecke DCG und ABH, die hier mit β und β' bezeichnet werden, sind einander gleich. Die beiden auf der oberen Halbkugel befindlichen Dreiecke ACD und BCG bezeichne man mit α und γ. Dies vorausgeschickt ist:

1) das sphärische Zweieck $BCDA = F + \alpha = O\frac{B}{360^\circ}$,

2) das sphärische Zweieck $ACGB = F + \gamma = O\frac{A}{360^\circ}$,

3) das sphärische Zweieck $CAHB = F + \beta' = F + \beta = O \frac{C}{360^\circ}$,

folglich $$3F + \alpha + \gamma + \beta = (B + A + C) \frac{O}{360^\circ}.$$

Es ist aber $$F + \alpha + \gamma + \beta = \tfrac{1}{2} O,$$

folglich $$2F = (B + A + C) \frac{O}{360^\circ} - \tfrac{1}{2} O,$$

oder $$F = \frac{B + A + C - 180^\circ}{2 \cdot 360^\circ} O \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

oder $$F = \frac{B + A + C - 180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2 \pi \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Nach den Gleichungen (1) oder (2) kann der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks berechnet werden. Gleichung (1) liefert auch die Proportion:

$$O : F = 720^\circ : B + C + A - 180^\circ,$$

worin das vierte Glied der Ueberschuss der Summe der drei Winkel über 180° ist und der sphärische Excess genannt wird. Ist F gegen O sehr klein, so wird der sphärische Excess nahe Null und sonach das sphärische Dreieck — ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen — als ein ebenes zu betrachten sein.

§. 54.

Aufgabe. Die Länge eines grössten Kreisbogens durch dessen Gradmaass und den Radius der Kugel zu bestimmen.

Lösung. Es sei der Kugelradius $= r$, die Länge eines grössten Kreisbogens von $x^\circ = y$, so hat man, weil der Umfang eines grössten Kreises $= 2r\pi$, worin $\pi = 3{,}14159265 \ldots \ldots \ldots$ die Proportion:

$$360^\circ : x^\circ = 2r\pi : y,$$

also $$y = \frac{x^\circ}{180^\circ} r\pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

und $$x^\circ = \frac{y}{r\pi} 180^\circ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Nach (1) wird man Gradmaass in Längenmaass und nach (2) Längenmaass in Gradmaass verwandeln können. Setzt man $r = 1$ in diesen Gleichungen und erwägt, dass $\frac{\pi}{180^\circ} = \sin 1''$, so gehen sie über in:

$$y = x'' \sin 1'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

und $$x'' = \frac{y}{\sin 1''} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

worin y in Theilen des Radius ausgedrückt ist.

§. 55.

Der sphärische Excess.

Bezeichnet man den sphärischen Excess mit E, so ist nach den Gleichungen (1) und (2) in §. 53.

$$E = 720^\circ \frac{F}{O} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$E = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{F}{r^2},$$

$$= 206264'',8 \frac{F}{r^2},$$

$$= \frac{F}{r^2 \cdot \sin 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wonach E berechnet werden kann, wenn man F und O oder F und r kennt. Zur Berechnung von F sind aber ausser O oder r noch die Winkel des sphärischen Dreiecks erforderlich. Sind die Seiten des sphärischen Dreiecks sehr klein im Verhältniss zum Kugelradius, wie dieses bei Triangulirungen auf der Erdoberfläche immer der Fall ist, so wird man zur Bestimmung von F diese Dreiecke als ebene ansehen können und dann wird man haben:

$$F = \tfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Substituirt man diesen Werth für F in (2), so ist

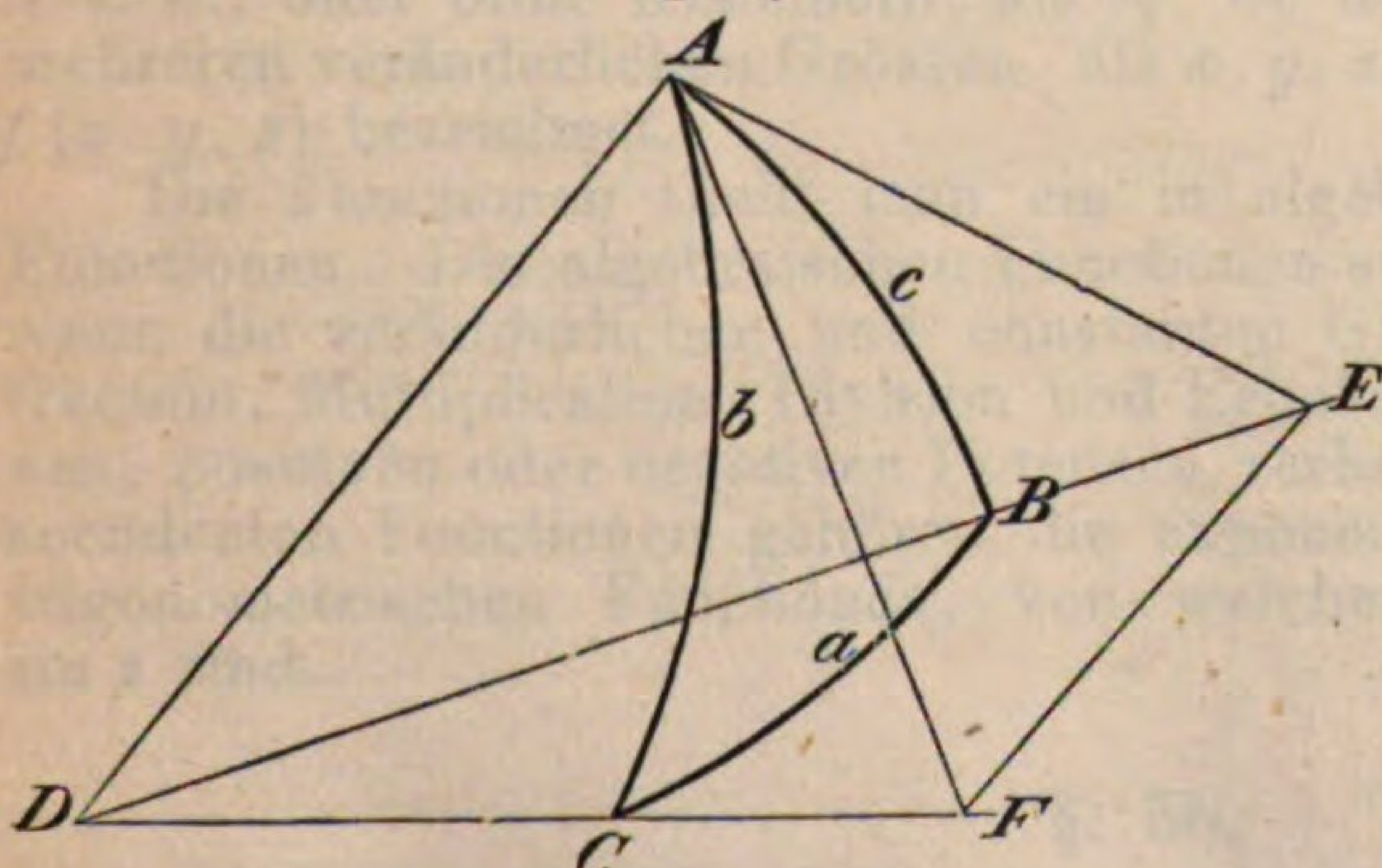
$$E = \frac{\tfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A}{r^2 \cdot \sin 1''} = \frac{\tfrac{1}{2} a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A \cdot r^2 \cdot \sin 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

worin wieder a, b, c und A, B, C die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks vorstellen, und a, b, c, r durch ein und dasselbe Längenmaass angegeben sein müssen. Will man es als ein ebenes berechnen, so muss der dritte Theil des sphärischen Excesses zuvor von jedem Winkel abgezogen werden.

§. 56.

Ein anderer Beweis der Grundgleichung in §. 19.

Fig. 29.



In dem sphärischen Dreieck ABC, Fig. 29., dessen Seiten und Winkel wieder mit a, b, c und A, B, C bezeichnet sind, und in welcher Figur D den Mittelpunkt der Kugel vorstellt, ziehe man von A aus an b und c Tangenten, welche die verlängerten Kugelradien DC und DB in F und E schneiden, so ist:

$$AF = \operatorname{tang} b,$$
$$DF = \sec b,$$
$$AE = \operatorname{tang} c,$$
$$DE = \sec c,$$
$$\angle FAE = A$$
$$\text{und } \angle FDE = a.$$

Zieht man nun die Gerade FE, so entstehen die ebenen Dreiecke FAE und FDE, und diese geben folgende Gleichungen:

$$FE^2 = AF^2 + AE^2 - 2\, AF \cdot AE \cdot \cos FAE,$$
$$FE^2 = DF^2 + DE^2 - 2\, DF \cdot DE \cdot \cos FDE,$$

folglich auch $AF^2 + AE^2 - 2\, AF \cdot AE \cdot \cos FAE$
$= DF^2 + DE^2 - 2\, DF \cdot DE \cdot \cos FDE,$

d. i.

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a,$$

oder

$$\sec^2 b - \operatorname{tg}^2 b + \sec^2 c - \operatorname{tg}^2 c + \frac{2 \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos b \cdot \cos c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} = 0,$$

oder

$$\frac{2 \cos b \cdot \cos c + 2 \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A - 2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{2} \cos b \cdot \cos c$ und formt sie demnächst um, so ist:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

die in §. 19. bewiesene Grundgleichung.

Einiges über Differential-Rechnung.

§. 57.

Einleitung.

Die Differential-Rechnung besteht im Allgemeinen darin, bei mathematischen Betrachtungen den Einfluss zu bestimmen, den die Veränderung gewisser darin vorkommender Grössen auf die Werthe der von diesen abhängigen Grössen hat. Diejenigen Grössen, welche bei solchen Betrachtungen des Wachsens und Abnehmens fähig sind, werden veränderliche oder variable, und diejenigen, welche denselben Werth in der Rechnung behalten, unveränderliche oder constante Grössen genannt. Die veränderlichen Grössen bezeichnet man gewöhnlich durch die letzten und die constanten durch die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets. Wenn der Werth einer veränderlichen Grösse von dem Werthe einer oder mehrerer anderer veränderlichen Grössen abhängig ist, wird erstere eine Function der andern genannt. So sind z. B. y^n, $\log y$, $\sin y$ Functionen von y, weil sie ihre Werthe verändern, wenn y den seinigen verändert. Eine Function von y bezeichnet man entweder durch einen andern Buchstaben, wie z. B. u, oder auch durch $f(y)$, $\varphi(y)$ u. s. w., oder ohne Klammern, als fy, φy u. s. w. Ist eine Function von mehreren veränderlichen Grössen, als x, y, z abhängig, so wird sie durch $f(x, y, z)$ bezeichnet.

Die Functionen theilt man ein in algebraische und transscendente Functionen. Die algebraischen Functionen sind solche, welche entstehen, wenn die veränderlichen und constanten Grössen durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Erhebung zu ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Potenzen verbunden werden. Zu den transscendenten Functionen gehören die exponentiellen, logarithmischen und trigonometrischen Functionen, von welchen die einfachsten a^x, $\log x$, $\sin x$ sind.

§. 58.

Die folgenden Beispiele werden das Vorstehende näher erläutern. Es sei $fx = ax + b$, worin fx die Function und x die Veränderliche vorstellt. Nun nehme x um h zu, so wird man haben

$$f(x + h) = a(x + h) + b = ax + ah + b,$$

und wenn man von dieser Gleichung die gegebene abzieht, so entsteht:

$$f(x + h) - fx = ah,$$

$$\text{oder } \frac{f(x + h) - fx}{h} = a = \frac{a}{1}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Zuwachs der Function sich zum Zuwachse der Veränderlichen verhält, wie $a : 1$. Der Zuwachs von fx, der positiv und negativ sein kann, wird offenbar gleich 0, wenn h gleich 0 wird; wenn aber diese Function stetig ist — und nur solche werden hier vorausgesetzt — kann ihr Zuwachs $f(x+h) - fx$ kleiner als jede gegebene Grösse gedacht werden, wenn nämlich immer näher $h = 0$ gebracht wird, ohne jedoch genau $h = 0$ werden zu lassen.

Es sei $fx = ax^2$ und x gehe über in $x+h$, so entsteht

$$f(x+h) = a(x+h)^2 = ax^2 + 2\,axh + ah^2,$$

folglich $f(x+h) - fx = 2\,axh + ah^2$,

$$\text{oder } \frac{f(x+h) - fx}{h} = 2\,ax + ah.$$

Das Verhältniss zwischen dem Zuwachse der Function und dem der Veränderlichen ist hier $2\,ax + ah : 1$, also nicht mehr gleichmässig; wenn man sich aber h fortwährend kleiner werdend vorstellt, also kleiner als jede gegebene Grösse, so wird dieses Verhältniss sich dem $2\,ax : 1$ um so mehr nähern, mit welchem es jedoch, streng genommen, nur dann zusammenfallen kann, wenn $h = 0$ ist.

Es sei $fx = ax^3$ und es gehe x über in $x+h$, so wird

$$f(x+h) = a(x+h)^3 = ax^3 + 3\,ax^2h + 3\,axh^2 + ah^3,$$

folglich $f(x+h) - fx = 3\,ax^2h + 3\,axh^2 + ah^3$,

$$\text{oder } \frac{f(x+h) - fx}{h} = 3\,ax^2 + 3\,axh + ah^2.$$

Auch hier sieht man, dass das Verhältniss zwischen dem Zuwachse der Function und dem der Veränderlichen dem Verhältnisse $3ax^2 : 1$ um so näher gebracht wird, je mehr h sich 0 nähert.

Ist $fx = \frac{a}{x}$ und geht x in $x+h$ über, so hat man

$$f(x+h) = \frac{a}{x+h} = \frac{a}{x} - \frac{ah}{x^2} + \frac{ah}{x^3 + x^2h},$$

$$\text{folglich } f(x+h) - fx = -\frac{ah}{x^2} + \frac{ah^2}{x^3 + x^2h},$$

$$\text{oder } \frac{f(x+h) - fx}{h} = -\frac{a}{x^2} + \frac{ah}{x^3 + x^2h}.$$

Das Verhältniss zwischen dem Zuwachse der Function und dem der Veränderlichen wird also dem Verhältnisse $-\frac{a}{x^2} : 1$ um so näher gebracht werden, je näher $h = 0$ kommt.

§. 59.

Der Quotient $\frac{f(x+h) - fx}{h}$ für $h = 0$ wird nach §. 58. immer eine bestimmte, von dem Zuwachse der Function und dem der Veränderlichen unabhängige Grösse sein. Diesen Quotienten nennt man die Ableitung oder den Differential-Quotienten, oder den Differential-Coefficienten von fx, und er wird bezeichnet mit $f'(x)$ oder $f'x$.

Die Zuwachse h und $f(x+h) - fx$ für ein beliebiges h können auch als Differenzen von x und fx angesehen werden, zu welchem Behuf man sie mit Δx und Δfx bezeichnet.

Für $\Delta x = o$ ist $\frac{\Delta fx}{\Delta x} = f'x$. Die im Verschwinden begriffene Differenz heisst Differential und wird mit ∂ bezeichnet, so dass ∂x das Differential von x und ∂fx das Differential von fx ist.

Das Verhältniss dieser beiden Differentiale ist der Differential-Coefficient, z. B. $\frac{\partial fx}{\partial x} = f'x$.

Wenn $fx = ax^3$, so ist der Differential-Coefficient $\frac{\partial fx}{\partial x} = 3\,ax^2$ und das Differential $\partial fx = 3ax^2 \cdot \partial x$; beides schreibt man auch

$$\frac{\partial ax^3}{\partial x} = 3ax^2 \text{ und } \partial ax^3 = 3ax^2 \cdot \partial x.$$

§. 60.

Leibnitz, der Erfinder der Differential-Rechnung, dachte sich unter einem Differential, als ∂x und ∂fx, eine Grösse, die sich beständig o nähert, also kleiner als jede gegebene Grösse und daher unendlich klein ist. Ist also wieder $fx = ax^3$, und erleidet x den unendlich kleinen Zuwachs ∂x, so wird der Zuwachs der Function fx nach §. 58. sein

$$\partial fx = 3ax^2 \cdot \partial x + 3ax \cdot \partial x^2 + a \cdot \partial x^3.$$

Da aber ∂x als unendlich kleine Grösse gedacht wird, so werden die zweiten und höhern Potenzen von ∂x als gegen ∂x verschwindend anzusehen sein, und deshalb wird

$$\partial fx = \partial ax^3 = 3ax^2 \cdot \partial x.$$

Das Differential ist demnach das erste Glied der vollständigen Differenz, und zwar der bedeutendste Theil derselben.

Aus diesem und dem vorstehenden Paragraphen geht also hervor, dass man die Ableitung oder den Differential-Coefficienten erhält, wenn man das Differential der Function durch das Differential der Veränderlichen dividirt, oder dass das Differential der Function gleich ist dem Product aus dem Differential-Coefficienten und dem Differential der Veränderlichen.

§. 61.

Der Differential-Quotient einer constanten Grösse a ist gleich Null, weil sie keinen Zuwachs haben kann, daher

$$\frac{\partial a}{\partial x} = o \text{ oder } \partial a = o.$$

Nach §. 58. ist $\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'x$ für $h = o$, die Ableitung von fx, und $\frac{\varphi\,(x+h) - \varphi x}{h} = \varphi' x$ für $h = o$, die Ableitung von φx, folglich ist die Ableitung der Summe oder Differenz von $fx \pm \varphi x$:

$$\frac{f(x+h) \pm \varphi\,(x+h) - (fx \pm \varphi x)}{h} = f'x \pm \varphi' x,$$

$$\text{oder } \frac{\partial\,(fx \pm \varphi x)}{\partial x} = \frac{\partial fx \pm \partial \varphi x}{\partial x} = f'x + \varphi' x,$$

oder wenn man die Differentiale nimmt

$$\partial\,(fx \pm \varphi x) = f'x \cdot \partial x \pm \varphi' x \cdot \partial x,$$

d. h. die Ableitung, oder das Differential einer Summe oder Differenz zweier Functionen ist die Summe oder Differenz der Ableitungen oder der Differentiale dieser beiden Functionen.

§. 62.

Die Ableitung des Products $fx \cdot \varphi x$ ist dem Vorhergehenden nach $= \frac{f(x+h) \cdot \varphi(x+h) - fx \cdot \varphi x}{h}$ für $h = 0$. Da aber $f(x+h) = fx + f'x \cdot h$ und $\varphi(x+h) = \varphi x + \varphi' x \cdot h$, so geht der Quotient, wenn man diese Werthe darin substituirt, über in $fx \cdot \varphi' x + \varphi x \cdot f'x + f'x \cdot \varphi' x \cdot h$, oder in $fx \cdot \varphi' x + \varphi x \cdot f'x$, weil $\varphi' x \cdot f'x \cdot h$ mit h zugleich verschwindet; deshalb ist

$$\frac{\partial (fx \cdot \varphi x)}{\partial x} = fx \cdot \varphi' x + \varphi x \cdot f'x,$$

$$\text{oder } \partial (fx \cdot \varphi x) = fx \cdot \varphi' x \cdot \partial x + \varphi x \cdot f'x \cdot \partial x.$$

Die vorletzte Gleichung enthält den Satz: Die Ableitung eines Products, aus zwei Factoren bestehend, wird erhalten, wenn man die eine Function mit der Ableitung der andern multiplicirt und beide Producte addirt.

Die letzte Gleichung liefert den Satz: Das Differential eines Products zweier Functionen wird erhalten, wenn man die eine mit dem Differential der andern multiplicirt und diese beiden Producte addirt.

Nach §. 60. gelangt man leichter zu diesem Satze. Ist z. B. $x = yz$, und bezeichnet man die respectiven Zuwachse mit Δx, Δy, Δz, so wird

$$x + \Delta x = (y + \Delta y)(z + \Delta z),$$
$$= yz + y \cdot \Delta z + z \cdot \Delta y + \Delta y \cdot \Delta z,$$
$$\text{folglich } \Delta x = y \cdot \Delta z + z \cdot \Delta y + \Delta y \cdot \Delta z.$$

Nimmt man diese Zuwachse unendlich klein an, so dass sie in Differentiale übergehen, so hat man, da nach §. 60. $\partial y \cdot \partial z$ gegen die übrigen Glieder verschwindet,

$$\partial x = y \cdot \partial z + z \cdot \partial y,$$
$$\text{oder } \partial (zy) = y \cdot \partial z + z \cdot \partial y.$$

Ist einer von diesen Factoren constant, z. B. y, so hat man, da $\partial y = 0$ ist, $\partial (zy) = y \cdot \partial z$.

Dividirt man die beiden Seiten der Gleichung

$$\partial (zy) = y \cdot \partial z + z \cdot \partial y$$

durch zy, so erhält man

$$\frac{\partial (zy)}{zy} = \frac{\partial z}{z} + \frac{\partial y}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Setzt man $z = sv$, so ist $\partial z = s \cdot \partial v + v \cdot \partial s$, und wenn man diese Werthe in (1) substituirt, so wird

$$\frac{\partial (svy)}{svy} = \frac{\partial s}{s} + \frac{\partial v}{v} + \frac{\partial y}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Auf ähnliche Weise wird man finden, dass

$$\frac{\partial (xyzst \ldots)}{xyzst \ldots} = \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{z} + \frac{\partial s}{s} + \frac{\partial t}{t} + \ldots \quad (3) \text{ ist.}$$

Wenn man Gleichung (2) mit svy multiplicirt, so ist

$$\partial (svy) = vy \cdot \partial s + sy \cdot \partial v + sv \cdot \partial y \quad \ldots\ldots (4),$$

woraus folgt, dass das Differential eines aus mehreren Factoren bestehenden Products gleich ist der Summe der Producte, die entstehen, wenn man das Differential eines jeden von ihnen mit dem Product der übrigen Factoren multiplicirt.

§. 63.

Von dem Quotienten $\frac{fx}{\varphi x}$ wird die Ableitung

$$\left[\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} - \frac{fx}{\varphi x}\right] : h \text{ für } h = 0.$$

Substituirt man die Werthe $f(x+h) = fx + f'x \cdot h$ und $\varphi(x+h) = \varphi x + \varphi' x \cdot h$ in diesen Ausdruck, so ist

$$\left[\frac{fx + f'x \cdot h}{\varphi x + \varphi' x \cdot h} - \frac{fx}{\varphi x}\right] : h = \frac{fx \cdot \varphi x + \varphi x \cdot f'x \cdot h - fx \cdot \varphi x - fx \cdot \varphi' x \cdot h}{\varphi x(\varphi x + \varphi' x \cdot h)} : h,$$

$$= \frac{\varphi x \cdot f'x \cdot h - fx \cdot \varphi' x \cdot h}{(\varphi x)^2 + \varphi x \cdot \varphi' x \cdot h} : h = \frac{\varphi x \cdot f'x - fx \cdot \varphi' x}{(\varphi x)^2},$$

weil $\varphi x \cdot \varphi' x \cdot h$ mit h zugleich verschwindet, folglich ist

$$\frac{\partial\left(\frac{fx}{\varphi x}\right)}{\partial x} = \frac{\varphi x \cdot f'x - fx \cdot \varphi' x}{(\varphi x)^2},$$

oder $\partial\left(\frac{fx}{\varphi x}\right) = \frac{\varphi x \cdot f'x \cdot \partial x - fx \cdot \varphi' x \cdot \partial x}{(\varphi x)^2} = \frac{\varphi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \varphi x}{(\varphi x)^2}.$

Die vorletzte Gleichung enthält den Satz: Die Ableitung eines Quotienten erhält man, wenn man den Nenner mit der Ableitung des Zählers, den Zähler mit der Ableitung des Nenners multiplicirt, dies letztere Product von dem ersteren abzieht und diese Differenz mit dem Quadrate des Nenners dividirt. Zu dieser letzten Gleichung gelangt man leichter auf folgende Weise. Man setze $\frac{fx}{\varphi x} = t$, so ist $fx = \varphi x \cdot t$, und durch Differentiation

$$\partial fx = \varphi x \cdot \partial t + t \cdot \partial \varphi x,$$

$$\text{also } \partial t = \frac{\partial fx - t \cdot \partial \varphi x}{\varphi x},$$

und wenn man $\frac{fx}{\varphi x}$ statt t setzt, so hat man

$$\partial\left(\frac{fx}{\varphi x}\right) = \frac{\partial fx - \frac{fx}{\varphi x} \cdot \partial \varphi x}{\varphi x} = \frac{\varphi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \varphi x}{(\varphi x)^2}.$$

Ist in dem Bruche der Zähler constant, z. B. a, so wird

$$\partial\left(\frac{a}{\varphi x}\right) = \frac{\varphi x \cdot \partial a - a \cdot \partial \varphi x}{(\varphi x)^2} = -\frac{a \cdot \partial x \varphi}{(\varphi x)^2},$$

und ist der Nenner $= a$, so wird

$$\partial\left(\frac{fx}{a}\right) = \frac{a \cdot \partial fx - fx \cdot \partial a}{a^2} = \frac{\partial fx}{a}.$$

§. 64.

Die Function x^n, wenn n eine positive ganze Zahl ist, liefert nach (3) in §. 62.

$$\frac{\partial x^n}{x^n} = \frac{\partial(xxxx\ldots\ldots)}{xxxx\ldots\ldots} = \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial x}{x} + \ldots\ldots$$

In dieser Gleichung kommt $\frac{\partial x}{x}$ auf der rechten Seite so oft als Summand vor, wie x auf der linken Seite in x^n als Factor vorkommt, folglich ist

$$\frac{\partial x^n}{x^n} = n\frac{\partial x}{x},$$

oder $\partial x^n = nx^{n-1} \cdot \partial x$. (1).

Ist $n = \frac{s}{m}$, worin s und m der Voraussetzung gemäss positive ganze Zahlen sind, und setzt man $x^{\frac{s}{m}} = y$, so wird $x^s = y^m$; durch Differentiation ergiebt sich hieraus

$$sx^{s-1} \cdot \partial x = my^{m-1} \cdot \partial y,$$

folglich $$\partial y = \frac{sx^{s-1} \cdot \partial x}{my^{m-1}},$$

oder $$\partial x^{\frac{s}{m}} = \frac{sx^{s-1} \cdot \partial x}{mx^{\frac{s}{m}(m-1)}} = \frac{s}{m} x^{\frac{s}{m}-1} \cdot \partial x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Diese Gleichung folgt unmittelbar aus (1), wenn man $\frac{s}{m}$ für n setzt.

Ist n negativ, so hat man $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, woraus nach §. 63. folgt:

$$\partial x^{-1} = \partial \frac{1}{x^n} = -\frac{\partial x^n}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1} \cdot \partial x}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \cdot \partial x$$

$$= -nx^{-(n+1)} \cdot \partial x \; . \; (3).$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) enthalten den Satz: Das Differential einer beliebigen Potenz einer Function wird erhalten, wenn man die in ihrem Exponenten um 1 verminderte Potenz mit dem unveränderten Exponenten und dem Differential der Function multiplicirt.

§. 65.

Mit den in den vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Sätzen wird man die Ableitung oder das Differential einer jeden algebraischen Function finden können. Das Auffinden der Ableitungen oder der Differentiale heisst Differentiiren.

Beispiele.

1. Die Function $v = ax^n$, worin a constant ist, zu differentiiren. Nach §. 62. und §. 64. ist $\partial v = a \cdot \partial x^n = nax^{n-1} \cdot \partial x$.

2. Die Function $v = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$, worin a und b constant sind, zu differentiiren.

Die Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$v = a + bx^{1/2} - cx^{-1},$$

und dies liefert $$\partial v = \tfrac{1}{2}bx^{1/2-1} \cdot \partial x + cx^{-2} \cdot \partial x,$$

$$= \tfrac{1}{2}bx^{-1/2} \cdot \partial x + cx^{-2} \cdot \partial x,$$

$$= \frac{b \cdot \partial x}{2\sqrt{x}} + \frac{c \cdot \partial x}{x^2}.$$

3. Die Function $v = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{c}{\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{x^2}$, worin a, b, c, f constant sind, zu differentiiren.

Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$v = a + bx^{-2/3} + cx^{-1/3} + fx^{-2},$$

und wenn man diese differentiirt, erhält man:

$$\partial v = -\tfrac{2}{3}bx^{-(2/3+1)} \cdot \partial x - \tfrac{1}{3}cx^{-(1/3+1)} \cdot \partial x - 2fx^{-3} \cdot \partial x,$$

$$= -\tfrac{2}{3}bx^{-5/3} \cdot \partial x - \tfrac{1}{3}cx^{-4/3} \cdot \partial x - 2fx^{-3} \cdot \partial x,$$

$$= -\frac{\tfrac{2}{3}b \cdot \partial x}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{c \cdot \partial x}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2f \cdot \partial x}{x^3},$$

$$= -\frac{2b \cdot \partial x}{3x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c \cdot \partial x}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{2f \cdot \partial x}{x^3}.$$

4. Die Function $v = (a + bx^m)^n$, worin a und b constant sind, zu differentiiren.

Man setze $a + bx^m = z$, so ist

$$v = z^n \text{ und } \partial v = nz^{n-1} \cdot \partial z$$

$$= n\,(a + bx^m)^{n-1} \cdot \partial\,(a + bx^m)$$

$$= nmb \cdot x^{m-1} \cdot \partial x \cdot (a + bx^m)^{n-1}.$$

§. 66.

Wenngleich die Differentiation der Quadratwurzel sich auf die der Bruchpotenzen zurückführen lässt, so hat man doch für sie eine besondere Regel gebildet. Ist nämlich $v = \sqrt{x}$ zu differentiiren, so hat man

$$v = x^{1/2} \text{ und } \partial v = \tfrac{1}{2}x^{1/2-1} \cdot \partial x,$$

$$= \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \cdot \partial x,$$

$$= \frac{\partial x}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{oder } \partial\sqrt{x} = \frac{\partial x}{2\sqrt{x}},$$

woraus folgt, dass das Differential einer Wurzelgrösse gleich ist dem Differential dieser Grösse, dividirt durch die zweifache Wurzelgrösse.

§. 67.

Die folgenden Functionen werden nach dem Satze im vorstehenden Paragraphen differentiirt werden.

1. $v = x(a^2 + x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$, worin x und v veränderlich sind, und a constant ist.

Dieses giebt:

$$\partial v = (a^2 + x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \partial x + x\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \partial(a^2 + x^2) + x(a^2 + x^2) \cdot \partial\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$= (a^2 + x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \partial x + x\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 2x \cdot \partial x + x(a^2 + x^2) \cdot \frac{-2x \cdot \partial x}{2\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$= (a^2 + x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \partial x + 2x^2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \partial x - \frac{x^2(a^2 + x^2) \cdot \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$= \frac{(a^2+x^2)(a^2-x^2)\cdot\partial x + 2x^2(a^2-x^2)\cdot\partial x - x^2(a^2+x^2)\cdot\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$= \frac{a^4-x^4+2a^2x^2-2x^4-a^2x^2-x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\partial x,$$

$$= \frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\partial x.$$

2. $v = \frac{b^2-y^2}{b^4+b^2y^2+y^4}$, worin b constant ist, die übrigen Stücke veränderlich sind.

Dies giebt:

$$\partial v = \frac{(b^4+b^2y^2+y^4)\cdot\partial(b^2-y^2)-(b^2-y^2)\cdot\partial(b^4+b^2y^2+y^4)}{(b^4+b^2y^2+y^4)^2},$$

$$= \frac{-2y(b^4+b^2y^2+y^4)\cdot\partial y-(b^2-y^2)\cdot(2b^2y\cdot\partial y+4y^3\cdot\partial y)}{(b^4+b^2y^2+y^4)^2},$$

$$= \frac{-2y(b^4+b^2y^2+y^4)\cdot\partial y-(2b^4y+4b^2y^3-2b^2y^3-4y^5)\cdot\partial y}{(b^4+b^2y^2+y^4)^2},$$

$$= \frac{-2y(b^4+b^2y^2+y^4)\cdot\partial y-2y(b^4+2b^2y^2-b^2y^2-2y^4)\cdot\partial y}{(b^4+b^2y^2+y^4)^2},$$

$$= \frac{-2y(2b^4+2b^2y^2-y^4)}{(b^4+b^2y^2+y^4)^2}\cdot\partial y.$$

3. Ist $v = \sqrt[4]{[a-\frac{b}{\sqrt{y}}+\sqrt[3]{(c^2-y^2)^2}]^3}$, $\sqrt[4]{[a-\frac{b}{\sqrt{y}}+\sqrt[3]{(c^2-y^2)^2}]^3}$

so ist auch $v = [a-by^{-1/2}+(c^2-y^2)^{2/3}]^{3/4}$ und

$$\partial v = \tfrac{3}{4}[a-by^{-1/2}+(c^2-y^2)^{2/3}]^{3/4-1}\cdot\partial[a-by^{-1/2}+(c^2-y^2)^{2/3}],$$

$$= \tfrac{3}{4}[a-by^{-1/2}+(c^2-y^2)^{2/3}]^{-1/4}\cdot[\tfrac{1}{2}by^{-3/2}\cdot\partial y-\tfrac{4}{3}(c^2-y^2)^{-1/3}y\cdot\partial y],$$

$$= \left[\frac{\frac{3b}{2y\sqrt{y}}-\frac{4y}{\sqrt[3]{c^2-y^2}}}{4\sqrt[4]{[a-\frac{b}{\sqrt{y}}+\sqrt[3]{(c^2-y^2)^2}]}}\right]\cdot\partial y.$$

§. 68.

Differentiation einiger transscendenten Functionen.

Hier werden einige der trigonometrischen Functionen differentiirt werden und zwar zuerst $\sin x$. Bezeichnet man den Zuwachs von x mit Δx und den von $\sin x$ mit $\Delta \sin x$, so ist

$$\Delta \sin x = \sin(x+\Delta x) - \sin x,$$

$$= \sin x\cdot\cos\Delta x + \cos x\cdot\sin\Delta x - \sin x,$$

$$= \cos x\cdot\sin\Delta x - \sin x\,(1-\cos\Delta x),$$

$$= \cos x\cdot\sin\Delta x - \sin x\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x\cdot\sin\tfrac{1}{2}\Delta x,$$

wenn man auf beiden Seiten mit Δx dividirt, so hat man

$$\frac{\Delta\sin x}{\Delta x} = \frac{\cos x\cdot\sin\Delta x}{\Delta x} - \frac{\sin x\cdot 2\sin\frac{1}{2}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}.$$

Nimmt man nun den Zuwachs Δx unendlich klein an, so ist

$$\cos\Delta x = 1,\quad \sin\Delta x = \Delta x,$$

und für $\Delta x = 0$ geht die Gleichung über in

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \cos x,$$

d. i. $$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x,$$

oder $\partial \sin x = \cos x \cdot \partial x$. (1).

Die vorletzte Gleichung zeigt, dass die Ableitung von $\sin x$ nur $\cos x$, und die letzte, dass das Differential von $\sin x$ gleich dem Differential von x multiplicirt mit dem cosinus von x ist. Wird ∂x in Secunden gegeben, so sind diese mit dem sinus von einer Secunde zu multipliciren, also $\partial \sin x = \cos x \cdot \partial x \cdot \sin 1''$.

§. 69.

Aus dem Differential des Sinus lassen sich die Differentiale der übrigen trigonometrischen Functionen ableiten.

1. Da $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, so ist

$$\partial \cos x = \partial \sqrt{1 - \sin^2 x},$$
$$= \frac{-\partial \sin^2 x}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$
$$= \frac{-\sin x \cdot \cos x \cdot \partial x - \sin x \cdot \cos x \cdot \partial x}{2 \cos x},$$
$$= \frac{-2 \sin x \cdot \cos x \cdot \partial x}{2 \cos x},$$
$$= -\sin x \cdot \partial x,$$

d. h. das Differential des Cosinus x ist gleich dem entgegengesetzten Differential von x, multiplicirt mit dem Sinus von x.

Dieser Satz ergiebt sich auch auf folgende Weise: Bezeichnet ∂x den Zuwachs des Bogens, so ist der entsprechende Zuwachs von $\cos x$,

$$\cos(x + \partial x) - \cos x = \cos x \cdot \cos \partial x - \sin x \cdot \sin \partial x - \cos x,$$
$$= \cos x - \sin x \cdot \partial x - \cos x,$$
$$= -\sin x \cdot \partial x,$$

d. i. $\partial \cos x = -\sin x \cdot \partial x$ (2).

2. Es ist $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

also $$\partial \tang x = \partial \frac{\sin x}{\cos x},$$
$$= \frac{\cos x \cdot \partial \sin x - \sin x \cdot \partial \cos x}{\cos^2 x} \text{ (§. 63.)},$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \partial x,$$
$$= \frac{\partial x}{\cos^2 x} \text{ . (3)},$$

d. h. das Differential der Tangente ist gleich dem des Bogens, dividirt durch das Quadrat des Cosinus dieses Bogens.

3. Da $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

so ist auch $\partial \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x \cdot \partial \cos x - \cos x \cdot \partial \sin x}{\sin^2 x}$,

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \partial x,$$

$$= -\frac{\partial x}{\sin^2 x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

d. h. das Differential der Cotangente ist gleich dem des Bogens, dividirt durch das Quadrat des Sinus dieses Bogens, aber beide Differentiale haben entgegengesetzte Zeichen.

4. Es ist $\sec x = \frac{1}{\cos x}$,

also $\partial \sec x = -\frac{\partial \cos x}{\cos^2 x}$,

$$= \frac{\sin x \cdot \partial x}{\cos^2 x},$$

$$= \frac{\operatorname{tang} x}{\cos x} \cdot \partial x = \operatorname{tang} x \cdot \sec x \cdot \partial x \ldots \ldots \quad (5),$$

d. h. das Differential der Secante ist gleich dem des Bogens, multiplicirt mit der Tangente und Secante des Bogens.

5. Es ist $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$,

also $\partial \operatorname{cosec} x = \frac{-\partial \sin x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x \cdot \partial x}{\sin^2 x}$,

$$= -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x \cdot \partial x \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

d. h. das Differential der Cosecante ist gleich dem des Bogens, multiplicirt mit der Cotangente und Cosecante des Bogens, aber beide Differentiale haben entgegengesetzte Zeichen.

6. Es ist $\operatorname{sinvers} x = 1 - \cos x$,

also $\partial \operatorname{sinvers} x = \sin x \cdot \partial x \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$

d. h. das Differential des Sinusversus ist gleich dem Differential des Bogens, multiplicirt mit dem Sinus des Bogens.

Wenn in den Differential-Gleichungen dieses und des vorhergehenden Paragraphen ∂x in Secunden angegeben ist, so sind diese mit dem Sinus von einer Secunde zu multipliciren und demnächst das Differential der Function nach denselben zu berechnen.

Zu den Differential-Gleichungen der trigonometrischen Functionen gelangt man auch leicht auf geometrischem Wege.

§. 70.

Die Grundlage der nautischen Astronomie ist die sphärische Trigonometrie. Wenn also der Einfluss bestimmt werden soll, den in einem nautisch-astronomischen Problem gewisse unvermeidliche Fehler in den das Dreieck bestimmenden Stücken auf das Resultat haben, so kann dieses durch Differential-Rechnung geschehen, indem die Gleichungen, welche sich auf die sphärischen Dreiecke beziehen, worin die gegebenen und gesuchten Stücke vorkommen, differentiirt werden. In diesen Gleichungen kommen nur trigonometrische Functionen vor, verbunden durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Potenzirungen mit ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Exponenten,

weshalb die vorhergehenden Differential-Gleichungen zu diesem Behuf ausreichend sind.

1. Im sphärischen Dreieck ABC, dessen Seiten a, b, c gegeben sind, wovon a und b fehlerfrei, c aber um die kleine Grösse ∂c fehlerhaft ist, den Einfluss zu bestimmen, den dieser Fehler auf die Winkel A, B und C äussert. Die Fehler der respectiven Winkel durch ∂c bewirkt, seien ∂C, ∂A, ∂B.

Um ∂C zu bestimmen, differentiire man die Gleichung

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C,$$

dieses giebt $-\sin c \cdot \partial c = -\sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot \partial C$,

$$\text{also } \partial C = \frac{\sin c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin C} \cdot \partial c \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\text{und da } \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \text{ so auch } \partial C = \frac{\partial c}{\sin b \cdot \sin A} \;\ldots (2).$$

Um ∂B zu erhalten, differentiire man die Gleichung

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B,$$

$$\text{dies giebt } 0 = -\cos a \cdot \sin c \cdot \partial c - \sin a \cdot \sin c \cdot \sin B \cdot \partial B$$
$$+ \sin a \cdot \cos B \cdot \cos c \cdot \partial c,$$

$$\text{woraus folgt } \partial B = \frac{\sin a \cdot \cos B \cdot \cos c - \cos a \cdot \sin c}{\sin a \cdot \sin c \cdot \sin B} \cdot \partial c,$$

$$\text{oder } \partial B = \left(\operatorname{cotg} c \cdot \operatorname{cotg} B - \frac{\operatorname{cotg} a}{\sin B}\right) \cdot \partial c \;\ldots (3).$$

Aus der obigen Gleichung $\cos b$ ergiebt sich diese:

$$\sin a \cdot \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin c},$$

$$= \frac{\cos b}{\sin c} - \cos a \cdot \operatorname{cotg} c,$$

welche differentiirt

$$-\sin a \cdot \sin B \cdot \partial B = -\frac{\cos b \cdot \cos c \cdot \partial c}{\sin^2 c} + \frac{\cos a \cdot \partial c}{\sin^2 c},$$

$$= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 c} \cdot \partial c, \text{ oder}$$

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \sin B \cdot \partial B = -\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin c} \cdot \partial c \text{ giebt},$$

und wenn man für $\sin a \cdot \sin B$ den gleichen Werth $\sin b \cdot \sin A$ setzt, so

$$\text{hat man } \sin c \cdot \sin A \cdot \partial B = -\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \cdot \partial c,$$

$$= -\cos A \cdot \partial c \text{ (§. 29.)},$$

$$\text{oder } \partial B = -\frac{\operatorname{cotg} A}{\sin c} \cdot \partial c \;\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Ganz ähnliche Gleichungen wie (3) und (4) lassen sich für ∂A herleiten.

2. Wenn im sphärischen Dreieck ABC die Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C gegeben sind, dieser aber um die sehr kleine Grösse ∂C fehlerhaft ist, den Einfluss zu bestimmen, den dieser Fehler auf A, B und c hat.

Die Fehler der respectiven gesuchten Stücke seien ∂A, ∂B, ∂c.

Zur Bestimmung von ∂c dienen die Gleichungen (1) und (2), denn es ergiebt sich nach (1)

$$\partial c = \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin C}{\sin c} \cdot \partial C \;\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

$$\text{oder } \partial c = \sin b \cdot \sin A \cdot \partial C \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Differentiirt man die Gleichung in §. 27. (VI.) nämlich:

$$\operatorname{cotg} A \cdot \sin C = \sin b \cdot \operatorname{cotg} a - \cos b \cdot \cos C,$$

so erhält man $\operatorname{cotg} A \cdot \cos C \cdot \partial C - \frac{\sin C}{\sin^2 A} \cdot \partial A = \cos b \cdot \sin C \cdot \partial C$, also

$$\partial A = (\operatorname{cotg} A \cdot \cos C - \cos b \cdot \sin C) \frac{\sin^2 A}{\sin C} \cdot \partial C \ldots (7),$$

$$\text{oder } \partial A = (\cos A \cdot \sin A \cdot \operatorname{cotg} C - \cos b \cdot \sin^2 A) \cdot \partial C \ldots (8).$$

Differentiirt man die Gleichung

$$\operatorname{cotg} B \cdot \sin C = \sin a \cdot \operatorname{cotg} b - \cos a \cdot \cos C,$$

so ergiebt sich $\operatorname{cotg} B \cdot \cos C \cdot \partial C - \frac{\sin C}{\sin^2 B} \cdot \partial B = \cos a \cdot \sin C \cdot \partial C$, also

$$\partial B = (\operatorname{cotg} B \cdot \cos C - \cos a \cdot \sin C) \frac{\sin^2 B}{\sin C} \cdot \partial C \ldots (9),$$

$$\text{oder } \partial B = (\cos B \cdot \sin B \cdot \operatorname{cotg} C - \cos a \cdot \sin^2 B) \cdot \partial C. \ (10).$$

3. Wenn im Beispiel 2. nicht C, sondern eine der Seiten a oder b, z. B. a fehlerhaft ist, die dadurch in A, B und c bewirkten Fehler ∂A, ∂B und ∂c zu bestimmen.

Zuerst differentiire man die Gleichung

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

in Bezug auf c und a, welches liefert:

$$-\sin c \cdot \partial c = -\cos b \cdot \sin a \cdot \partial a + \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C \cdot \partial a,$$

$$\text{woraus folgt } \partial c = \frac{\cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C}{\sin c} \cdot \partial a \ldots (11),$$

$$\text{oder } \partial c = \frac{\sin c \cdot \cos B}{\sin c} \cdot \partial a \text{ nach [(III.) §. 22.],}$$

$$= \cos B \cdot \partial a \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Die Grundgleichung für $\cos c$ liefert auch

$$\cos C \cdot \sin b = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a} = \frac{\cos c}{\sin a} - \operatorname{cotg} a \cdot \cos b,$$

und wenn man diese in Bezug auf a und c differentiirt, erhält man

$$0 = -\frac{\sin a \cdot \sin c \cdot \partial c + \cos c \cdot \cos a \cdot \partial a}{\sin^2 a} + \frac{\cos b}{\sin^2 a} \cdot \partial a,$$

$$\text{woraus folgt } \partial c = \frac{\cos b - \cos c \cdot \cos a}{\sin c \cdot \sin a} \cdot \partial a \ldots\ldots\ldots (13),$$

oder $\partial c = \cos B \cdot \partial a$ (§. 29.) (14), übereinstimmend mit (12).

Differentiirt man die Gleichung

$$\operatorname{cotg} A \cdot \sin C = \sin b \cdot \operatorname{cotg} a - \cos b \cdot \cos C \text{ [§. 27. (VI.)]}$$

in Bezug auf A und a, so erhält man

$$-\frac{\sin C}{\sin^2 A} \cdot \partial A = -\frac{\sin b}{\sin^2 a} \cdot \partial a,$$

$$\text{woraus folgt } \partial A = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} \cdot \frac{\sin b}{\sin C} \cdot \partial a \ldots\ldots\ldots (15),$$

$$\text{oder } \partial A = \frac{\sin^2 B}{\sin b \cdot \sin C} \cdot \partial a \ldots\ldots\ldots (16).$$

Wird ferner die Gleichung

$$\operatorname{cotg} B \cdot \sin C = \sin a \cdot \operatorname{cotg} b - \cos a \cdot \cos C$$

in Bezug auf B und a differentiirt, so hat man

$$-\frac{\sin C}{\sin^2 B}\cdot\partial B = \cos a\cdot\operatorname{cotg} b\cdot\partial a + \sin a\cdot\cos C\cdot\partial a,$$

$$\text{also } \partial B = -(\cos a\cdot\operatorname{cotg} b + \sin a\cdot\cos C)\frac{\sin^2 B}{\sin C}\cdot\partial a,$$

$$= -\operatorname{cotg} c\cdot\sin B\cdot\partial a \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (17).$$

4. Wenn in dem Beispiele 2. die Seiten a und b gegeben sind, sowie auch C, erstere um ∂a und ∂b fehlerhaft sind und C constant ist, den Einfluss zu bestimmen, den diese Fehler auf c haben.

Zu diesem Behufe differentiire man die Gleichung

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}\ (\S.\ 29.),$$

dieses giebt

$$0 = \sin a\cdot\sin b\cdot\partial(\cos c - \cos a\cdot\cos b) - (\cos c - \cos a\cdot\cos b)\cdot\partial(\sin a\cdot\sin b).$$

$$\text{d. i. } 0 = \begin{cases} -\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c\cdot\partial c + \sin a\cdot\sin b\cdot\sin a\cdot\cos b\cdot\partial a \\ \qquad + \sin a\cdot\sin b\cdot\cos a\cdot\sin b\cdot\partial b \\ -\cos c\cdot\sin a\cdot\cos b\cdot\partial b + \cos a\cdot\sin a\cdot\cos^2 b\cdot\partial b \\ -\cos c\cdot\cos a\cdot\sin b\cdot\partial a + \cos^2 a\cdot\cos b\cdot\sin b\cdot\partial a, \end{cases}$$

also $\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c\cdot\partial c$

$$= \begin{cases} (\sin^2 a\cdot\sin b\cdot\cos b + \cos^2 a\cdot\sin b\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b\cdot\cos c)\partial a \\ +(\sin^2 b\cdot\sin a\cdot\cos a + \cos^2 b\cdot\sin a\cdot\cos a - \sin a\cdot\cos b\cdot\cos c)\partial b. \end{cases}$$

Erwägt man, dass $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ ist, so geht diese Gleichung über in

$$\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c\cdot\partial c$$
$$= (\sin b\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b\cdot\cos c)\,\partial a + (\sin a\cdot\cos a - \sin a\cdot\cos b\cdot\cos c)\,\partial b,$$
$$= \sin b\,(\cos b - \cos a\cdot\cos c)\,\partial a + \sin a\,(\cos a - \cos b\cdot\cos c)\,\partial b.$$

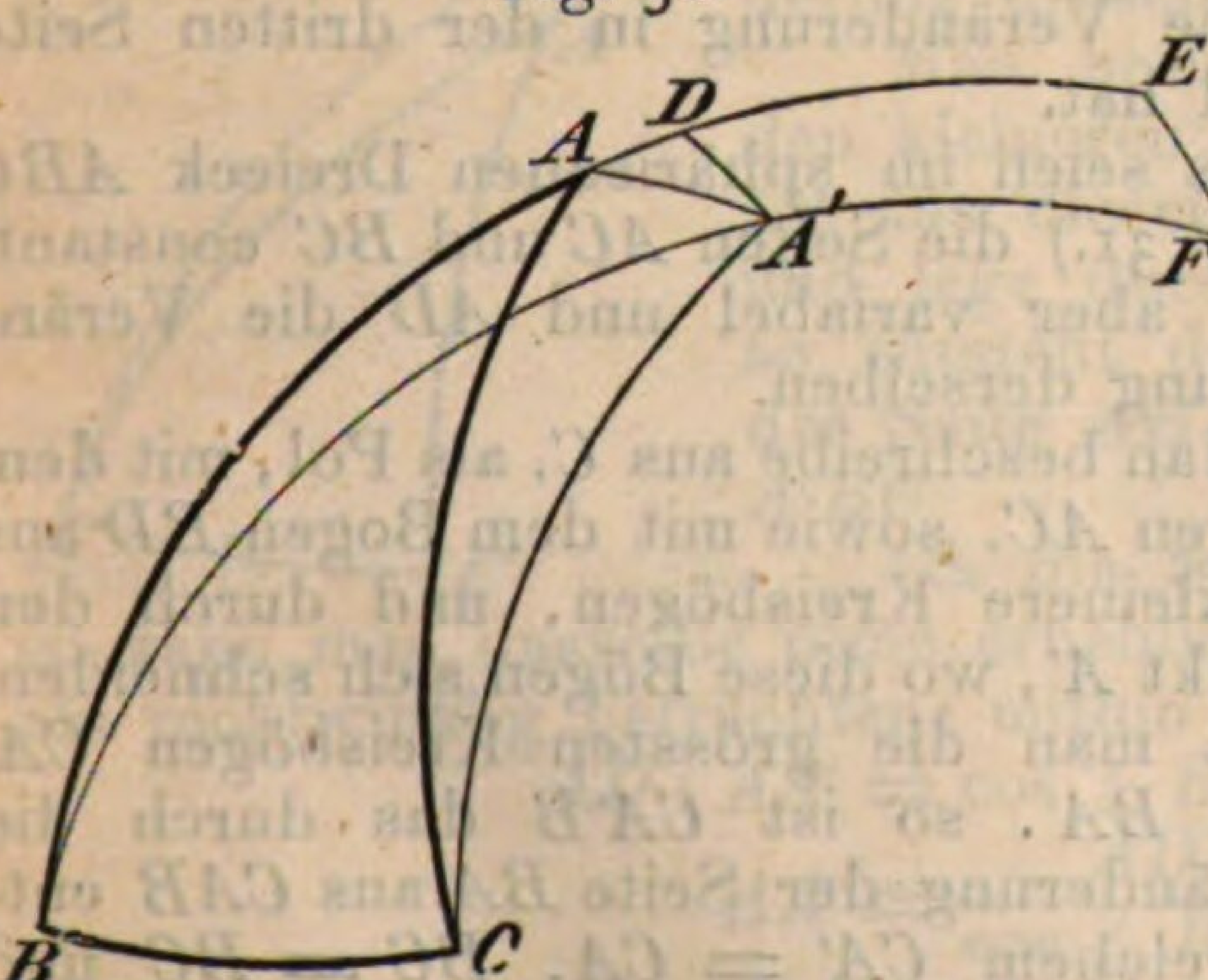
$$\text{also } \partial c = \frac{\cos b - \cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}\cdot\partial a + \frac{\cos a - \cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}\cdot\partial b,$$

$$\text{oder } \partial c = \cos B\cdot\partial a + \cos A\cdot\partial b\ (\S.\ 29.) \quad\ldots\ldots\ldots\quad (18).$$

§. 71.

Für diejenigen, denen es vielleicht zu schwer scheinen sollte, den in §. 70. gegebenen Entwickelungen folgen zu können, sind nachstehend die Differential-Gleichungen sphärischer Dreiecke für die Fälle, welche in der nautischen Astronomie vorkommen, auf geometrischem Wege abgeleitet.

Fig. 30.



1. Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks constant sind, zu finden, wie eine kleine Veränderung in der dritten Seite auf die anliegenden Winkel wirkt.

Es seien im sphärischen Dreieck ABC (Fig. 30.) die Seiten AC und BC constant, AB aber variabel, AD die Veränderung derselben und $\angle A$ kleiner als 90°.

Man beschreibe mit dem Bogen BD aus B, sowie mit dem Bogen AC aus C kleinere Kreisbögen und durch den Schnittpunkt derselben A' lege man die grössten Kreisbögen $A'B$ und $A'C$, so ist das Dreieck $A'BC$ durch die angenommene Veränderung des Dreiecks ABC entstanden; denn es ist $AC = A'C$, $BC = BC$ und $BD = BA'$.

Man verlängere ferner die Bögen BA und BA' nach E und F, dass

BE und *BF* Quadranten werden, so ist *EF* das Maass der Veränderung des der variabeln Seite anliegenden Winkels *B*.

Das sphärische Dreieck *ADA'* kann, da die Seiten sehr klein sind, ohne erheblichen Fehler als geradlinig und daher bei *D* als rechtwinklig betrachtet werden; mithin verhält sich

$$AD : DA' = r : \text{tang} \angle DAA' = r : -\text{cotg} \angle BAC;$$ ferner verhält sich $$DA' : EF = \sin BD : r,$$
mithin $$AD : EF = \sin BD : -\text{cotg} \angle BAC,$$ und es ergiebt sich

$$EF = -\frac{AD \cdot \text{cotg} \angle BAC}{\sin (AB + AD)},$$

$$= -\frac{AD \cdot \text{cotg}\, BAC}{\sin AB} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (a),$$

weil $\sin (AB + AD) = \sin AB \cdot \cos AD + \cos AB \cdot \sin AD$ ist, und da $\cos AD$ nahe 1 und $\sin AD$ ein sehr kleiner Bruch ist, ohne erheblichen Fehler $\sin (AB + AD) = \sin AB$ setzen kann; oder, wenn man die Veränderung der Seite *AB* mit *dc* und die entsprechende Veränderung des anliegenden Winkels *B* mit *dB* bezeichnet, so wird übereinstimmend mit Gleichung (4) in §. 70.

$$dB = -\frac{dc \cdot \text{cotg}\, A}{\sin c} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I.);$$

wenn $A < 90^\circ$ und $dc \pm$, so ist $dB \mp$, und
wenn $A > 90^\circ$ und $dc \pm$, so ist $dB \pm$.

2. Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks constant sind, zu finden, welchen Einfluss eine kleine Veränderung in einem der anliegenden Winkel auf die dritte Seite hat.

Aus der Gleichung (a) in 1. folgt:

$$AD = -\frac{EF \cdot \sin AB}{\text{cotg}\, BAC} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b),$$

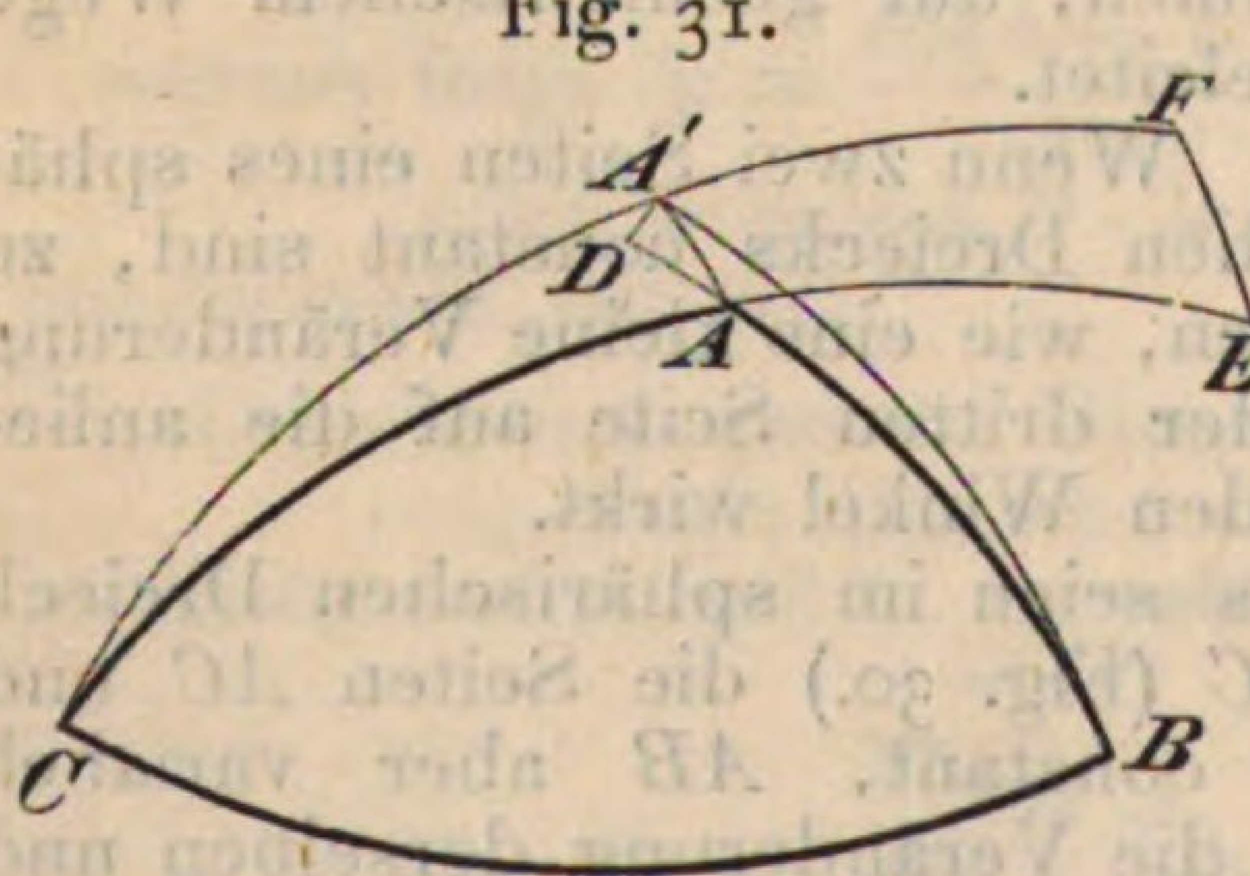
und wenn man dieselben Bezeichnungen, wie in (a) macht, so ist

$$dc = -\frac{dB \cdot \sin c}{\text{cotg}\, A} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (II.);$$

wenn $A < 90^\circ$ und $dB \pm$, so ist $dc \mp$, und
wenn $A > 90^\circ$ und $dB \pm$, so ist $dc \pm$.

3. Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks constant sind, zu finden, welchen Einfluss eine kleine Veränderung in der dritten Seite auf den gegenüberstehenden Winkel hat.

Fig. 31.



Es seien im sphärischen Dreieck *ABC* (Fig. 31.) die Seiten *AC* und *BC* constant, *AB* aber variabel und *AD* die Veränderung derselben.

Man beschreibe aus *C*, als Pol, mit dem Bogen *AC*, sowie mit dem Bogen *BD* aus *B* kleinere Kreisbögen, und durch den Punkt *A'*, wo diese Bögen sich schneiden, lege man die grössten Kreisbögen *CA'* und *BA'*, so ist *CA'B* das durch die Veränderung der Seite *BA* aus *CAB* entstandene sphärische Dreieck, in welchem $CA' = CA$, $BC = BC$ und $BA' = BD$ ist.

Man verlängere die grössten Kreisbögen *CA* und *CA'*, und mache *CE* und $CF = 90^\circ$, so ist *EF* das Maass der Veränderung des Winkels *C*.

Das $\Delta\, DA'A$ kann, da die Seiten sehr klein sind, ohne erheblichen Fehler als geradlinig und bei *D* als rechtwinklig betrachtet werden; es verhält sich daher:

$$\begin{aligned} DA : A'A &= \sin \angle DA'A \; (= \sin \angle CAB) : r; \text{ aber} \\ A'A : FE &= \sin CA \qquad\qquad\qquad\qquad : r, \text{ mithin} \\ \hline DA : FE &= \sin \angle CAB \cdot \sin CA \qquad\quad : r^2, \text{ und es ist} \end{aligned}$$

$$FE = \frac{DA}{\sin \angle CAB \cdot \sin CA} \;\ldots\ldots\ldots\; (\text{c.}),$$

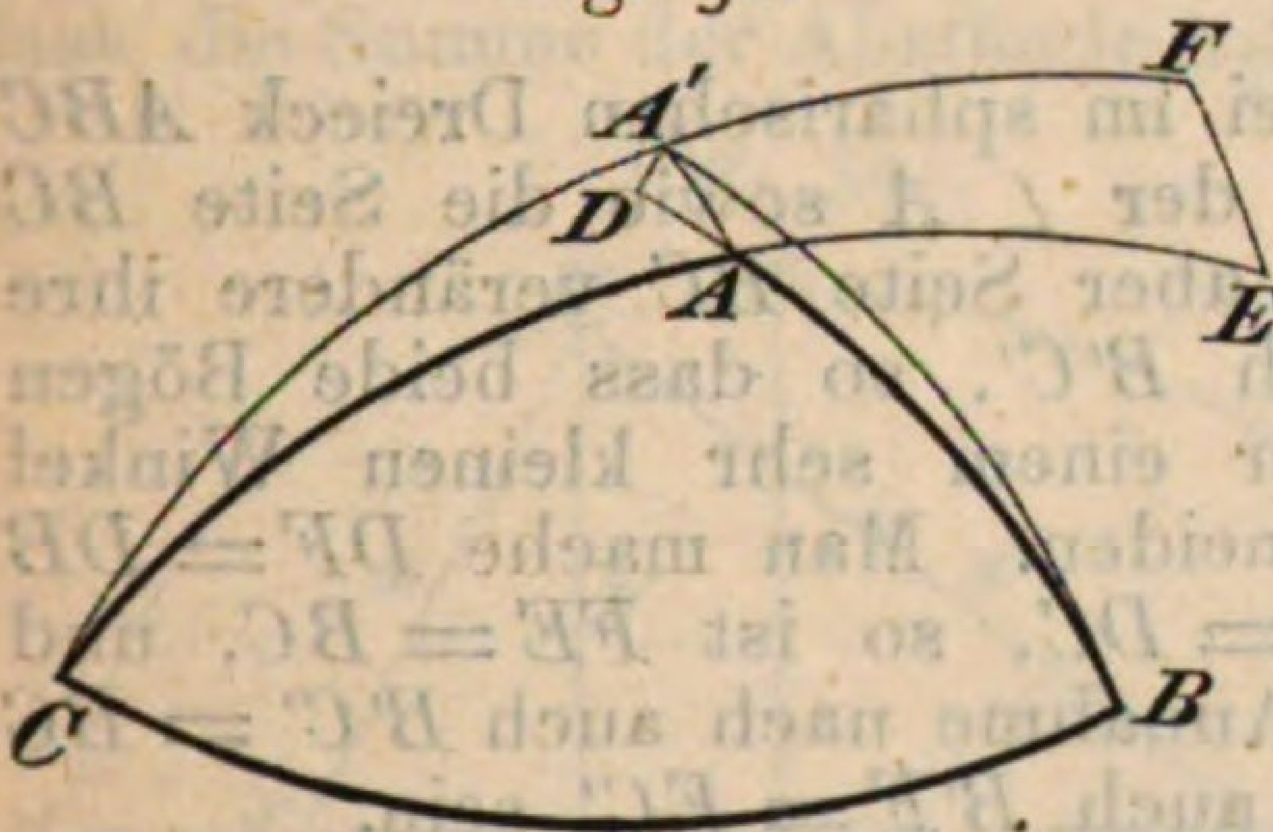
oder wenn man die Veränderung des Winkels C mit dC und die der Seite AB mit dc bezeichnet, so ist übereinstimmend mit (2) und (1) in §. 70.

$$dC = \frac{dc}{\sin A \cdot \sin b},$$

$$= \frac{\sin c \cdot dc}{\sin C \cdot \sin a \cdot \sin b} \;\ldots\ldots\ldots\; (\text{III.});$$

wenn $dc \pm$, ist $dC \pm$.

Fig. 31.



4. Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks constant sind, aber der eingeschlossene Winkel veränderlich ist, zu finden, welchen Einfluss eine kleine Veränderung desselben auf die gegenüberstehende Seite hat.

Man nehme in Fig. 31. wieder die Seiten AC und CB constant und den Winkel C veränderlich an, so folgt aus (III.), übereinstimmend mit (6) und (5) in §. 70.,

$$dc = dC \cdot \sin A \cdot \sin b,$$

$$= \frac{\sin C \cdot \sin a \cdot \sin b}{\sin c} \cdot dC \;\ldots\ldots\; (\text{IV.});$$

wenn $dC \pm$, ist $dc \pm$.

5. Wenn in einem sphärischen Dreieck eine Seite und ein anliegender Winkel constant sind, aber die dem constanten Winkel gegenüberliegende Seite variabel angenommen wird, den Einfluss zu finden, welchen eine kleine Veränderung derselben auf die dritte Seite hat.

Fig. 32.



Es sei im sphärischen Dreieck ABC (Fig. 32.) die Seite BC und der Winkel C constant, die Seite AB aber veränderlich und AD die Veränderung derselben.

Man beschreibe aus B mit dem Bogen BD den kleineren Kreisbogen DA', verlängere die Seite CA bis dieselbe den Bogen DA' in A' schneidet und lege durch A' den grössten Kreisbogen BA', so entsteht durch die angenommene Veränderung der Seite AB aus dem Dreieck ABC das Dreieck $A'BC$.

Da die Seiten im $\Delta\ AA'D$ sehr klein sind, so kann man dasselbe ohne erheblichen Fehler als geradlinig und bei D als rechtwinklig betrachten; mithin verhält sich

$$AD : AA' = \cos \angle BAC : r, \text{ folglich ist}$$

$$AA' = \frac{AD}{\cos \angle BAC},$$

und wenn man die Veränderung der Seite AB mit dc und die entsprechende Veränderung der Seite AC mit db bezeichnet, so wird

$$db = \frac{dc}{\cos A} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\text{V.});$$

wenn $A < 90^\circ$ und $dc \pm$, so ist auch $db \pm$, und
wenn $A > 90^\circ$ und $dc \pm$, so ist $db \mp$.

6. Wenn in einem sphärischen Dreieck eine Seite und ein anliegender Winkel constant sind, zu finden, welchen Einfluss eine kleine Veränderung in der dem constanten Winkel anliegenden Seite auf die demselben gegenüberstehende Seite hat.

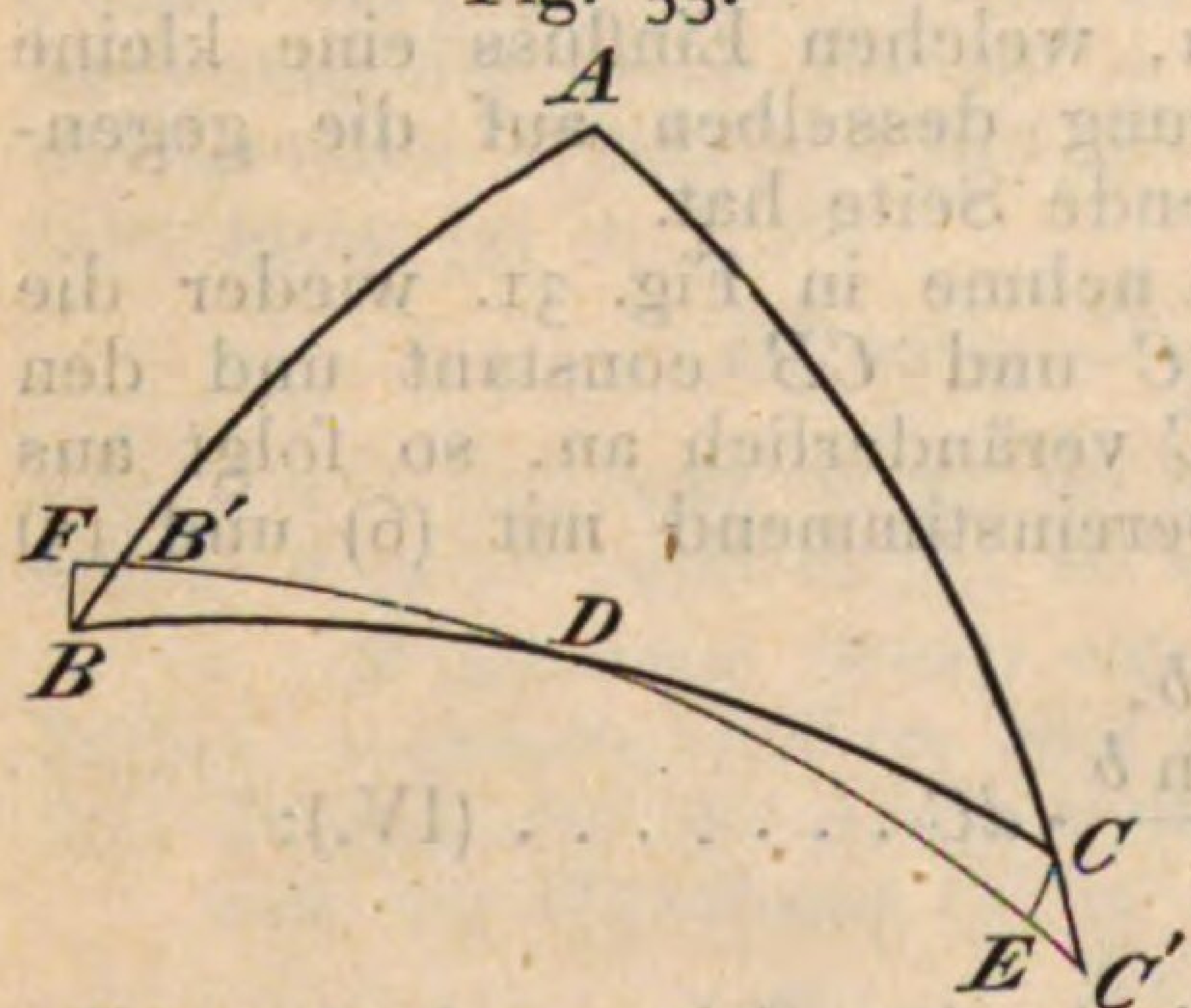
Es sei in Fig. 32. die Seite BC sowie der Winkel C constant und die Seite AC veränderlich, so hat man nach (V.) übereinstimmend mit (12) und (14) in §. 70.

$$dc = db \cdot \cos A \text{ (VI.);}$$

wenn $A < 90^\circ$ und $db \pm$, so ist $dc \pm$; und
wenn $A > 90^\circ$ und $db \pm$, so ist $dc \mp$.

7. Wenn in einem sphärischen Dreieck ein Winkel und die gegenüberstehende Seite constant sind, zu finden, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in einer dem constanten Winkel anliegenden Seite auf die andere diesem Winkel anliegende Seite hat.

Fig. 33.



Es sei im sphärischen Dreieck ABC (Fig. 33.) der $\angle A$ sowie die Seite BC constant, aber Seite BC verändere ihre Lage nach $B'C'$, so dass beide Bögen sich unter einem sehr kleinen Winkel in D schneiden. Man mache $DF = DB$ und $DE = DC$, so ist $FE = BC$, und weil der Annahme nach auch $B'C' = BC$ ist, muss auch $B'F = EC'$ sein.

Die kleinen Dreiecke $BB'F$ und CEC' kann man ohne erheblichen Fehler als geradlinig und bei F und E als rechtwinklig betrachten, und es verhält sich demnach:

$$r : CC' = \cos \angle EC'C : EC',$$
$$r : BB' = \sin \angle FBB' : FB'.$$

Da die ersten und letzten Glieder in beiden Proportionen gleich sind, so verhält sich auch

$$CC' : BB' = \sin \angle FBB' : \cos \angle EC'C, \text{ oder}$$
$$db : \ dc = - \cos \angle B : \cos \angle C,$$

weil db den Fehler in AC und dc die entsprechende Veränderung in AB bezeichnet.

Es ist also $$db = -\frac{dc \cdot \cos \angle B}{\cos \angle C}, \text{ oder}$$

$$dc = -\frac{db \cdot \cos C}{\cos B} \text{ (VII.);}$$

wenn B und C gleichartig und $dc \pm$, so ist $db \mp$,
wenn B und C ungleichartig, und $dc \pm$, so ist $db \pm$.

Gleichung (VII.) ergiebt sich aus (18) in §. 70., wenn man in letzterer $dc = 0$ setzt.

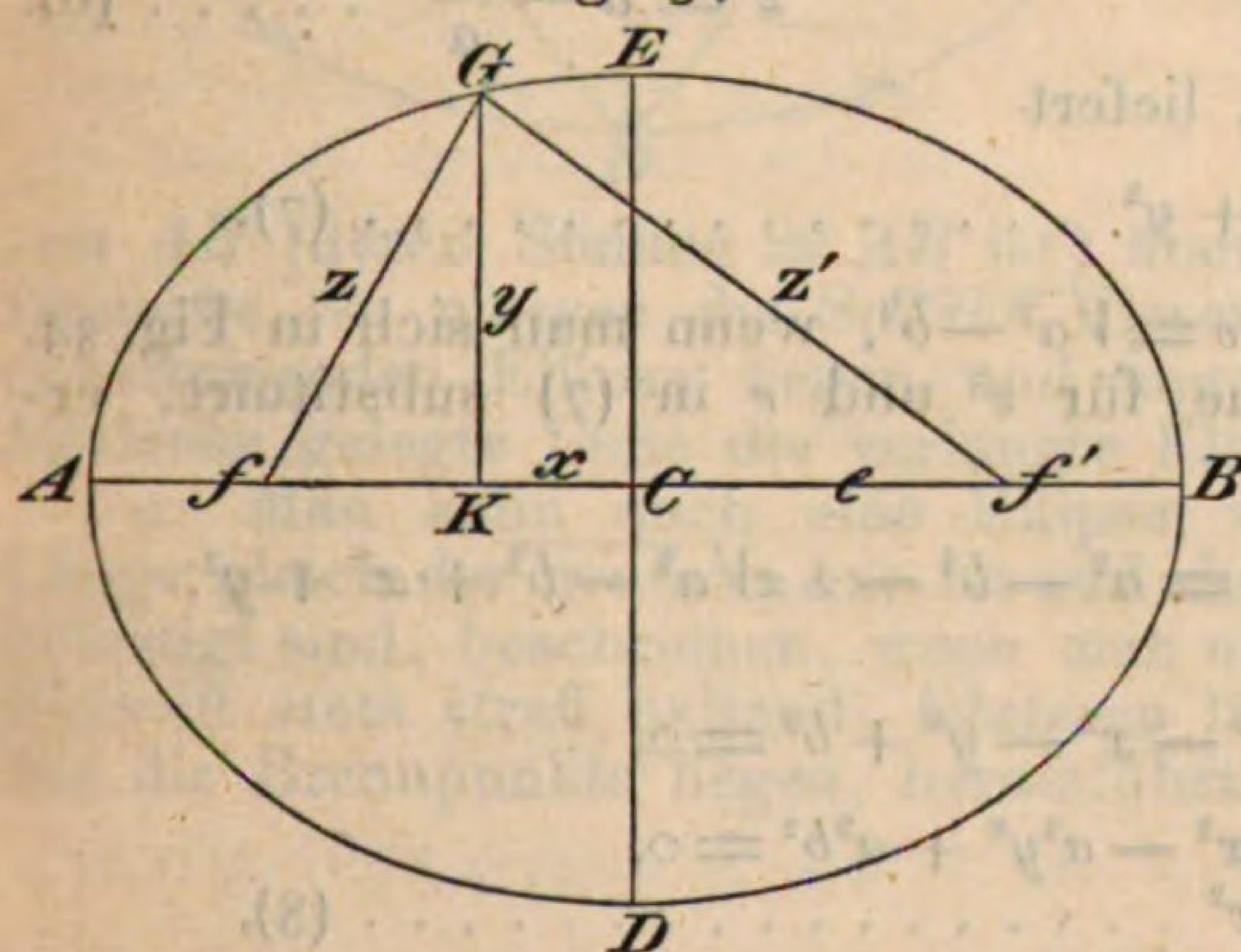
Einiges über die Ellipse.

§. 72.

Erklärung der Ellipse.

Die Ellipse ist eine geschlossene Curve, Fig. 34., welche die Eigenschaft hat, dass die Summe der Abstände irgend eines Punktes derselben (z. B. G) von zwei festen Punkten f und f', die sich innerhalb dieser Curve befinden, immer dieselbe bleibt.

Fig. 34.



Diese beiden festen Punkte f und f' nennt man Brennpunkte; die Gerade AB, welche durch die Brennpunkte geht und immer $= Gf + Gf'$ ist, heisst die grosse Axe der Ellipse. Die Gerade ED, welche in dem Mittelpunkt C der grossen Axe normal auf letzterer steht, wird die kleine Axe der Ellipse genannt und der Punkte C, in dem die beiden Axen sich halbiren, ist der Mittelpunkt der Ellipse. Die Abstände der Brennpunkte von diesem Mittelpunkte, welche einander gleich sind, nennt man die lineare Excentricität der Ellipse.

Die Normalen von den Punkten der Curve auf die grosse Axe nennt man Ordinaten und das Stück der grossen Axe zwischen dem Mittelpunkte der Ellipse und der Ordinate, die zu letzterer gehörige Abscisse. Die Ordinate und Abscisse irgend eines Punktes der Ellipse nennt man auch Coordinaten, deren Anfangspunkt im Folgenden immer in dem Centrum der Ellipse angenommen wird.

Die grosse Axe der Ellipse ist dem Vorstehenden nach die Abscissen- und die kleine die Ordinaten-Axe.

§. 73.

Die Gleichung der Ellipse zu finden.

Bezeichnet man in der Ellipse:

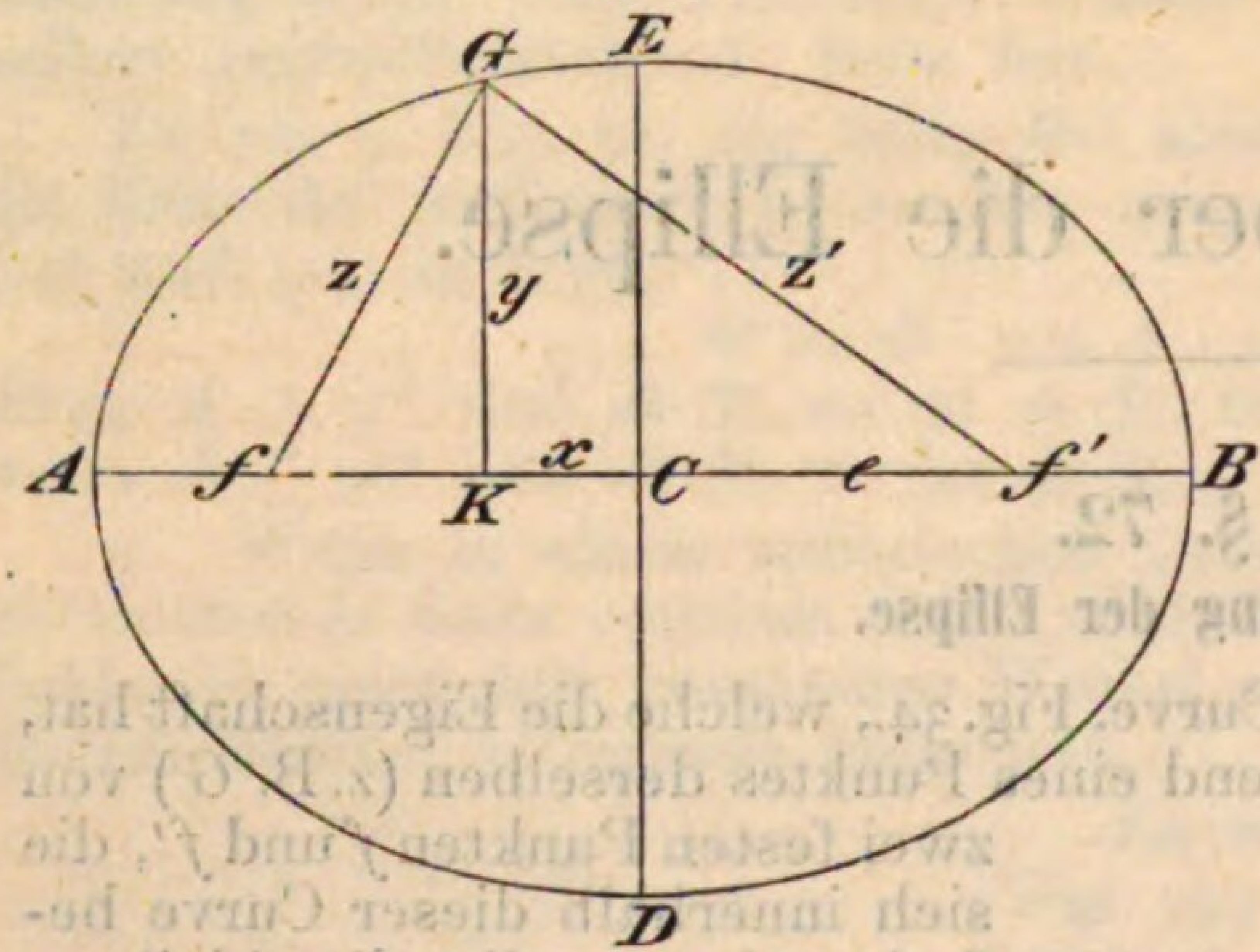
die grosse Axe mit $2a$,
die kleine Axe » $2b$,
die lineare Excentricität » e,
die Ordinaten » y,
die Abscissen, vom Centrum gezählt, » x,

und die Entfernungen eines Punktes von den Brennpunkten f und f' mit z und z', so ergeben sich, wenn GK normal auf AB steht (Fig. 34.), aus den bei K rechtwinkligen Dreiecken fKG und $f'KG$ die Gleichungen:

$$z^2 = (e - x)^2 + y^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$
$$z'^2 = (e + x)^2 + y^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Subtrahirt man (1) von (2), so erhält man

Fig. 34.



$$z'^2 - z^2 = (z' + z)(z' - z) = 4ex,$$

woraus folgt

$$z' - z = \frac{4ex}{z' + z},$$

oder

$$z' - z = \frac{2ex}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

weil $z' + z = 2a$ (4)

nach §. 72.

Aus (3) und (4) erhält man leicht

$$z' = a + \frac{ex}{a} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

$$z = a - \frac{ex}{a} \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

dieser Werth für z in (1) gesetzt, liefert

$$a^2 - 2ex + \left(\frac{ex}{a}\right)^2 = (e - x)^2 + y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Es ist aber $e^2 = a^2 - b^2$ und $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, wenn man sich in Fig. 34. fE gezogen denkt. Diese Werthe für e^2 und e in (7) substituirt, ergiebt sich:

$$a^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = a^2 - b^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2} + x^2 + y^2,$$

woraus folgt $\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - x^2 - y^2 + b^2 = 0$,

oder $a^2x^2 - b^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2 = 0$,

oder $a^2b^2 = a^2y^2 + b^2x^2$ (8),

welches die Gleichung der Ellipse ist.

Aus (8) ergiebt sich ferner:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Aus (9) und (10) erkennt man leicht die Form der Ellipse, nämlich, dass sie eine geschlossene Curve ist und von den beiden Axen in vier congruente Theile getheilt wird.

§. 74.

Sind die beiden Axen der Ellipse gegeben, so ist

$$e = \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

wonach also die Excentricität e leicht gefunden werden kann, und diese von der Mitte der grossen Axe auf letzterer nach beiden Seiten abgetragen, giebt die Brennpunkte der Ellipse. Zu diesen gelangt man auch, wenn man von einem Endpunkt der kleinen Axe aus mit der halben grossen Axe einen Kreisbogen so weit beschreibt, dass die grosse Axe in zwei Punkten davon durchschnitten wird.

Wenn $a = b$ ist, so wird $e = 0$ und Gleichung (8) geht über in

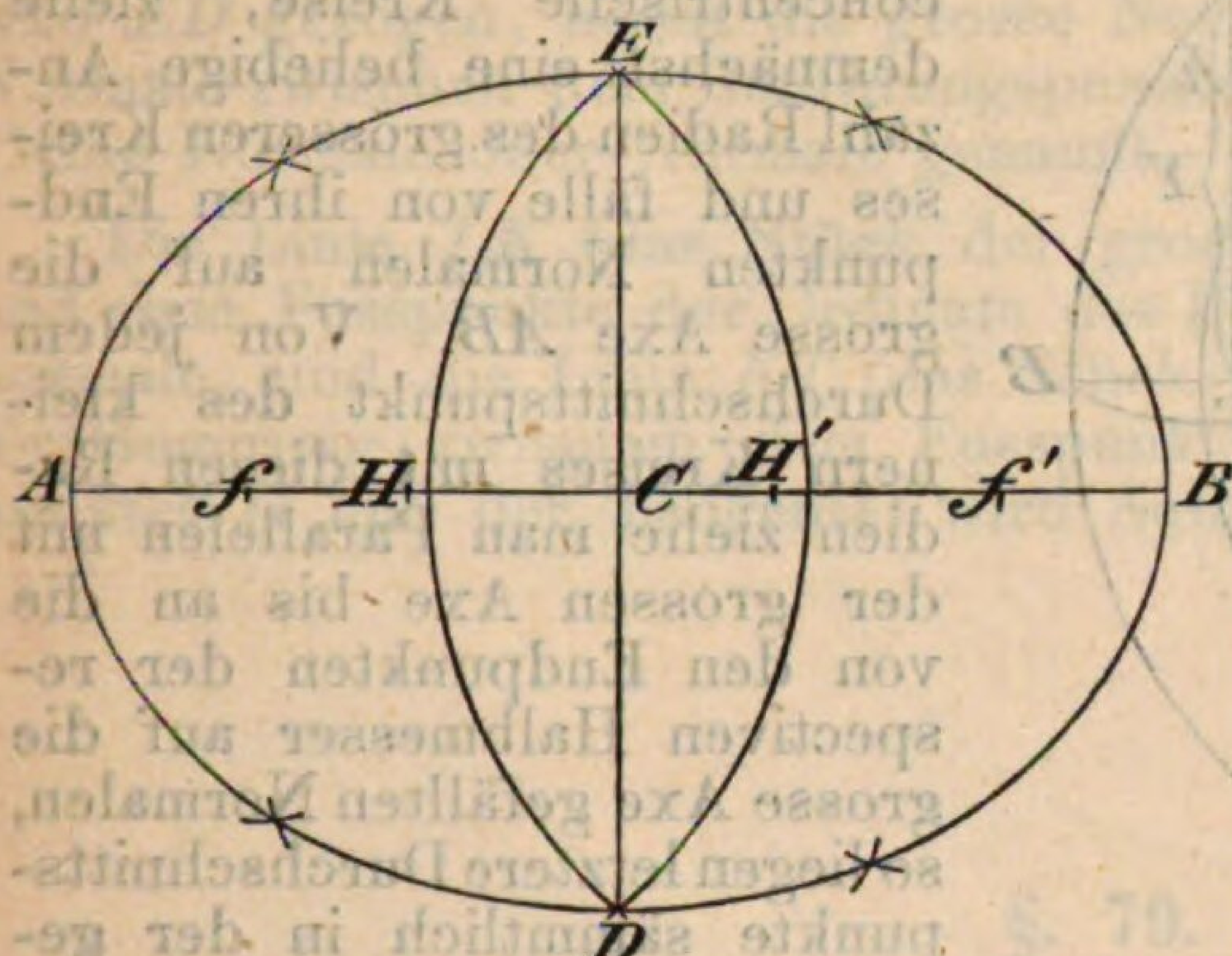
$$a^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

welches die Gleichung der Kreislinie ist. Letztere ist somit als eine Ellipse zu betrachten, deren Axen gleich sind und deren Excentricität $= 0$ ist, also deren Brennpunkte in das Centrum fallen.

§. 75.

Eine Ellipse zu construiren, wenn die grosse Axe $= 2a$ und der Abstand ihrer Brennpunkte $= 2e$ gegeben ist.

Fig. 35.



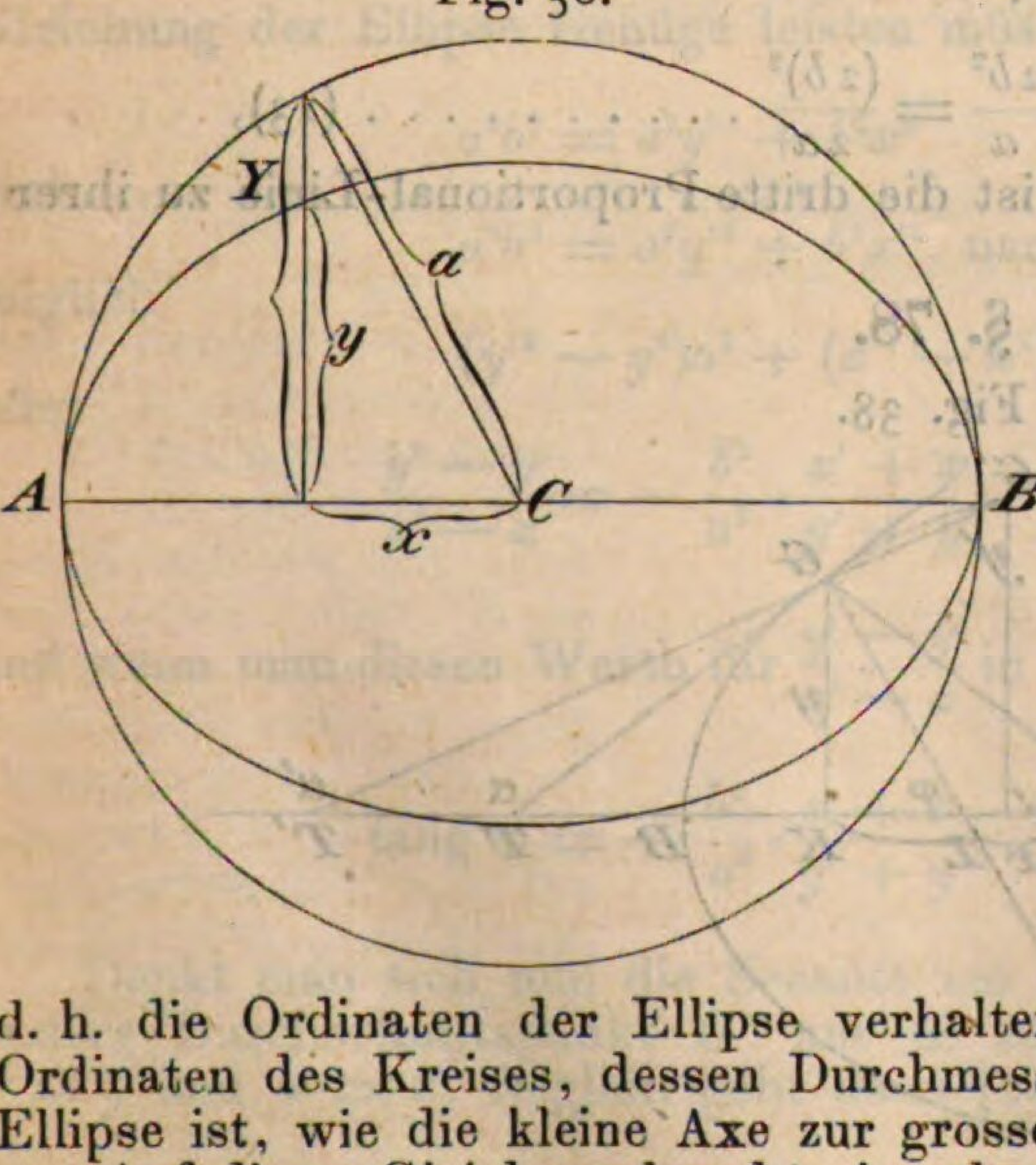
1. Man ziehe eine gerade Linie, mache auf derselben $AB = 2a$ (Fig. 35.); von der Mitte C dieser Linie trage die Excentricität $Cf = Cf' = e$ ab, beschreibe ober- und unterhalb der Geraden ff' als Grundlinie mit a gleichschenklige Dreiecke, und verbinde die Spitzen E und D derselben durch eine Gerade, so ist $DE = 2b$ die kleine Axe.

Hiernach nehme man zwischen f und f' in AB beliebige Punkte an, die jedoch nicht zu weit von einander entfernt sind, beschreibe dann mit je zwei solchen Stücken von AB (deren Summe $= AB$ ist) über und unter ff', als Grundlinie, Dreiecke, so müssen die Spitzen dieser Dreiecke nach §. 72. in der zu construirenden Ellipse liegen und somit die durch die Spitzen dieser Dreiecke gelegte Linie die verlangte Ellipse sein.

2. Man kann auch eine Ellipse vermittelst eines Fadens, dessen Länge gleich der grossen Axe ist und dessen Enden in den Brennpunkten befestigt sind, beschreiben, wenn man nämlich diesen Faden durch einen Bleistift stets straff haltend, letzteren längs ersterem auf der Ebene, in der die Brennpunkte liegen, herumführt.

§. 76.

Fig. 36.



Wird über der grossen Axe der Ellipse (Fig. 36.) ein Kreis beschrieben, der diese Axe zum Durchmesser hat, so finden zwischen derselben Abscisse x und den entsprechenden Ordinaten y und Y beider Curven nach (8) §. 73. und (11) §. 74. die Gleichungen statt:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

und

$$Y^2 = a^2 - x^2,$$

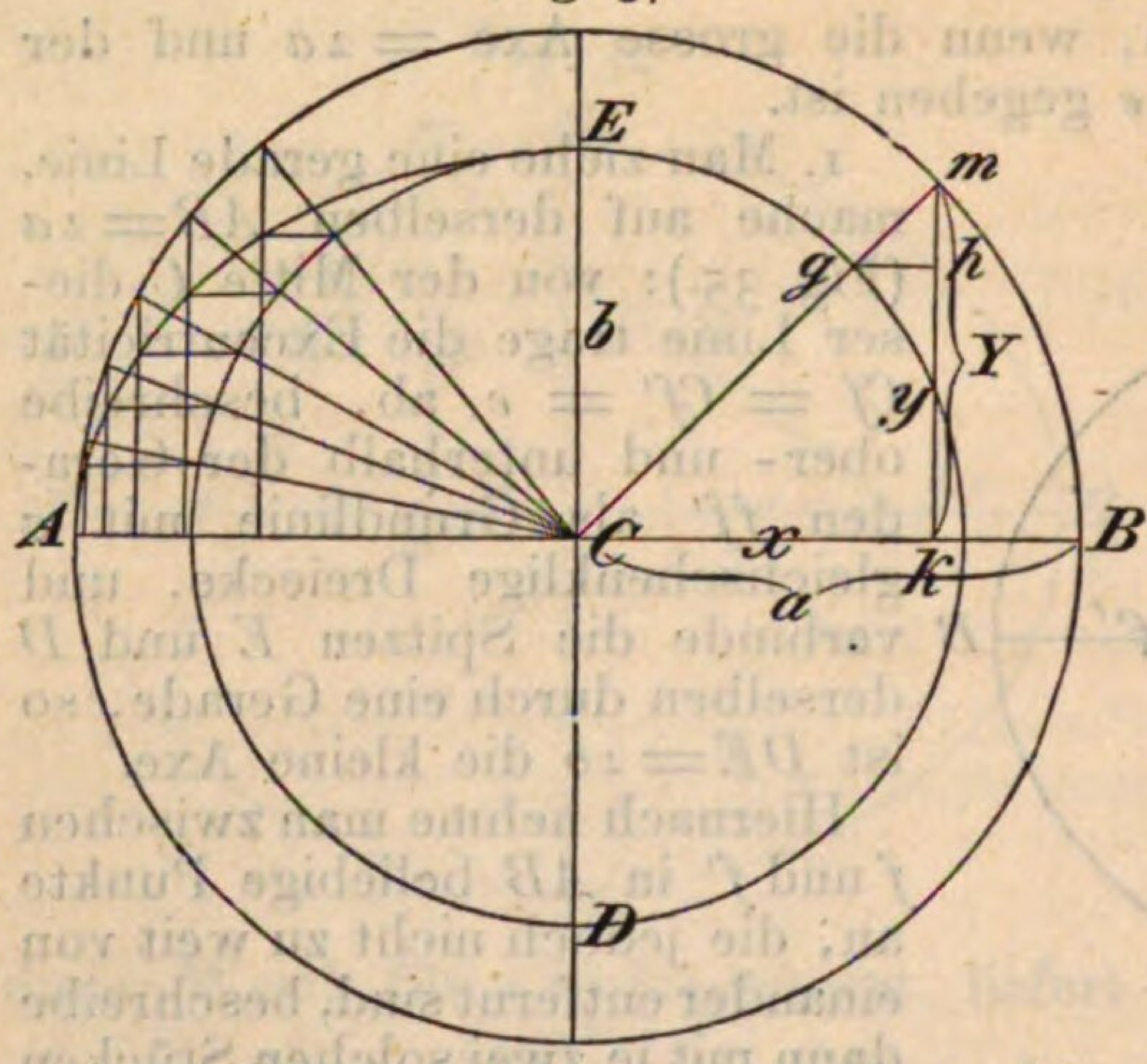
folglich

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a} = \frac{2b}{2a} \quad \ldots \quad (12),$$

d. h. die Ordinaten der Ellipse verhalten sich zu den entsprechenden Ordinaten des Kreises, dessen Durchmesser zugleich die grosse Axe der Ellipse ist, wie die kleine Axe zur grossen Axe der Ellipse.

Auf dieser Gleichung beruht ein sehr einfaches Verfahren, die Ellipse zu construiren, wenn die beiden Axen derselben gegeben sind.

Fig. 37.



Man beschreibe nämlich (Fig. 37.) aus dem Centrum C der verlangten Ellipse mit den beiden halben Axen CD und CB concentrische Kreise, ziehe demnächst eine beliebige Anzahl Radien des grösseren Kreises und fälle von ihren Endpunkten Normalen auf die grosse Axe AB. Von jedem Durchschnittspunkt des kleinern Kreises mit diesen Radien ziehe man Parallelen mit der grossen Axe bis an die von den Endpunkten der respectiven Halbmesser auf die grosse Axe gefällten Normalen, so liegen letztere Durchschnittspunkte sämmtlich in der gesuchten Ellipse; denn es sei $mk \perp CB$, $gh \mathrel{+\!\!\!=} CB$, so hat man

$$Cm : Cg = km : kh,$$

d. i.

$$a : b = Y : y,$$

also übereinstimmend mit (12), und sonach ist h ein Punkt der gesuchten Ellipse.

§. 77.

Die doppelte Ordinate der Ellipse, durch einen ihrer Brennpunkte gehend, wird Parameter genannt und hier mit p bezeichnet.

Setzt man in $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ für x^2 den in diesem Falle gleichen Werth e^2 oder $a^2 - b^2$ (§. 74.), so wird

$$y = \pm \frac{b^2}{a},$$

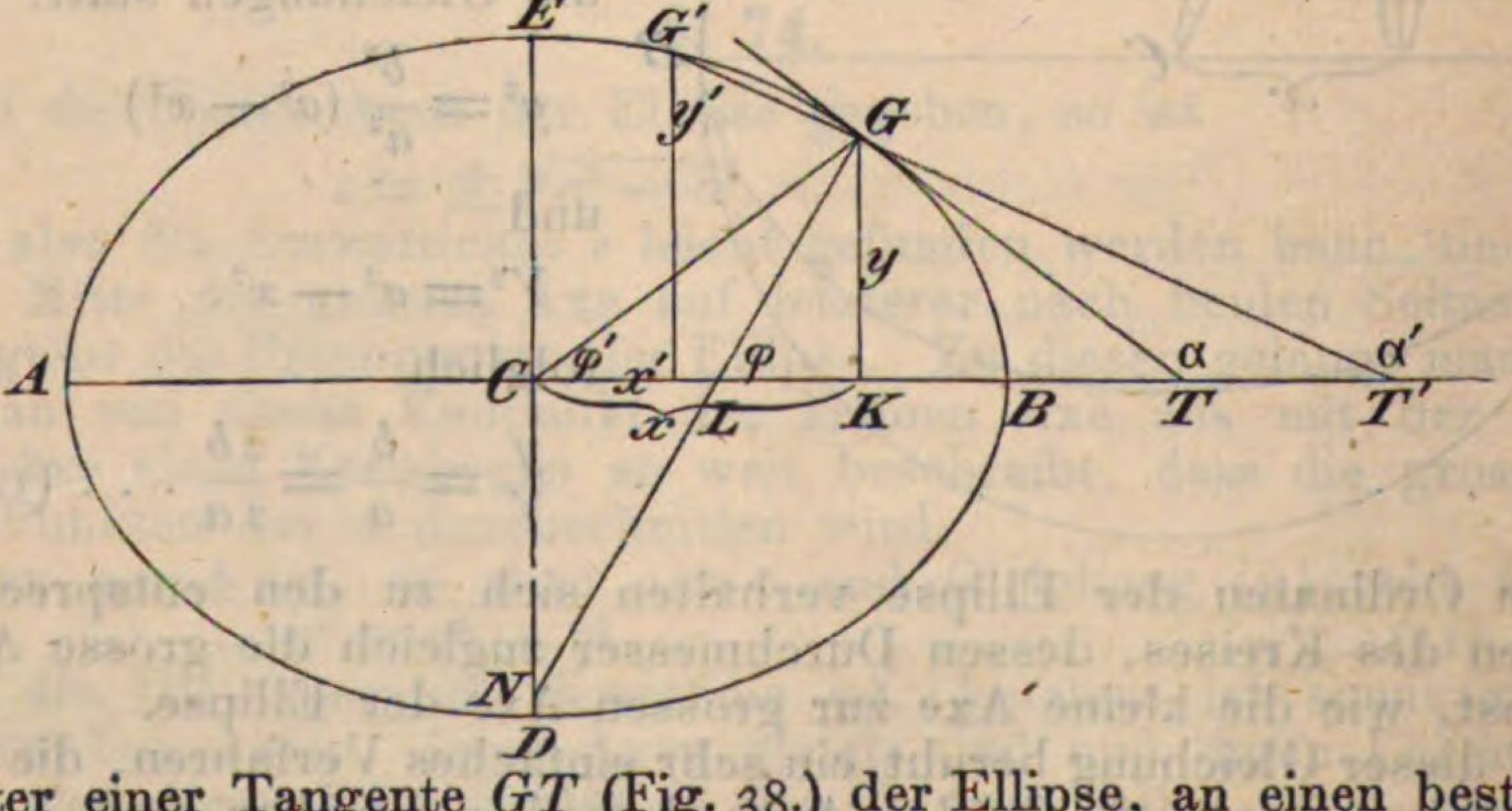
folglich

$$2y = p = \frac{2b^2}{a} = \frac{(2b)^2}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

d. h. der Parameter der Ellipse ist die dritte Proportional-Linie zu ihrer grossen und kleinen Axe.

§. 78.

Fig. 38.



Unter einer Tangente GT (Fig. 38.) der Ellipse, an einen bestimmten Punkt G (Tangirungspunkt) derselben gezogen, versteht man die gerade

Linie GT, worin die durch den Berührungspunkt G gehende Secante $G'T'$ übergeht, indem dieselbe sich um den Berührungspunkt G dreht, bis der andere Durchschnittspunkt G' mit G zusammenfällt. Die Gerade GN, vom Berührungspunkt G normal auf die Tangente GT bis zur kleinen Axe ED gezogen, heisst die grosse Normale, und GL (der Theil dieser Normale zwischen dem Berührungspunkte und der grossen Axe) wird die kleine Normale oder Normale genannt.

Die Linie LK (das Stück der grossen Axe zwischen der Normale und dem Fusspunkte der Ordinate des Berührungspunktes G) heisst Subnormale, und die Linie KT (das Stück von der grossen Axe und deren Verlängerung zwischen dem Fusspunkt der Ordinate des Berührungspunktes G und der Tangente) wird Subtangente genannt.

§. 79.

Den Winkel GTT' oder α (Fig. 38.), welchen die Tangente GT an den Punkt G gezogen, mit der verlängerten Abscissen-Axe macht, zu finden.

Die Gleichung für die Secante $G'T'$, welche durch den gegebenen Punkt G und durch einen andern Punkt G' geht, von welchem letzteren die Coordinaten x' und y' sind, und wenn man das Supplement von $\angle\, GT'K$ mit α' bezeichnet, ist, wie sich leicht aus der Figur ergiebt,

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{y' - y}{x' - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Da aber die Coordinaten x, y und x', y' der Punkte G und G' der Gleichung der Ellipse Genüge leisten müssen, so hat man:

$$a^2b^2 = a^2y^2 + b^2x^2$$

und

$$a^2b^2 = a^2y'^2 + b^2x'^2, \text{ nach §. 73.,}$$

folglich

$$(y'^2 - y^2)a^2 + (x'^2 - x^2)\,b^2 = 0,$$

oder

$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x}{y' + y},$$

und wenn man diesen Werth für $\frac{y' - y}{x' - x}$ in (14) substituirt, so ist

$$\operatorname{tang} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x}{y' + y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

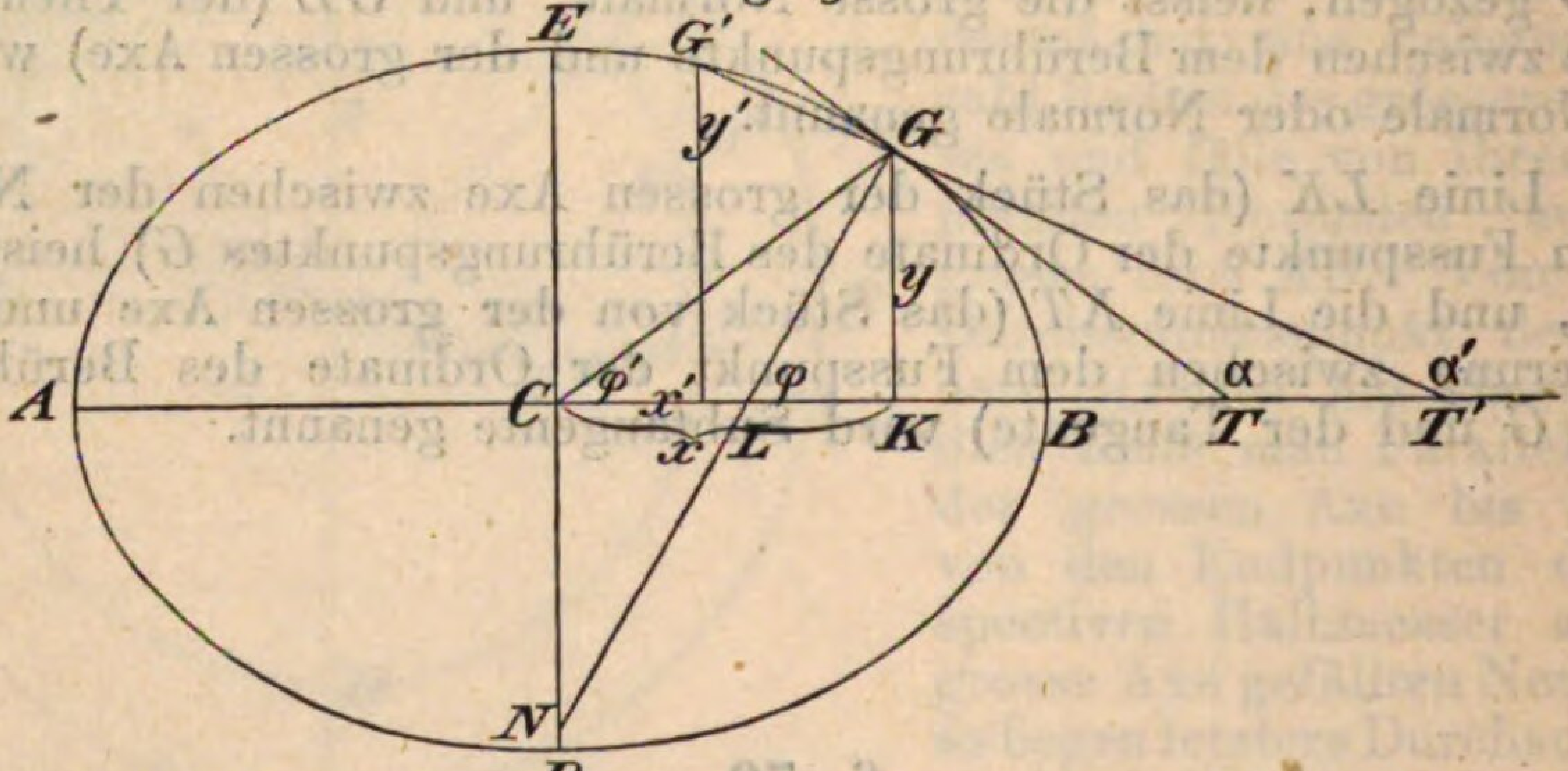
Denkt man sich nun die Secante um den Punkt G gedreht, bis der andere Durchschnittspunkt G' mit G zusammenfällt, so wird $x' = x$, $y' = y$ und $\alpha' = \alpha$, folglich geht dann (15) über in

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

§. 80.
Die Subtangente KT zu finden.

Im ebenen rechtwinkligen Dreieck GKT (Fig. 38.) hat man:

Fig. 38.



$$\text{tang} \angle GTK = \frac{GK}{KT} = \frac{y}{KT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17),$$

da aber tang $\angle GTK = -$ tang α, so folgt aus (17) und (16) §. 79.

$$\frac{y}{KT} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \text{ folglich } KT = \frac{a^2 y^2}{b^2 x},$$

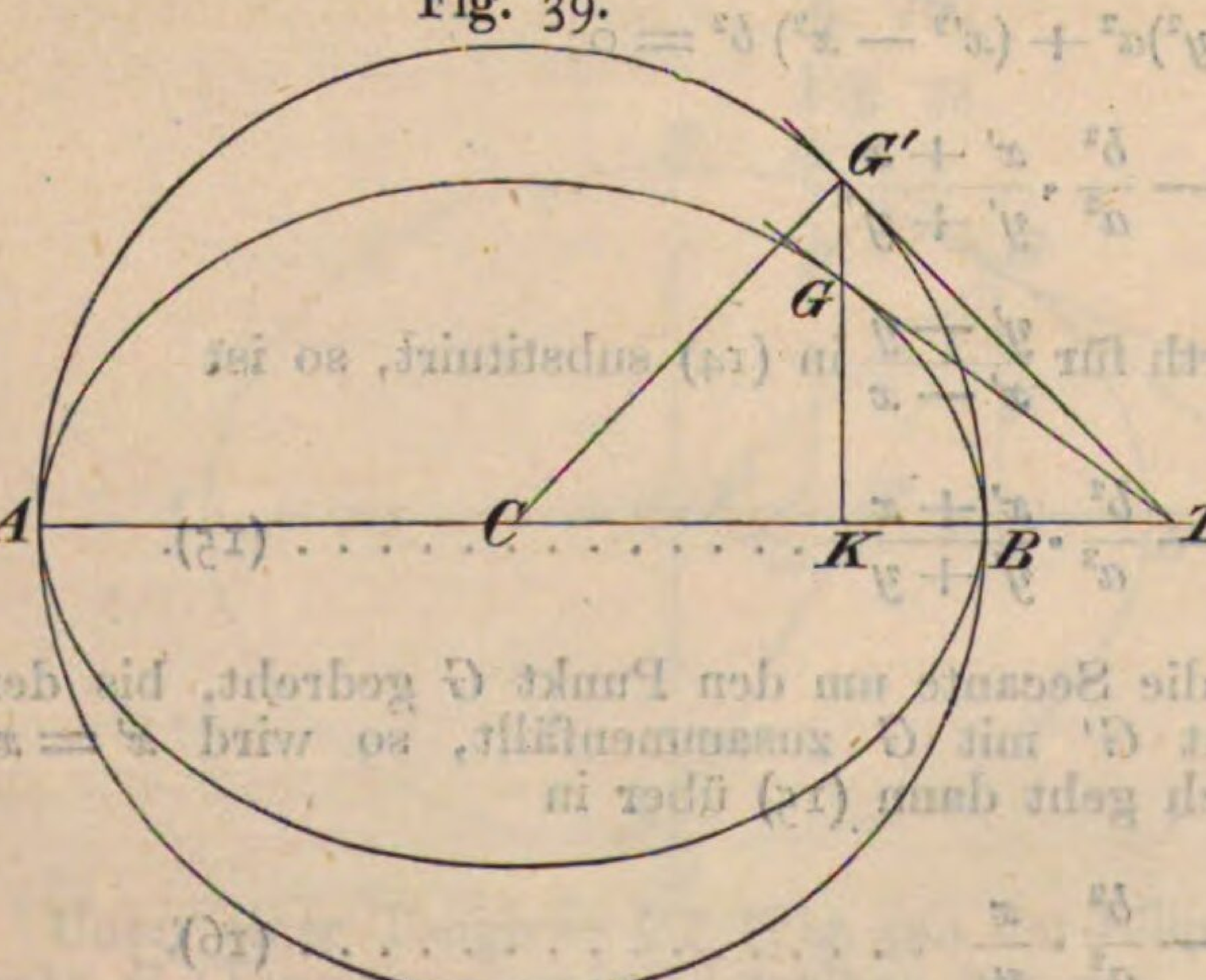
oder weil $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ [§. 73. (8)], so auch

$$KT = \frac{a^2 - x^2}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Da dieser Ausdruck für die Subtangente unabhängig von der kleinen Axe ist, so folgt daraus, dass für alle Ellipsen mit derselben grossen Axe, die denselben Abscissen entsprechenden Tangenten, die Abscissen-Axe in einem und demselben Punkt treffen müssen.

§. 81.
Von einem gegebenen Punkt G in der Ellipse (Fig. 39.) an diese eine Tangente zu ziehen.

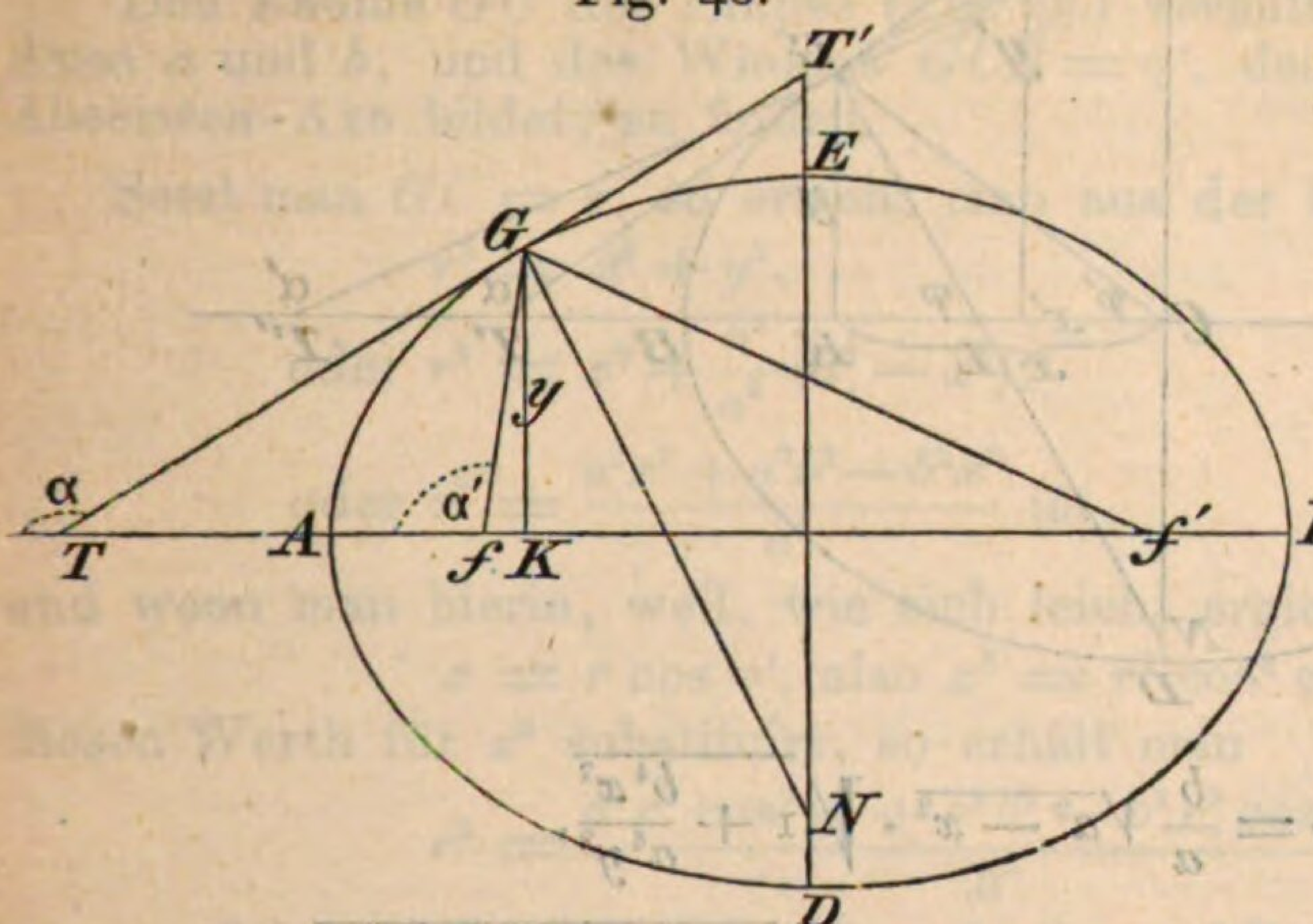
Fig. 39.



Man beschreibe um die grosse Axe AB als Durchmesser einen Kreis, verlängere die Ordinate GK, bis sie den Kreis in G' trifft, ziehe von diesem Punkt eine Tangente an den Kreis und von dem Durchschnittspunkt T (dieser Tangente mit der Abscissen-Axe) die Gerade GT, so ist letztere die verlangte Tangente. Die Richtigkeit ergiebt sich aus dem vorhergehenden Paragraphen.

§. 82.

Fig. 40.



Die Tangente GT (Fig. 40.) und die Normale GN haben eine merkwürdige Lage gegen die Brennstrahlen fG und $f'G$, die nach dem Tangirungspunkt G gezogen sind.

Man bezeichne auch hier das Supplement von $\angle GTA$ mit α, und $\angle GfT$ mit α'. so ist

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

[§. 79. (16)],

$$\text{tang}\,\alpha' = -\frac{y}{e-x}$$

nach $\Delta\, fGK$,

und $\text{tang}\,\angle fGT = \text{tang}\,(\alpha - \alpha') = \dfrac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\alpha'}{1 + \text{tang}\,\alpha\cdot\text{tang}\,\alpha'}$,

$= \dfrac{a^2y^2 + b^2x^2 - b^2\,ex}{a^2\,ey - (a^2 - b^2)\,xy}$, welcher letztere Ausdruck,

da $y^2 = \dfrac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$ und $a^2 - b^2 = e^2$ ist,

sich auch reduciren lässt auf $\dfrac{b^2\,(a^2 - ex)}{ey\,(a^2 - ex)} = \dfrac{b^2}{ey}$,

mithin $\text{tang}\,\angle fGT = \dfrac{b^2}{ey}$. (19).

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass $\text{tang}\,\angle f'GT = -\dfrac{b^2}{ey}$, folglich sind die Winkel fGT und $f'GT$ Supplementwinkel; die Winkel $f'GT'$ und $f'GT$ sind auch Supplementwinkel und daher $\angle fGT = \angle f'GT'$, woraus folgt, dass die Brennstrahlen nach dem Tangirungspunkt der Tangente gezogen, mit dieser gleich grosse Winkel bilden. Hieraus folgt weiter, dass die Normale den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbirt.

§. 83.

Die Normale *GL* zu finden.

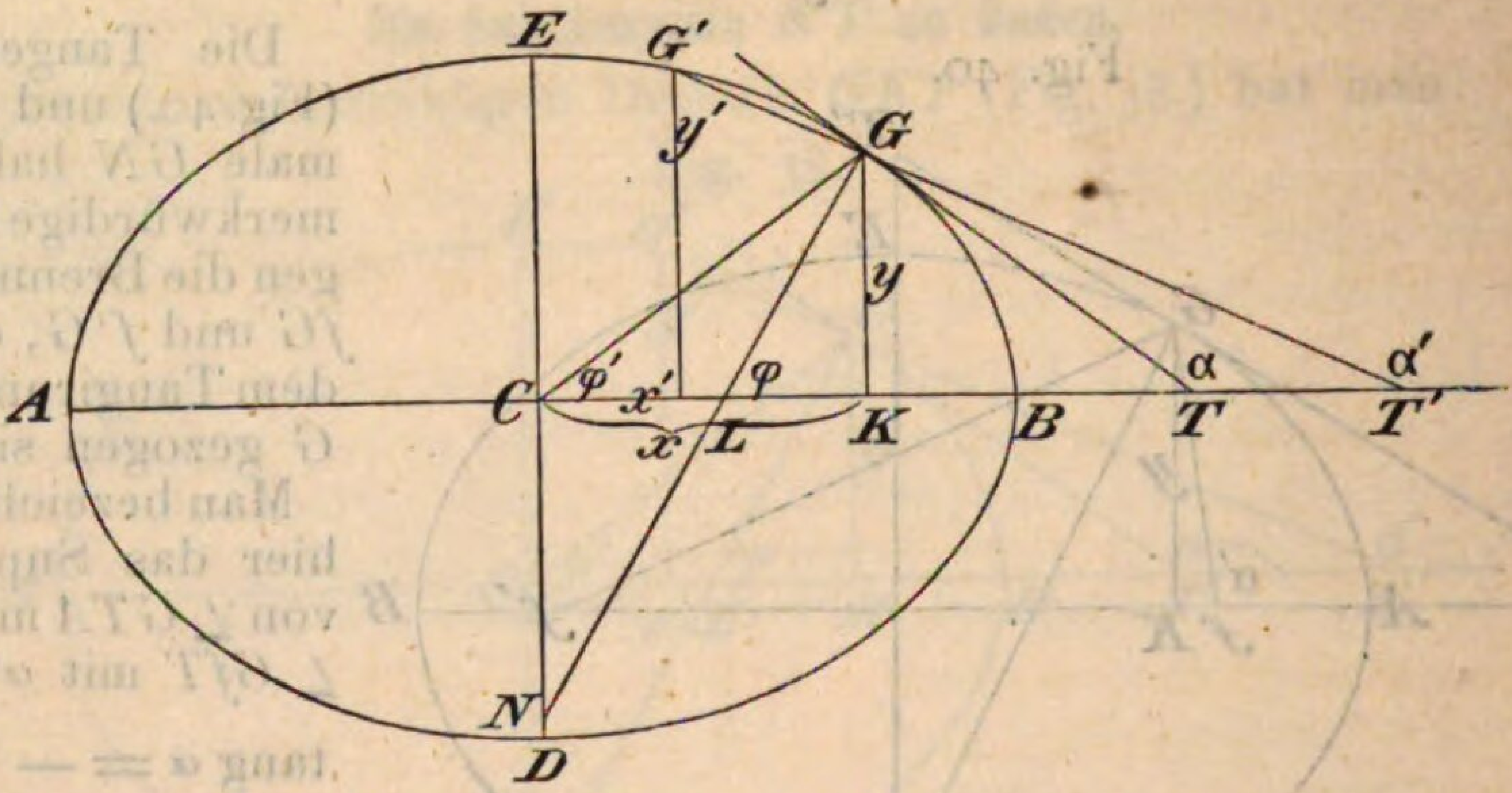
Im $\Delta\, GLK$ (Fig. 38.) ist $GL = \dfrac{GK}{\sin\angle GLK}$, oder wenn man $GK = y$ und $\angle GLK = \varphi$ setzt

$$GL = \frac{y}{\sin\varphi} = y\sqrt{1 + \text{cotg}^2\varphi} \quad (20).$$

Da $\text{cotg}^2\varphi = \text{tang}^2\alpha$, so ist $\text{cotg}^2\varphi = \dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}$ nach §. 79. (16), und

nach §. 73. (10) ist $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

Fig. 38.



$$\text{folglich } GL = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}},$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}},$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}},$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2) + \frac{b^2 x^2}{a^2}},$$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

§. 84.

Die Subnormale KL (Fig. 38.) zu finden.

Im $\Delta\, GKL$ ist $KL = \sqrt{GL^2 - GK^2}$,

$$= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \frac{b^4}{a^4}x^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} \quad (§.\ 83.),$$

$$= \frac{b^2}{a^2}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

§. 85.

Zieht man den Radius der Ellipse GC (Fig. 38.), welche Linie auch die Centrale des Punktes G genannt wird, und setzt den Winkel GCB, den jener mit der Abscissen-Axe bildet, $= \varphi'$, so hat man:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{KL} = \frac{ya^2}{xb^2} \text{ (§. 84.) und } \operatorname{tang} \varphi' = \frac{y}{x},$$

$$\text{folglich } \operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \varphi' \cdot \frac{a^2}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

§. 86.

Den Radius GC der Ellipse (Fig. 38.) vermittelst der beiden halben Axen a und b, und des Winkels $GCB = \varphi'$, den dieser Radius mit der Abscissen-Axe bildet, zu finden.

Setzt man $GC = r$, so ersieht man aus der Figur, dass

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\text{oder } r^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$\text{oder } r^2 = \frac{a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} \text{ ist,}$$

und wenn man hierin, weil, wie sich leicht ergiebt,

$$x = r\cos\varphi', \text{ also } x^2 = r^2\cos^2\varphi' \text{ ist,}$$

diesen Werth für x^2 substituirt, so erhält man

$$r^2 = \frac{a^2r^2\cos^2\varphi' + a^2b^2 - b^2r^2\cos^2\varphi'}{a^2},$$

woraus folgt $r^2\,[a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi'] = a^2b^2$,

$$\text{folglich } r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi'}},$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\cos^2\varphi' + \cos^2\varphi'}},$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi' + 1 - \sin^2\varphi'}},$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\sin^2\varphi'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

§. 87.

Bezeichnet man den Quotienten $\frac{e}{a}$ mit E, so ist, weil

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ und } \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

$$E^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \text{ folglich } \frac{b^2}{a^2} = 1 - E^2 \quad \ldots\ldots \quad (25).$$

Aus Gleichung (23) §. 85. ergiebt sich

$$\tang\varphi' = \tang\varphi\,\frac{b^2}{a^2}, \text{ folglich mit Rücksicht auf (25)}$$

$$\tang\varphi' = \tang\varphi - E^2\tang\varphi,$$

$$\text{also } \tang\varphi - \tang\varphi' = E^2\tang\varphi,$$

$$\text{oder } \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\varphi\cdot\cos\varphi'} = E^2\tang\varphi \text{ nach §. 7. (16),}$$

$$\text{oder } \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\varphi'} = E^2\sin\varphi.$$

Es ist aber

$$\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi'} = \frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\cos[\varphi-(\varphi-\varphi')]},$$

$$= \frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi\cdot\cos(\varphi-\varphi')+\sin\varphi\cdot\sin(\varphi-\varphi')},$$

$$= \frac{\operatorname{tang}(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\operatorname{tang}(\varphi-\varphi')},$$

folglich $\operatorname{tang}(\varphi-\varphi') = E^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi + E^2\sin^2\varphi\cdot\operatorname{tang}(\varphi-\varphi')$, und

so auch $\operatorname{tang}(\varphi-\varphi') = \frac{E^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{1-E^2\sin^2\varphi}$ (26),

oder annäherungsweise

$$\operatorname{tang}(\varphi-\varphi') = E^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi + E^4\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi + E^6\sin^5\varphi\cdot\cos\varphi + \quad (27),$$

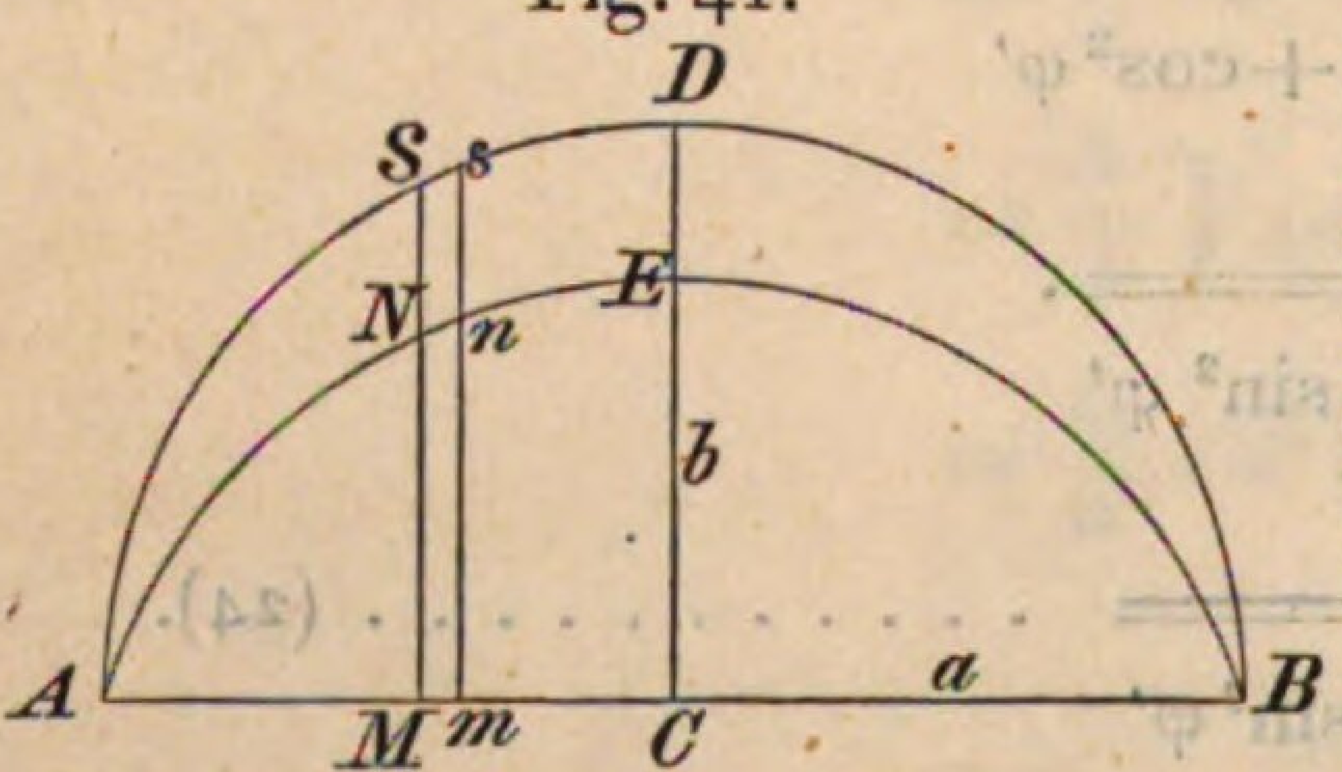
oder endlich mit Weglassung der Glieder, welche die vierten und höhern Potenzen von E enthalten,

$$\varphi-\varphi' = \frac{E^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin 1''} = \frac{E^2\sin 2\varphi}{2\cdot\sin 1''} \;\ldots\ldots\; (28),$$

wenn $\varphi-\varphi'$ eine kleine Grösse ist.

§. 88.

Fig. 41.



In Fig. 41. sei AEB eine Halbellipse über AB (grosse Axe), über dieser der Halbkreis ADB, $CD \perp AB$, $CA = CB = a$, $CE = b$. Zieht man nun Ordinaten nahe aneinander im ganzen Halbkreise, so entstehen Rechtecke wie $MSsm$ und $MNnm$, welche sich zu einander verhalten, wie ms zu mn.

Nach Gleichung (12.) im §. 76. verhält sich aber

$$ms : mn = CD : CE = a : b,$$

folglich auch $\qquad \square\, MSsm : \square\, MNnm = a : b.$

Was von diesen beiden Rechtecken gilt, das gilt auch von allen Rechtecken im Halbkreise und in der Halbellipse. Nach einem bekannten Satze aus der Proportionslehre verhält sich dann aber die Summe aller dieser Rechtecke im Halbkreise zur Summe aller Rechtecke in der Halbellipse wie a zu b, folglich auch

$$\text{Halbkreis } ADB : \text{Halbellipse } AEB = a : b.$$

Da nun der Inhalt des Halbkreises $ADB = \frac{a^2\cdot\pi}{2}$ ist, so ergiebt sich

$$\text{Halbellipse} = \frac{a^2\cdot\pi}{2}\cdot\frac{b}{a},$$

$$= \frac{a\cdot b\cdot\pi}{2} \;\ldots\ldots\ldots\; (29),$$

folglich

$$\text{Ellipse} = a\cdot b\cdot\pi \;\ldots\ldots\ldots\; (30).$$

wonach der Inhalt der Ellipse berechnet werden kann aus ihren halben Axen a und b.

Navigation.

§. 1.

Einleitung.

Navigation, auch Nautik, nennt man die Wissenschaft, welche lehrt, ein Schiff nach irgend einem gegebenen Orte auf der Erde mit Sicherheit über See zu führen. Es versteht sich von selbst, dass dieser Ort an einem Fahrwasser liegen muss, welches Tiefe genug für das betreffende Schiff hat; andern Falles ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten, wenn sich nämlich das Schiff dem gegebenen Orte so weit genähert hat, als die örtlichen Verhältnisse dies gestatten.

Bei Erstrebung dieses Zieles drängen sich vor allen andern unabweisbar die beiden Fragen auf:

1) wo befindet sich das Schiff zu einer gegebenen Zeit? und
2) wie ist von dem für diese Zeit bestimmten Orte des Schiffes weiter nach dessen Bestimmungsort zu steuern?

Die möglichst genaue Beantwortung dieser Fragen ist die Aufgabe, die der practische Seemann mit Sicherheit zu lösen hat.

Der Ort, auf welchem sich das Schiff zu der Zeit befindet, in welcher die Beantwortung der ersten Frage erfordert wird, liegt entweder im Angesichte der Küste, so dass bestimmt erkennbare, ihrer Lage nach bekannte Landobjecte vom Schiffe aus gesehen werden können, oder er befindet sich auf offenem Meere. Im ersten Falle wird man den Ort des Schiffes durch Peilungen der bekannten Landobjecte vermittelst des Compasses oder Winkelmessungen zwischen denselben, vom Schiffe aus, bestimmen können; im zweiten Falle aber werden hierzu astronomische Beobachtungen und Berechnungen derselben erforderlich sein. Die zweite Frage kann demnächst mittelst der Seekarte leichter als die erste beantwortet werden.

Zur Navigation gehört demnach eine genaue Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde, sowie der auf ihrer Oberfläche von den Geographen gedachten Kreise und Curven; ferner der Kreise an der scheinbaren hohlen Himmelskugel, der scheinbaren Grösse und Lage der Gestirne an dieser von der Erde aus gesehen, des Compasses, Logges, der Seekarten, des Spiegel-Sextanten, Barometers, Thermometers u. s. w. Die Betrachtung und Beschreibung dieser Gegenstände werden der Reihe nach in den folgenden Abschnitten ihren Platz finden.

§. 2.

Kugelgestalt der Erde.

Die Erde scheint von einer hohlen Himmelskugel umgeben zu sein, an deren Oberfläche sich die Gestirne befinden, und diese Gestirne scheinen sich binnen 24 Stunden von Morgen gegen Abend um die Erde zu drehen. Diese scheinbare Bewegung wird durch die Umdrehung der Erde um einen Durchmesser derselben bewirkt, während der unendliche Weltraum, in den unser Auge nach allen Richtungen gleich weit hineinschaut, uns als hohle Himmelskugel erscheint.

Dass die Erde eine kugelförmige Gestalt hat, davon kann sich jeder aufmerksame Beobachter durch vielfache, augenfällige Erscheinungen auf dem Meere überzeugen. Entfernen sich z. B. zwei Schiffe von einander nach beliebigen Richtungen auf hohem oder nur offenem Meere, so werden dem Beobachter auf dem einen die untern Theile des andern Schiffes zuerst verschwinden und so allmälig die obern nachfolgen. Eine solche Erscheinung kann nur auf der Oberfläche eines kugelförmigen Körpers stattfinden, und eben dadurch erklärt sich auch die Erscheinung, dass beim Absegeln eines Schiffes vom Lande die untern Theile desselben zuerst und die obern Theile zuletzt dem Beobachter auf jenem Schiffe verschwinden, und zwar allmälig in dem Verhältnisse, in welchem sich das Schiff vom Lande entfernt. Dieses Ergebniss stellt sich in allen diesen Fällen, überall auf der Erde und in allen Richtungen auf dieselbe Weise heraus und liefert einen unwiderleglichen Beweis für die kugelähnliche Gestalt der Erde. Eine andere Erscheinung, die für die Kugelgestalt der Erde zeugt, ist der Schatten, den sie bei Mondfinsternissen auf den Mond wirft. Dieser Schatten erscheint alle Zeit und also in jeder Stellung, welche die Erde bei der gedachten Erscheinung gegen die Sonne und den Mond haben kann, bogenförmig, oder wenigstens so weit, als er auf der Mondscheibe zu sehen ist, durch einen Kreisbogen begrenzt. Da aber nur eine Kugel in allen möglichen Lagen einen runden Schatten wirft, so sprechen auch diese Erscheinungen für die kugelförmige Gestalt der Erde. Noch andere Beweise für die Kugelgestalt der Erde geben die Veränderungen der Höhen der Himmelskörper, wenn man von Süden nach Norden oder umgekehrt reis't. Einen durch thatsächliche Erfolge unterstützten Beweis für die in Rede stehende Behauptung geben ganz besonders die verschiedenen Erdumsegelungen. Ueberdies aber sind alle uns bekannte Himmelskörper kugelförmig, wie die vielfachsten Beobachtungen ergeben haben, und es ist durchaus kein Grund vorhanden, dass gerade die Erde von dieser Form abweichen sollte. Dass die Unebenheiten der erstarrten Erdrinde hier nicht in Betracht kommen, sondern nur die Oberfläche des flüssigen Theiles derselben, des Meeres nämlich, versteht sich von selbst; aber auch sogar die bedeutendsten jener Unebenheiten sind im Verhältnisse zum Durchmesser der Erde so unbedeutend, dass sie nicht als eine in Betracht kommende Abweichung von der Kugelform der Erde anzusehen sind. Dass die Erde trotz ihrer kugelförmigen Gestalt dennoch dem auf ihrer Oberfläche befindlichen Beobachter als eine Ebene erscheint, ist eine Folge ihrer Grösse, indem ein kleiner Theil einer Kugelfläche um so weniger von einer ebenen Fläche abweicht, je grösser der Halbmesser der Kugel ist. Dem Beobachter auf dem offenen Meere erscheint der ihm sichtbare Theil der Erdoberfläche als eine kreisrunde Ebene, auf deren Rande das Himmelsgewölbe zu ruhen scheint. Erwägt

man nun, wie klein die Höhe des Auges über der Meeresfläche im Verhältnisse zum Durchmesser der Erde ist, so wird man diese Erscheinung ganz natürlich finden; denn wie allgemein angenommen, beträgt der Durchmesser der Erde etwa 1719 und ihr Umfang 5400 geographische Meilen, wonach, wenn man die Höhe des Auges über der Meeresfläche zu 12 Fuss annimmt, der Abstand des sichtbaren Horizontes etwa eine geographische Meile und also der Durchmesser der sichtbaren runden Fläche 2 geographische Meilen betragen würde, was den 2700sten Theil des Umfanges der Erde ausmacht und daher sehr wenig von einer geraden Linie abweicht.

Der Raum, in welchem sich die Erde und die übrigen Himmelskörper befinden, ist ein unendlicher Raum und wird daher auch Weltraum genannt. In dem Weltraume bewegen sich alle Himmelskörper nach gewissen Gesetzen. Die Bestimmung der Grösse und Gestalt der Erde, nebst ihrer Lage im Weltraume, sowie die Bestimmung der Lage der merkwürdigsten Punkte auf der Oberfläche der Erde, sind eigentlich Gegenstände der mathematischen Geographie. Diese Bestimmungen können aber nicht ohne Kenntniss der wesentlichen Lehrsätze der Astronomie ausgeführt werden.

Zu den hierbei in Betracht kommenden Gegenständen der Astronomie gehören die Bestimmung der Lage der Himmelskörper an der scheinbaren Himmelskugel und im Weltraume, sowie auch die Bestimmung ihrer Bahnen und die Auffindung der Gesetze, nach welchen sie sich in denselben bewegen, nebst Feststellung ihrer scheinbaren und wirklichen Grösse.

§. 3.

Das Erdsphäroid, die Erdpole, Erdaxe, der Erd-Aequator, die Erd-Meridiane, die Breitenparallele und die Abplattung der Erde.

Sorgfältige und höchst mühsame Erdmessungen, die man in neuerer Zeit ausgeführt hat, haben im Gegensatze zu den vorstehenden Darlegungen ergeben, dass die Erde dennoch keine Kugel, sondern ein Sphäroid ist; denn man fand im Verfolg dieser Messungen, dass die Erde einen grossen und einen kleinen Durchmesser hat, deren respectives Verhältniss zu einander sehr nahe ist, wie 299 zu 298. Der Unterschied zwischen diesem grossen und kleinen Durchmesser der Erde heisst ihre Abplattung; gewöhnlich bezeichnet dieser Ausdruck aber den Quotienten, den man erhält, wenn man den Unterschied dieser beiden Erddurchmesser durch den grössten dieser Durchmesser dividirt, und eben dieser Quotient ist in allen hier folgenden Berechnungen und Auseinandersetzungen unter Abplattung der Erde zu verstehen. Jene Erdmessungen haben gleichzeitig ergeben, dass der kleine Durchmesser der Erde normal auf dem grossen steht; die Abplattung findet demnach an den Endpunkten des kleinen Durchmessers statt. Diese Endpunkte des kleinen Erddurchmessers heissen die Erdpole, wovon man denjenigen, dem man in Europa am nächsten ist, den Nordpol, und den diesem entgegengesetzten den Südpol nennt. Die gerade Linie, welche diese Pole mit einander verbindet, heisst die Erdaxe. Denkt man sich die Erde von einer Ebene durchschnitten, welche durch die Axe der Erde geht, so bilden, nach bekannten Lehrsätzen, die durch den Umfang des Erdsphäroids bestimmten Grenzen dieser Ebene eine Ellipse, und jede auf diese Art entstandene Ellipse ergiebt das Bild eines Erd-Meridians und wird in

Fig. 1.

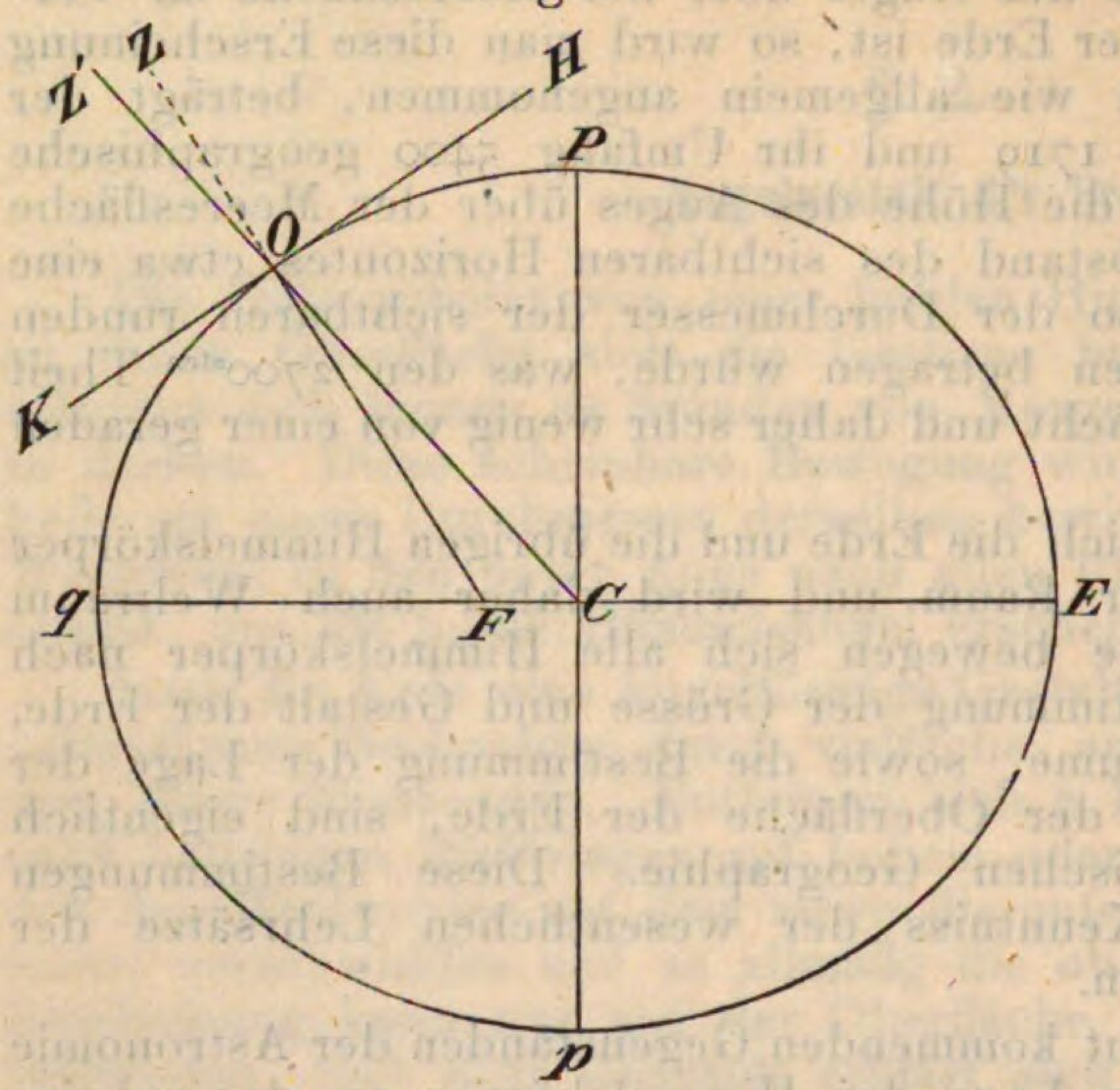


Fig. 1. dargestellt durch die Ellipse *EPqp*. So wie es nun unendlich viele solcher Durchschnitte geben kann, so giebt es auch unendlich viele Meridiane, denn jeder Ort, der nicht mit einem oder mehreren Orten in ein und denselben Meridian liegt, hat seinen eigenen Meridian. Nach den vorstehend gegebenen Erläuterungen würde, wenn (Fig. 1.) *P* den Nordpol vorstellt, *p* den Südpol und *Pp* die Erdaxe bezeichnen. Der Kreis, welchen der grosse auf dem kleinen normal stehende Halbmesser bei der Umdrehung des Erdsphäroids um seine Axe bildet, heisst der Erd-Aequator und geht in Fig. 1. durch *E* und *q*. Denkt man sich ferner die Erde von einer Ebene parallel mit dem Aequator durchschnitten, also normal auf die Erdaxe, so sind die Begrenzungen dieser Schnitte Kreise und heissen Breitenparallele, die nach den Polen zu immer kleiner werden und deren Halbmesser normal auf der Erdaxe stehen. Die Zahl dieser Breitenparallele ist demnach gross, denn man kann sich durch jeden Ort auf der Erde einen gelegt denken. Setzt man den Halbmesser des Erd-Aequators $= a$ und die halbe Erdaxe $= b$, so ist nach dem Vorstehenden die Abplattung der Erde $= \frac{2a - 2b}{2a} = \frac{a - b}{a}$, und da $a : b = 299 : 298$, so ist die Abplattung der Erde $= \frac{1}{299}$ der grossen Axe des Erdsphäroids, d. h. des Aequatordurchmessers der Erde. Die in diesem Bruche angedeutete, so geringe Abweichung der Gestalt der Erde von der Kugelform gestattet es, dass man die Erde bei Untersuchungen, die keine grosse Genauigkeit erheischen, als Kugel betrachten kann, was auch in Durchführung der meisten nautischen Rechnungen der Fall ist. Dieser Annahme nach werden dann die Erd-Meridiane grösste Kreise und dem Erd-Aequator gleich. Gewöhnlich betrachtet man die Erd-Meridiane nur als grösste Halbkreise von Pol zu Pol gehend.

§. 4.

Die Schwerkraft der Erde, die Horizontal- und Vertical-Linie und Ebene.

Diejenige Kraft, welche alle Körper an der Erdoberfläche festhält und die Körper, welche sich auf irgend eine Weise von der Erdoberfläche entfernt haben, zwingt, zu ihr zurückzukehren, wird die Schwerkraft der Erde genannt. Dieser Kraft zufolge sind alle Körper schwer, d. h. sie äussern ein Bestreben, sich nach dem Mittelpunkte der Erde zu bewegen und üben so einen Druck aus, wenn dieser Bewegung ein Hinderniss entgegentritt. Die Richtung dieser Bewegung ist immer lothrecht oder senkrecht, also winkelrecht oder normal auf die Oberfläche der Erde, vorausgesetzt, dass man sich diese so glatt wie die Oberfläche

einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit denkt. Diese Schwerkraft ist eine continuirlich wirkende, welche die Bewegung der frei fallenden Körper beschleunigt. Das eigentliche Maass dieser Kraft ist die Geschwindigkeit, um welche sie, wenn sie während einer Zeitsecunde eingewirkt hat, die Geschwindigkeit des Körpers am Ende dieser Zeitsecunde vermehrt, gegen die Geschwindigkeit, welche derselbe Körper schon im Anfange derselben Zeitsecunde, als die Einwirkung begann, hatte. Diese Geschwindigkeit beträgt an der Oberfläche der Erde 31 Fuss Rheinl. (genauer $31\frac{1}{4}$ Fuss $=$ 9,808 Meter). Wenn nämlich in der Nähe der Erdoberfläche ein schwerer Körper (im luftleeren Raume jeder Körper) mit dem Anfange einer Zeitsecunde frei zu fallen beginnt, so ist seine Geschwindigkeit im Anfange dieser Zeitsecunde Null und am Ende derselben 31 Fuss, folglich durchläuft derselbe während dieser Zeitsecunde $15\frac{1}{2}$ Fuss. Die Geschwindigkeit desselben Körpers am Ende der zweiten, dritten, vierten etc. Zeitsecunde ist aber 62 Fuss, 93 Fuss, 124 Fuss etc., und die durchlaufenen Wege desselben in der zweiten, dritten, vierten Zeitsecunde sind $46\frac{1}{2}$ Fuss, $77\frac{1}{2}$ Fuss, $108\frac{1}{2}$ Fuss. Die ganzen Wege dieses Körpers sind hiernach, während der ersten Zeitsecunde $15\frac{1}{2}$ Fuss, der ersten und zweiten 62 Fuss, der ersten, zweiten und dritten $139\frac{1}{2}$ Fuss, der ersten, zweiten, dritten und vierten 248 Fuss etc.

Ein Faden, der durch einen daran befestigten Körper gespannt wird, indem der letztere frei und ruhig an dem Faden hängt, hat genau die Richtung der Schwere. Ein auf die bezeichnete Weise mit einem Faden verbundener Körper bildet mit diesem zusammen ein Loth und gewährt das einfachste Mittel, die Richtung der Schwere an jedem Orte der Erde zu bestimmen.

Eine Linie, welche in der Richtung der Schwere gezogen wird, heisst eine Vertical-Linie, auch Lothlinie oder Loth, und jede dadurch gelegte Ebene eine Vertical-Ebene.

Jede Ebene, auf welcher die Richtung der Schwere, also das Loth, normal steht, heisst Horizontal-Ebene, und jede gerade Linie in dieser, Horizontal-Linie. Diejenige Horizontal-Ebene, welche durch den Punkt geht, wo die Richtung der Schwere die als ganz glatt vorausgesetzte Erdoberfläche trifft, wird eine Berührungsebene der letztern für diesen Punkt genannt. Die Oberfläche einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit hat genau die Gestalt der ganz glatt vorausgesetzten Erdoberfläche und wird daher auch, wenn sie so klein ist, dass man sie als eine Ebene ansehen kann, die Horizontal-Ebene des Ortes sein, an welchem sie sich befindet. Das Loth und die Oberfläche einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit geben also die Mittel an die Hand, für jeden Ort der Erde die Vertical-Linie und Horizontal-Ebene zu bestimmen.

§. 5.

Geographische und geocentrische Breite; geographische Länge.

Da die Erde ein Sphäroid ist, so wird die Richtung der Schwere nicht allenthalben, d. h. von jedem Punkte auf ihrer Oberfläche durch den Mittelpunkt der Erde gehen, sondern dies wird nur unter dem Aequator und an den Polen stattfinden.

Die Richtung der Schwere in dem Punkte O (Fig. 1.) wird etwa OF sein und der Winkel, den diese mit der Aequator-Ebene bildet, der hier Winkel OFq ist, wird die geographische Breite des Ortes O genannt. Die Geraden qF und OF liegen, wie man leicht findet, in der Meridian-Ebene des Punktes O. Die Gerade OC wird der Erdradius des Punktes O sein, und der Winkel, den dieser mit der Aequator-Ebene bildet,

der hier Winkel OCq ist, heisst die geocentrische Breite des Punktes O. Die Differenz beider Breiten des Punktes O ist gleich dem Winkel COF. Bezeichnet man, wie es allgemein gebräuchlich ist, die geographische Breite eines Ortes mit φ und seine geocentrische Breite mit φ', so ist $\varphi - \varphi' = \angle COF$.

Wenn ein Ort zwischen dem Aequator und dem Nordpol liegt, so ist seine Breite nördlich und wird gewöhnlich mit + bezeichnet; liegt er aber zwischen dem Aequator und dem Südpol, so ist seine Breite südlich und wird gewöhnlich mit — bezeichnet. Der Aequator theilt die Oberfläche der Erde in zwei Hälften, wovon die nach dem Nordpol zu liegende die nördliche, und die nach dem Südpol zu liegende die südliche Halbkugel oder Hemisphäre genannt wird.

Durch zwei Punkte auf der Oberfläche der Erde, die nicht in einem und demselben Meridian liegen, denke man sich durch jeden derselben einen Meridian gelegt, so heisst der sphärische Winkel, den diese beiden Meridiane mit einander bilden, der Längenunterschied dieser Punkte oder ihrer Meridiane. Nimmt man hiervon den einen als den ersten Meridian an, so wird der Längenunterschied dieser Punkte oder der beiden Meridiane die geographische Länge des zweiten Meridians oder eines darin liegenden Punktes genannt, und diese Länge ist östlich, wenn der zweite Meridian von dem ersten — in diesem das Auge nach dem Nordpol gerichtet — rechts liegt, und westlich, wenn er sich auf der entgegengesetzten Seite desselben befindet. Von diesem sphärischen Winkel ist das Stück Aequator zwischen den beiden Meridianen das Maass, daher sagt man auch, die geographische Länge eines Ortes ist das Stück Aequator vom ersten Meridian nach Osten oder Westen bis zum Meridian dieses Ortes gezählt. Die Erdmeridiane hat man sich hierbei nur als grösste Halbkreise zwischen den beiden Erdpolen vorzustellen.

Der erste Meridian kann ein beliebiger sein, und so kann auch in jedem Staate der durch seine Haupt-Sternwarte gehende Meridian als erster angenommen werden, denn man kann die Länge eines Ortes auf der Erde von jedem Meridian zählen, seine Breite aber nur vom Aequator. In erster Linie kommt jedoch der Meridian durch die Sternwarte in Greenwich gehend in Betracht, weil man ihn in den Seekarten als ersten Meridian findet und astronomische Jahrbücher (Nautical Almanac und nautisches Jahrbuch) dafür berechnet, erscheinen. Den Meridian durch die Sternwarte in Paris gehend, findet man zwar in Französischen Seekarten als ersten Meridian, aber selten in anderen. Eine gleiche Bewandtniss hat es mit dem Meridian der Berliner Sternwarte, der sich nur in den Preussischen Ostseekarten findet. Demnach wird fast allenthalben der Meridian von Greenwich als erster angenommen.

Die Geographen nehmen auch den Ferroer Meridian als den ersten an, welcher durch einen Punkt nahe der Insel Ferro geht, der genau 20° West von dem Pariser Meridian liegt. Dieser Ferroer Meridian ist demnach nichts weiter als der Pariser Meridian.

§. 6.

Eine zweite Erklärung der geographischen Länge. Die Wende- und Polarkreise; die Zonen der Erde.

Die geographische Länge eines Ortes auf der Oberfläche der Erde kann auch das Stück seines Parallelkreises zwischen diesem Orte und dem ersten Meridian, ausgemessen durch Grade, Minuten und Secunden des Parallelkreises, sein.

Beim Gebrauche der Karten ist diese Erklärung der geographischen Länge die passendste. Man wird leicht finden, dass alle Orte auf der Oberfläche der Erde, die in einem und demselben Meridian liegen — wenn man sich, wie schon bemerkt, die Meridiane nur als Halbkreise von Pol zu Pol gehend, denkt — gleiche Länge haben, und dass alle Orte, die in einem und demselben Breitenparallel liegen, auch gleiche Breite haben müssen.

Die beiden Breitenparallele, welche zu beiden Seiten des Aequators in $23\frac{1}{2}°$ Breite liegen, heissen Wendekreise, und zwei andere Breitenparallele, wovon jeder auf $66\frac{1}{2}°$ Breite liegt, werden Polarkreise genannt. Die Wende- und Polarkreise theilen die Oberfläche der Erde in fünf Theile, die man Zonen nennt. Die Zone zwischen den beiden Wendekreisen wird die heisse genannt, die zwischen dem nördlichen Wendekreise und dem nördlichen Polarkreise die nördlich gemässigte, und die zwischen dem südlichen Wendekreise und dem südlichen Polarkreise die südlich gemässigte Zone. Die Zone, die nach dem Nordpol zu von dem nördlichen Polarkreise liegt, wird die nördlich kalte Zone genannt, und die auf der Südseite des südlichen Polarkreises liegende heisst die südlich kalte Zone.

§. 7.

Grösse der Erde. Die geographische Meile, die Seemeile; das metrische Längenmaass und die Englischen Meilen.

Nach Bessel, in den astronomischen Nachrichten No. 438., ist der Halbmesser des Erd-Aequators $a = 3272077{,}14$ Toisen $= 6377397{,}154$ Meter, die halbe Erdaxe $b = 3261139{,}33$ Toisen $= 6356078{,}966$ Meter angegeben; diese Resultate ergeben die Abplattung der Erde $= \frac{a-b}{a}$ $= \frac{1}{299{,}1528}$. Der Umfang des Erd-Aequators ist hiernach $= 2\,a\,\pi$ $= 20559066{,}982$ Toisen, und bezeichnet man den Aequatorgrad mit g, so ist $g = 57108{,}5194$ Toisen. Der 15te Theil dieses Aequatorgrades heisst geographische Meile; diese ist demnach $= \frac{57108{,}5194}{15}$ Toisen $= 3807{,}2346$ Toisen $= 22843{,}4076$ Pariser Fuss, da 6 Pariser Fuss auf eine Toise gehen.

Der Pariser Fuss enthält bekanntlich 144 Pariser Linien. Durch sorgfältige Vergleichung hat man gefunden, dass der Preussische, oder was ganz gleichbedeutend ist, der Rheinländische Fuss $= 139{,}13$ Pariser Linien, und der Englische Fuss $= 135{,}114$ Pariser Linien enthält. Hiernach ist die geographische Meile $= 23643{,}00$ Rheinl. Fuss $= 24345{,}74$ Engl. Fuss, und die geographische viertel Meile $= 5910{,}75$ Rheinl. Fuss $= 6086{,}44$ Engl. Fuss.

Der elliptische Meridianquadrant ist nach den angegebenen Axen der Erde $= 5131179{,}811$ Toisen $= 10000855{,}764$ Meter, folglich der mittlere Meridiangrad $= 57013{,}109$ Toisen $= 111120{,}62$ Meter und die mittlere Meridianminute $= 950{,}2185$ Toisen $= 1852{,}01$ Meter $= 5701{,}311$ Pariser Fuss $= 5900{,}88$ Rheinl. Fuss $= 6076{,}27$ Engl. Fuss. Diese mittlere Meridianminute heisst Seemeile, deren Bezeichnung Sm. ist.

Da dem Vorhergehenden nach der Umfang des Erd-Aequators $= 5400$ geographische Meilen ist, so muss der Durchmesser desselben $= 1718{,}873$ geographische Meilen sein, und da die Abplattung der Erde $= \frac{1}{299{,}1528}$ ist, so muss auch die Erdaxe $= 1713{,}127$ geographische

Meilen sein, also die Differenz beider Axen = 5,746 geographische Meilen betragen.

Das Meter oder der Stab sollte der zehnmillionste Theil des Nordmeridian-Quadranten der Erde sein und ist jetzt gesetzlich = 443,296 Pariser Linien. Es bildet die Grundlage des Längenmaasses, welches ein decimales ist. Das Vielfache (10-, 100-, 1000- und 10,000fache) des Meters wird durch Vorsetzung von Zahlwörtern bezeichnet, die dem Griechischen, und die Theile ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$) desselben durch solche, die dem Lateinischen entlehnt sind. Diesemnach sind:

10 Meter = 1 Decameter, oder die Kette,
100 » = 1 Hectometer,
1000 » = 1 Kilometer,
10000 » = 1 Myriameter,

$\frac{1}{10}$ Meter = 1 Decimeter,
$\frac{1}{100}$ » = 1 Centimeter, oder der Neuzoll,
$\frac{1}{1000}$ » = 1 Millimeter, oder der Strich.

Die neue Meile zu 7500 Meter oder 7,5 Kilometer ist wieder beseitigt, d. h. durch Gesetz aufgehoben. Demnach werden grosse Entfernungen nur in Kilometer angegeben.

Die geographische Meile wird 7420,44 Meter, mithin die geographische viertel Meile 1855,11 Meter. Das Meter ist auch sehr nahe $1\frac{1}{2}$ Preuss. Ellen und diese Elle $25\frac{1}{2}$ Zoll Rheinl.

In England ist:
die gewöhnliche Meile (London Mile) = 5000 Fuss Engl.,
die gesetzmässige Meile (Statute Mile) = 5280 Fuss Engl.,
die Seemeile (Sea Mile) die Aequatorminute = 6086 Fuss Engl.

Das Yard (Imperial Yard), das eigentliche Ellenmaass, ist 3 Fuss Engl.

§. 8.

Die Erde als vollständige Kugel betrachtet. Die loxodromische Linie; das nautische Cursdreieck.

Bei den folgenden Untersuchungen kann die Erde, da ihre Abplattung so gering ist, als eine vollständige Kugel angesehen werden, wodurch das Verständniss aller hier in Betracht kommenden Gegenstände sehr erleichtert wird.

Nach dieser Annahme wird, wenn man wie gewöhnlich den Erdradius $r = \frac{a+b}{2}$ setzt, r = 3266608,235 Toisen = 6366738,06 Meter = 19599649,41 Pariser Fuss = 20285700,5 Rheinl. Fuss, und die Minute eines grössten Kreises der Erde = 5900,87 Rheinl. Fuss, also gleich der Seemeile, welche = 5900,88 Rheinl. Fuss = 1852,01 Meter ist.

Eine äusserst merkwürdige Linie auf der Oberfläche der Erde ist die loxodromische Linie, die zweifach gekrümmt ist, nämlich so, dass die eine hohle Seite dem Mittelpunkte der Erde und die andere dem nächsten Erdpol zugekehrt ist. Sie ist für das Seewesen von besonderer Wichtigkeit. Das Eigenthümliche dieser Curve besteht darin, dass sie in ihrer Verlängerung die Erd-Meridiane unter gleichem Winkel durchschneidet. Dieser Winkel, von Nord und Süd gezählt, wird Curs-Winkel oder einfach Curs genannt.

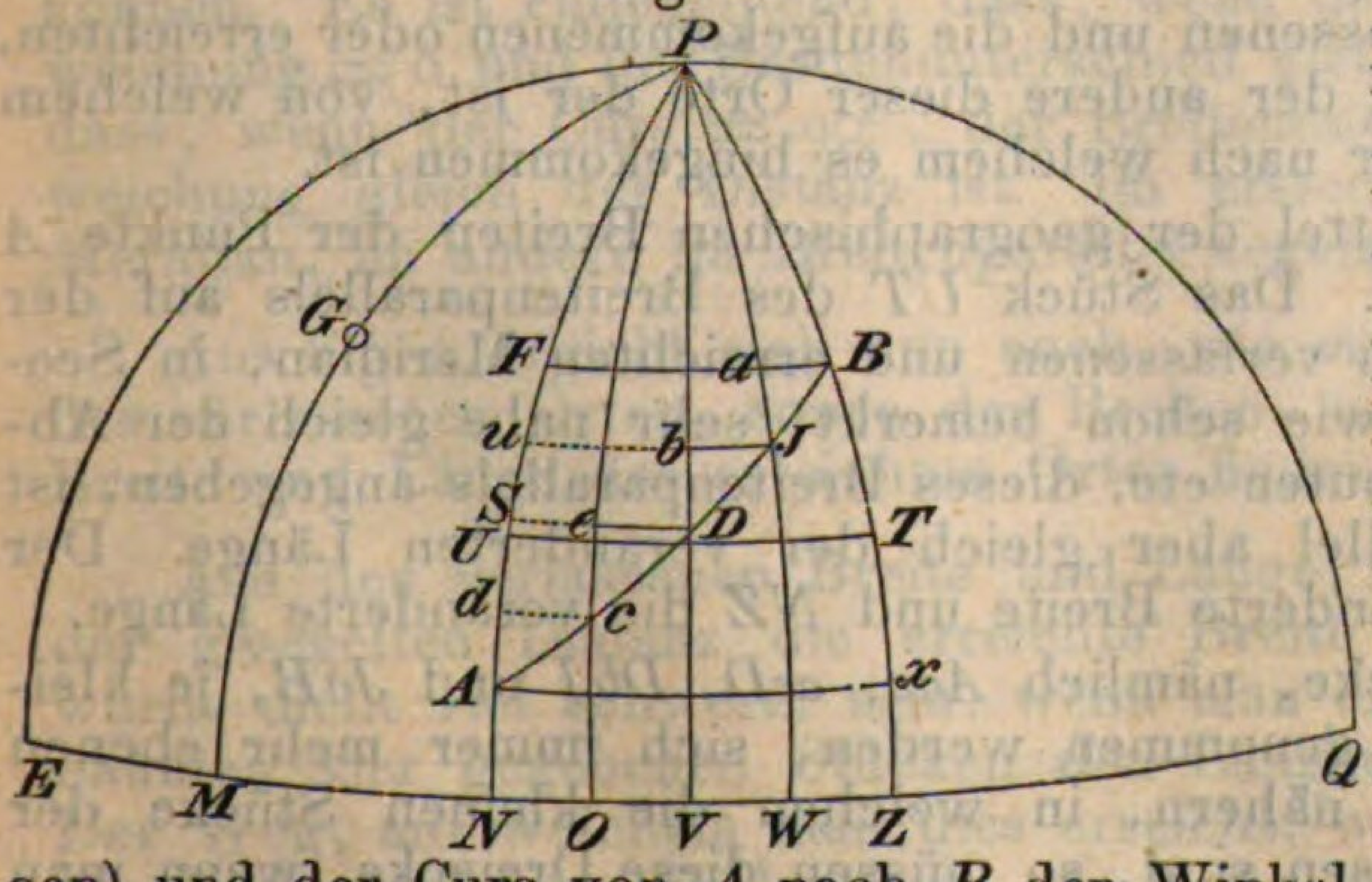
Die loxodromische Linie zwischen zwei Orten auf der Oberfläche der Erde wird die nautische Distanz dieser Orte genannt. Gewöhnlich wird die letztere in Seemeilen angegeben.

Derjenige Bogen des Aequators, der zwischen dem Meridian des Ortes liegt von, und dem Meridian des Ortes nach welchem ein Schiff hingesegelt ist, giebt die veränderte Länge oder den Längenunterschied beider Orte an, und derjenige Bogen des Meridians, der zwischen dem Breitenparallel des Ortes liegt von, und dem Breitenparallel des Ortes nach welchem ein Schiff hingesegelt ist, ist die veränderte Breite oder der Breitenunterschied beider Orte.

Meridiandistanzen zweier Orte auf der Erde nennt man die beiden Bögen der Breitenparallele, welche durch die in Rede stehenden Orte gehen und zwischen den beiden Meridianen derselben liegen, in Seemeilen ausgedrückt. Ist man aber von einem Orte der Erde nach einem andern hingefahren, so wird unter Meridiandistanz der Bogen des Breitenparallels durch den erreichten oder aufgekommenen Ort, der zwischen diesem Orte und dem Meridian des verlassenen Ortes liegt, in Seemeilen ausgedrückt, verstanden. Hiernach finden, wenn man von einem Orte nach einem andern, nicht in demselben Breitenparallel liegenden Orte, hin- und dann in entgegengesetzter Richtung wieder nach dem ersten, also verlassenen Orte zurückfährt, zwei verschiedene Meridiandistanzen statt, die aber jede in Grade, Minuten u. s. w. ihres eigenen Kreises ausgedrückt, gleich dem Längenunterschiede beider Orte sind. Denkt man sich eine loxodromische Linie, also die nautische Distanz zwischen dem verlassenen und erreichten Orte, in unendlich kleine Theile getheilt und durch alle Theilpunkte Meridiane wie auch Breitenparallele gezogen, so wird jedes zwischen zwei nächsten Meridianen liegende Stückchen Breitenparallel eine Meridiandistanz. Jede dieser unendlich kleinen Meridiandistanzen ist das, was man durch die entsprechende, ebenfalls unendlich kleine nautische Distanz nach Osten oder Westen verändert, und die Summe aller dieser durch die gedachte nautische Distanz entstandenen Meridiandistanzen wird Abweichung genannt; diese ist mithin gleich dem, was bei einem und demselben Curse nach Osten oder Westen verändert wird. Die Meridiandistanz kann diesemnach nur gleich der Abweichung sein, wenn im Breitenparallel gefahren wird, also wenn der Curs recht Ost oder West war; wenn man dagegen im Meridian fährt, ist sowohl die Abweichung wie auch die Meridiandistanz gleich Null.

Die folgende Betrachtung wird das eben Gesagte anschaulicher und fasslicher machen.

Fig. 2.



In Figur 2. sei P der Nordpol der Erde, ENQ ihr Aequator, PE, PM, PN etc. Meridianquadranten, Ax, dc, UT etc. Bögen von Parallelkreisen und AB die loxodromische Linie zwischen A und B, welche alle zwischen A und B liegenden Meridiane unter ein und demselben Winkel dAc durchschneidet. Die nautische Distanz zwischen A und B ist AB (durch Seemeilen gemessen) und der Curs von A nach B der Winkel dAc.

Da die Meridiane sich alle im Pol vereinigen, so muss jede loxodromische Linie, indem sie alle Meridiane unter gleichem Winkel durchschneidet, sich dem Pol beständig nähern, ohne denselben zu erreichen.

Stellt G den Ort der Greenwicher Sternwarte vor, so ist PM der Greenwicher Meridian, GM die geographische Breite von Greenwich und PG das Complement derselben. Ferner ist AN die geographische Breite des Punktes A oder irgend eines andern Punktes in Ax, und $FN = BZ$ die geographische Breite von F oder B, oder irgend eines Punktes in dem Parallelkreise von B. Hiernach ist nun auch $FA = Bx$ = dem Breitenunterschiede der Punkte A und B oder ihrer Breitenparallele.

Nimmt man nun den Meridian von Greenwich, PM, als den ersten Meridian an, so ist die geographische Länge eines jeden Ortes in diesem Meridian = o.

Die geographische Länge des Meridians PE ist der Winkel EPM, oder dessen Maass, der Bogen EM; sie ist westlich, weil der Meridian PE auf der Westseite von PM liegt. Ebenso sind die Winkel NPM und ZPM oder ihre Maasse, nämlich, die Bögen NM und ZM, die geographischen Längen der Meridiane PN und PZ. Diese sind aber östlich, weil die Meridiane PN und PZ auf der Ostseite von PM liegen. Der Winkel ZPN oder dessen Maass, der Bogen ZN, ist der Längenunterschied der Meridiane PZ und PN, und der Winkel NPE oder dessen Maass, der Bogen NE, ist der Längenunterschied der Meridiane PN und PE.

Wenn ein Schiff von A nach B segelt, so ist BF, in Seemeilen ausgedrückt, seine Meridiandistanz, und wenn es von B nach A segelt, so ist Ax, in Seemeilen ausgedrückt, seine Meridiandistanz. Wenn man die nautische Distanz AB in sehr kleine Theile theilt, wie Ac, cD, DJ, JB, und durch die Punkte c, D, J und B die Breitenparallele cd, De, Jb und Ba legt, so entstehen kleine Dreiecke, welche man, da sie sehr klein sind, als ebene rechtwinklige Dreiecke betrachten kann, die ihrer Entstehung nach ähnlich sein müssen. Hiernach ist nun AB die Summe von Ac, cD, DJ und JB; ferner ist $AF = Ad + ce + Db + Ja$, und die Summe der Meridiandistanzen dc, eD, bJ und aB ist gleich der Abweichung. Es ist, wie man leicht sieht, die Summe der Meridiandistanzen, also $dc + eD + bJ + aB < Ax$ und $> FB$; durch Rechnung kann man aber finden, dass die gedachte Summe der kleinen Meridiandistanzen sehr nahe $= UT$, oder dem Stück Breitenparallel auf der Mittelbreite der Punkte A und B zwischen den Meridianen von A und B ist. Der Punkt A wird der verlassene und der Punkt B der erreichte oder aufgekommene Ort genannt; die Längen und Breiten dieser Orte heissen ebenfalls die verlassenen und die aufgekommenen oder erreichten, je nachdem der eine oder der andere dieser Orte der ist, von welchem ein Schiff abgefahren oder nach welchem es hingekommen ist.

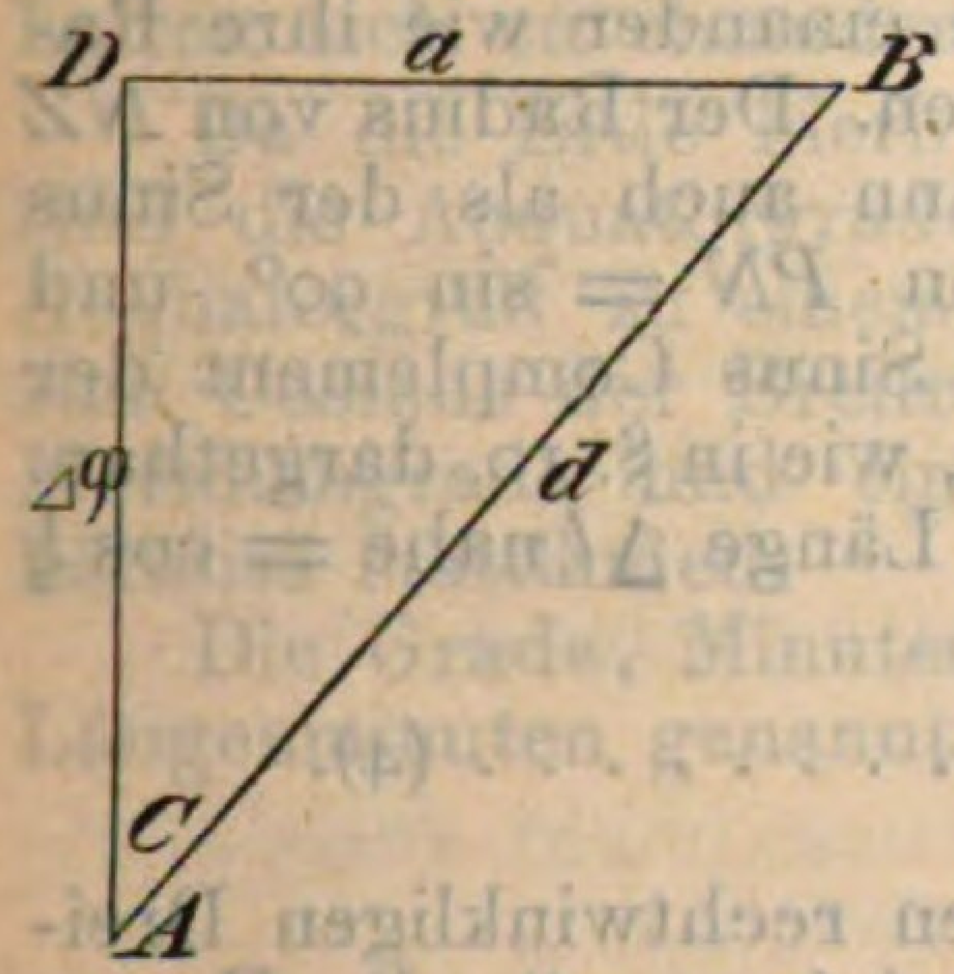
Das arithmetische Mittel der geographischen Breiten der Punkte A und B heisst Mittelbreite. Das Stück UT des Breitenparallels auf der Mittelbreite zwischen dem verlassenen und erreichten Meridian, in Seemeilen ausgedrückt, ist, wie schon bemerkt, sehr nahe gleich der Abweichung; in Graden, Minuten etc. dieses Breitenparallels angegeben, ist dieses Stück Breitenparallel aber gleich der veränderten Länge. Der Bogen AF heisst die veränderte Breite und NZ die veränderte Länge.

Da die kleinen Dreiecke, nämlich Adc, ceD, DbJ und JaB, je kleiner die Seiten derselben genommen werden, sich immer mehr ebenen rechtwinkligen Dreiecken nähern, in welchen die kleinen Stücke der Loxodromie die Hypotenusen sind, so müssen diese Dreiecke, wenn man

sich dieselben wirklich unendlich klein denkt, auch wirklich in ebene rechtwinklige Dreiecke übergehen, die einander ähnlich sind; denn in ihnen sind ausser den rechten Winkeln auch die Curswinkel, unter welchen die Loxodromie jeden Meridian schneidet, einander gleich. Die Summen aller gleichliegenden Seiten dieser unendlich kleinen ähnlichen Dreiecke müssen daher wieder gleichliegende Seiten eines ähnlichen grössern ebenen Dreiecks sein, welches das nautische Cursdreieck genannt wird. Im nautischen Cursdreieck ist daher die dem Curswinkel anliegende Kathete gleich der Summe aller Meridiantheile der unendlich kleinen Dreiecke, gleich dem Breitenunterschiede; die Hypotenuse ist gleich der Summe aller kleinen Theile der Loxodromie, gleich dem ganzen Stück der Loxodromie, gleich der nautischen Distanz; die dem Curswinkel gegenüberstehende Kathete endlich ist gleich der Summe aller kleinen Meridiandistanzen der unendlich kleinen Dreiecke, gleich der Abweichung. Es ist diesemnach als allgemein bewiesen anzunehmen, dass die Distanz in der Loxodromie, der ihr entsprechende Breitenunterschied und die beiden entsprechende Abweichung immer ein ebenes rechtwinkliges Dreieck bilden.

Die Abweichung ist östlich oder westlich, je nachdem der erreichte Ort von dem Meridian des verlassenen Ortes östlich oder westlich liegt, und die veränderte Breite ist nördlich oder südlich, je nachdem der erreichte Ort von dem Breitenparallel des verlassenen Ortes sich nördlich oder südlich befindet.

Fig. 3.



Bezeichnet man in dem nautischen Cursdreieck ABD (Fig. 3.)

die nautische Distanz AB mit d,
die Abweichung DB mit a,
den Breitenunterschied AD mit $\Delta\varphi$,
und den Curswinkel DAB mit C,

so hat man, wenn $r = \sin 90^\circ$ oder $= 1$ gesetzt wird:

(1) . . . $r : \sin C = d : a$ oder $a = d \cdot \sin C$,

(2) . . . $r : \cos C = d : \Delta\varphi$ oder $\Delta\varphi = d \cdot \cos C$,

(3) . . . $\Delta\varphi : a = r : \operatorname{tang} C$ oder $\operatorname{tang} C = \frac{a}{\Delta\varphi}$.

Diese Gleichungen zeigen deutlich, dass von den angeführten vier Stücken in dem nautischen Cursdreieck nur zwei gegeben sein dürfen, um die beiden fehlenden auf trigonometrischem Wege bestimmen zu können. Es ist einleuchtend, dass, wenn der Curs = 0, auch die Abweichung = 0 und der Breitenunterschied gleich der Distanz ist. Ebenso, dass, wenn der Curs = 90°, der Breitenunterschied = 0 und die Abweichung gleich der Distanz ist. Im ersten Falle wird ein Schiff im Meridian, im andern im Breitenparallel segeln.

Aus Fig. 2. ergiebt sich nun auch, wie man aus der Breite und Länge des verlassenen Ortes, sowie des Breiten- und Längenunterschiedes die Breite und Länge des erreichten Ortes finden kann.

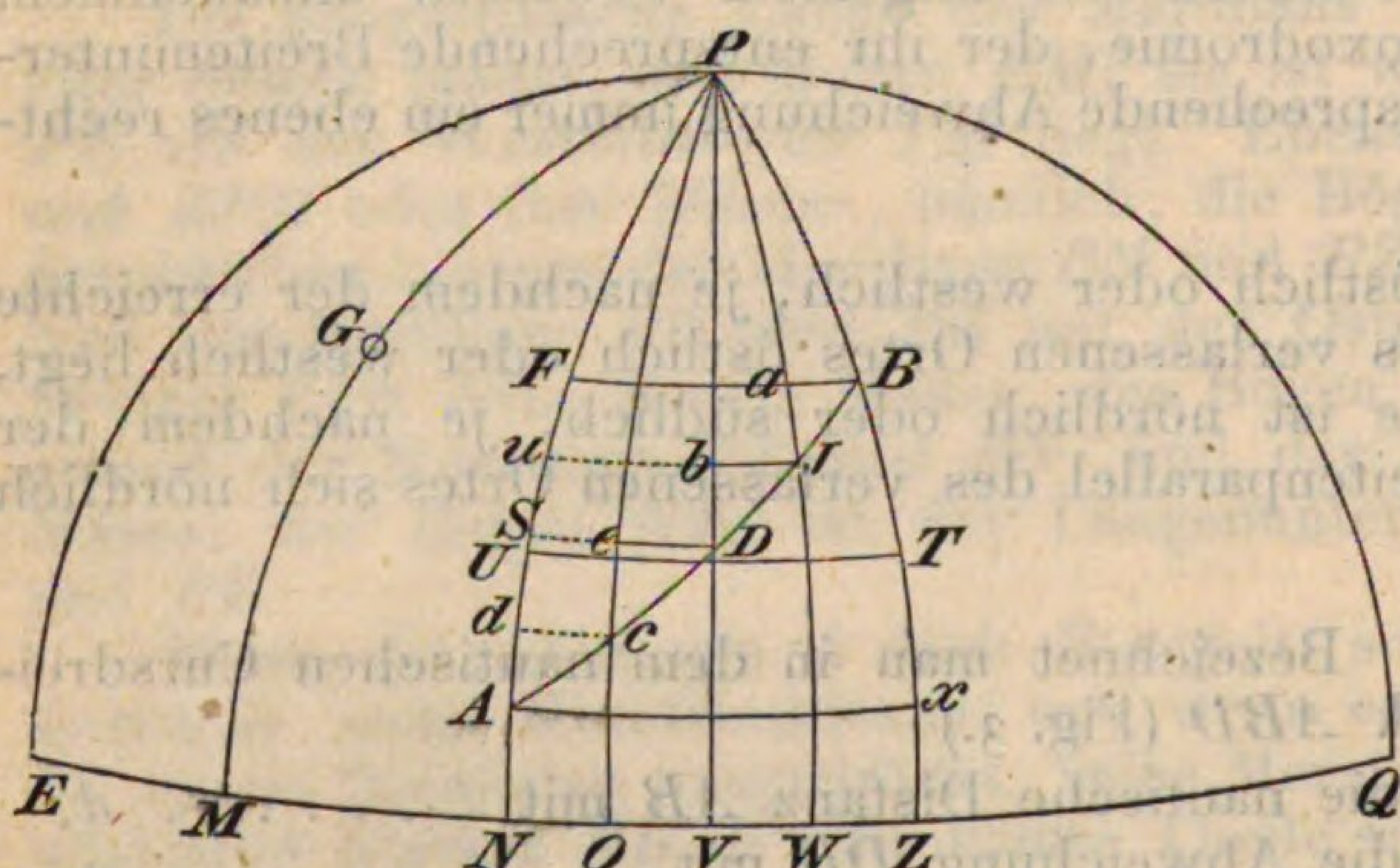
Aus der verlassenen Breite und Länge, dem gesegelten Curse und der gesegelten Distanz die erreichte Breite und Länge zu bestimmen, würde nicht viel schwerer sein, wenn man ein Mittel hätte, aus den genannten vier gegebenen Stücken den Längenunterschied zu bestimmen. Der Weg, auf welchem man dies erreicht, wird in dem folgenden Paragraphen angegeben werden.

§. 9.

Das Mittelbreitendreieck.

Wenn der Breitenunterschied oder die veränderte Breite nicht zu gross ist und man sich auf nicht sehr hoher Breite befindet, so wird, wie vorher bemerkt, die Abweichung sehr nahe gleich dem Stück Breitenparallel zwischen dem verlassenen und erreichten Meridian auf der Mittelbreite, in Seemeilen ausgedrückt, sein.

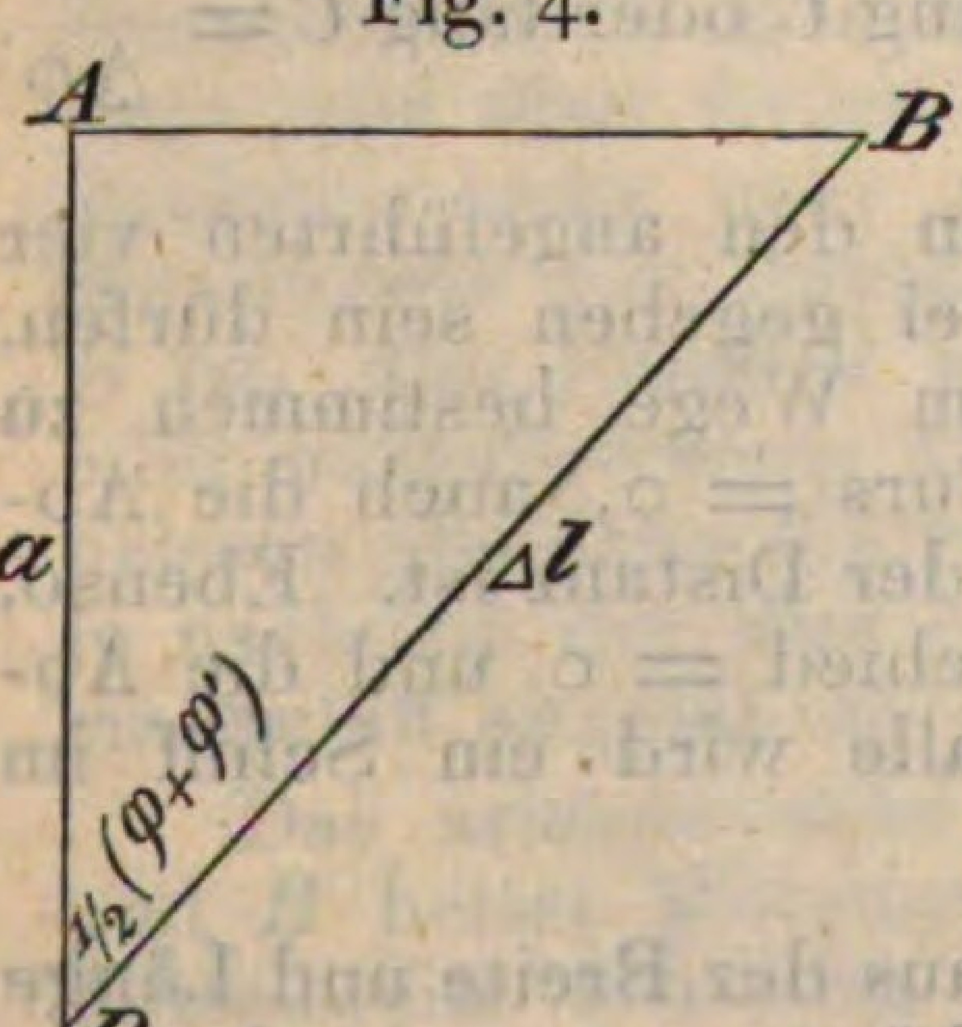
Fig. 2.



Bezeichnet man (Fig. 2.) die Breite und Länge des verlassenen Ortes A mit φ und l, die des erreichten B mit φ' und l', und ist $UN = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$, so ist UT in Seemeilen ausgedrückt, nahe gleich der Abweichung a, und NZ, die veränderte Länge $l' - l = \Delta l$. Diese beiden Bögen, nämlich UT und NZ, sind ähnliche Kreisbögen, und solche verhalten sich zu einander wie ihre Radien. Der Radius von NZ kann auch als der Sinus von $PN = \sin 90°$ und der Radius von UT als der Sinus von PU, d. i. Sinus Complement der Mittelbreite gleich $\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ angesehen werden, wie in §. 10. dargethan. Daher verhält sich die Abweichung a : veränderten Länge Δl nahe $= \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') : r$, daher nahe

$$\Delta l = a \cdot \sec\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Fig. 4.



Ist also in dem ebenen rechtwinkligen Dreieck ABD (Fig. 4.) $\angle D = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$, die Hypotenuse $BD = \Delta l$ gemacht, so wird die Kathete AD nahe $= a$, und es liefert dieses Dreieck die vorstehende Gleichung.

Dieses ebene rechtwinklige Dreieck ist auch unter dem Namen Mittelbreitendreieck bekannt, welches nur den Zweck hat, die Proportion zwischen Abweichung, Längenunterschied und Mittelbreite oder Gleichung (4) bildlich darzustellen.

Gleichung (3) in §. 8. und (4) hier, geben:

$$a = \Delta\varphi \cdot \operatorname{tang} C,$$
$$a = \Delta l \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi'),$$

folglich $\Delta\varphi \cdot \operatorname{tang} C = \Delta l \cdot \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$,

$$\text{und } \Delta l = \Delta\varphi \cdot \operatorname{tang} C \cdot \sec\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') \quad \ldots \quad (5),$$

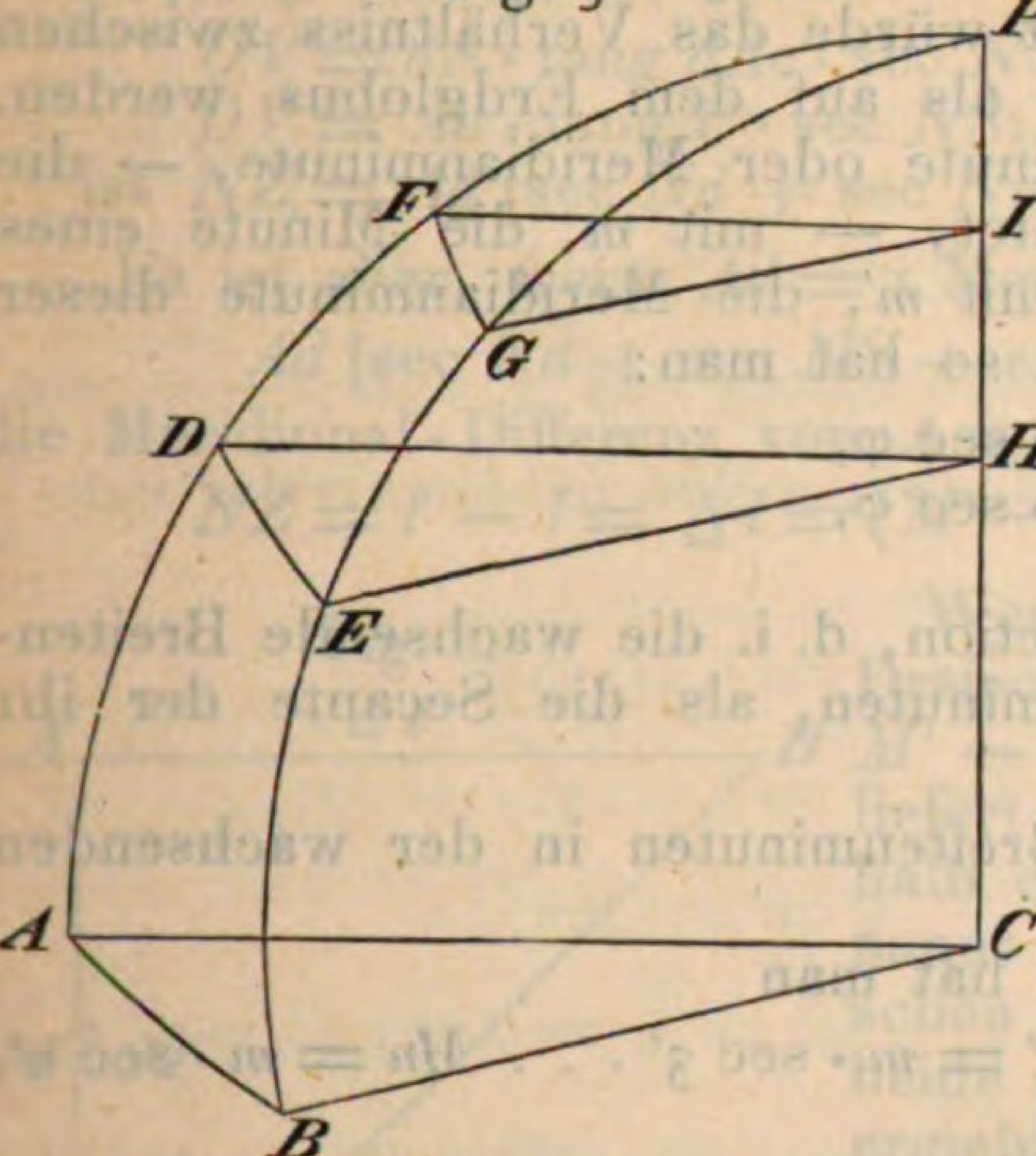
oder $\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') : \operatorname{tang} C = \Delta\varphi : \Delta l$ (6).

Zur Berechnung von Δl ist Gleichung (4) bequemer als (5).

§. 10.

Verhältniss der Breitenparallele.

Fig. 5.



In Fig. 5. sei C der Mittelpunkt der Erde, P der Pol, PA und PB zwei Meridian-Quadranten, AB ein Stück Aequator, also AC und BC zwei Aequator-Radien und PC die halbe Erdaxe. Es ist nun $\angle ACB$ gleich dem Winkel der Meridian-Ebenen BCP und ACP, gleich dem sphärischen Winkel APB. Da der Bogen AB Maass des Winkels ACB ist, so ist er es auch von dem sphärischen Winkel APB. Sind ferner DE und FG Bögen von verschiedenen Breitenparallelen, und zieht man DH und FI parallel mit AC, und EH nebst GI parallel mit BC, so ist $\angle FIG = \angle DHE = \angle ACB$, folglich sind FG, DE und AB ähnliche Kreisbögen und Maasse der resp. Winkel.

Man hat daher $AB : DE : FG = AC : DH : FI$,
oder $AB : DE : FG = \cos 0^\circ : \cos AD : \cos AF$,

d. h. die Bögen der Breitenparallele zwischen denselben Meridianen verhalten sich zu einander, wie die Cosinusse der Breiten dieser Bögen.

Da die Erde hierbei als eine vollständige Kugel angesehen ist, so sind die Aequatorgrade den Meridiangraden gleich, und da sich der Aequatorgrad zu einem Grade eines Breitenparallels verhält, wie $\cos 0^\circ$ zum Cosinus der Breite dieses Breitenparallels, so wird zwischen einem Meridiangrade und einem Grade dieses Breitenparallels dasselbe Verhältniss stattfinden.

Die Grade, Minuten der Breitenparallele werden auch Längengrade, Längenminuten genannt.

§. 11.

Die Meridionaltheile. Das Mercator'sche Dreieck.

Die zweite Methode, wenn ein Schiff in der loxodromischen Linie segelt, aus der verlassenen Breite und Länge, dem gesegelten Curse und der Distanz die erreichte Breite und Länge zu bestimmen, beruht auf Mercator's Projection.

Wenn man nach dieser Projection die Erdoberfläche auf einer Ebene darstellt, so werden alle Erdmeridiane parallele gerade Linien, die normal auf dem Aequator stehen, der hierin ebenfalls eine gerade Linie ist, alle Breitenparallele werden gerade Linien, dem Aequator gleich und parallel demselben. In dieser Projection muss nothwendig die Projection der loxodromischen Linie ebenfalls eine gerade Linie sein, weil sie alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, und deshalb wird in Karten, nach dieser Projection entworfen, die Abtragung des gesegelten Curses in der loxodromischen Linie wesentlich erleichtert.

Karten, nach dieser Projection entworfen, nennt man auch wachsende Karten.

Nach der in Rede stehenden Projection werden die Minuten der Breitenparallele den Aequatorminuten gleich gemacht, also nach dem

Verhältnisse: Cosinus ihrer Breite zum sin 90°, oder sin 90° zur Secante ihrer Breite, vergrössert.

Die Meridianminuten, welche mit den Minuten der Breitenparallele in derselben Breite liegen, werden in dieser Projection nach demselben Verhältnisse zu vergrössern sein, sonst würde das Verhältniss zwischen beiden in der Projection ein anderes als auf dem Erdglobus werden. Bezeichnet man daher die Aequatorminute oder Meridianminute, — die Erde als vollständige Kugel betrachtet, — mit m, die Minute eines Breitenparallels, dessen Breite φ ist, mit m', die Meridianminute dieser Breite in Mercator's Projection mit M, so hat man:

$$1)\ m = m' \cdot \sec \varphi,$$

$$2)\ M = m \cdot \sec \varphi,$$

woraus folgt:

die Meridianminute in Mercator's Projection, d. i. die wachsende Breitenminute M, enthält so viele Aequatorminuten, als die Secante der ihr entsprechenden Breite Einheiten hat.

Sind $M', M'', M''' \ldots\ldots Mn$ Breitenminuten in der wachsenden Karte, und ihre resp. Breiten

$$1', 2', 3' \ldots\ldots\ldots n', \text{ so hat man}$$

$$M' = m \cdot \sec 1',\ M'' = m \cdot \sec 2',\ M''' = m \cdot \sec 3' \ldots Mn = m \cdot \sec n',$$

woraus folgt:

$$M' + M'' + M''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Mn$$
$$= [\sec 1' + \sec 2' + \sec 3' + \ldots\ldots\ldots\ldots \sec n'] \cdot m \ldots (I),$$

d. h. die Summe der wachsenden Breitenminuten — vom Aequator bis zu der gegebenen Breite — angegeben in Aequatorminuten, sind gleich der Summe der Secanten aller Minuten, von 1' anfangend, welche die gegebene Breite enthält. Diese Summe der Secanten nennt man Meridionaltheile der entsprechenden Breite; sie sind auch die Anzahl Aequatorminuten, um welche der Breitenparallel einer gegebenen Breite in einer wachsenden Karte von dem Aequator abstehen muss.

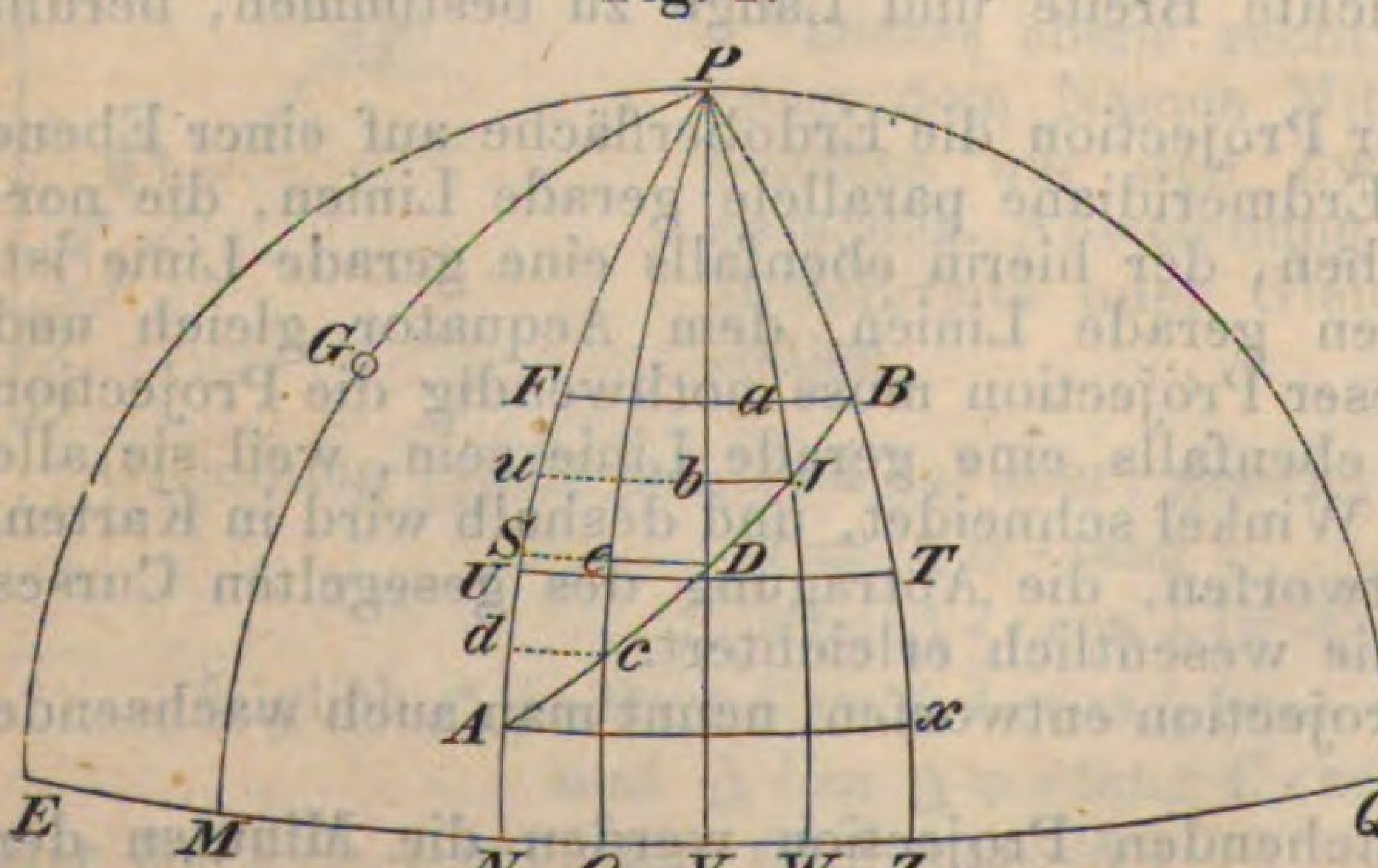
Bequemer, als nach (I), würde man indessen die Meridionaltheile M, der Breite φ entsprechend, nach folgender Formel berechnen können:

$$M = 7915.704468 \cdot \log \operatorname{tang} (45° + \tfrac{1}{2}\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (II),$$

deren Ableitung hier jedoch übergangen ist, weil dazu nicht allein Differential-, sondern auch Integral-Rechnung erforderlich ist.

Der Unterschied der Meridionaltheile zweier Breiten wird Meridional-Differenz, auch vergrösserter Breitenunterschied genannt, und dieser zeigt an, wie viele Aequatorminuten in der wachsenden Erd-Karte die Breitenparallele der gegebenen Breiten von einander abstehen müssen.

Fig. 2.



Die Breite und Länge des verlassenen Ortes A (Fig. 2.) sei, wie in §. 9. mit φ und l, die des erreichten B sei mit φ' und l', die veränderte Breite mit $\Delta\varphi$, die Abweichung mit a, und der Curs mit C bezeichnet. Ferner seien M und M' die Meridionaltheile von φ und φ'.

Im $\triangle Adc$ ist nun $dc = Ad \cdot \text{tang}\, dAc = Ad \cdot \text{tang}\, C$,
und da $dc = NO \cdot \cos Nd$,
so ist $NO = Ad \cdot \text{tang}\, C \cdot \sec Nd$.

Diesem zufolge ist auch:
$OV = dS \cdot \text{tang}\, dAc \cdot \sec NS$, und wenn $Ad = dS$ ist, so
$OV = Ad \cdot \text{tang}\, C \cdot \sec NS$, folglich auch, wenn $Ad = Su = uF$,
ist $NZ = Ad\, [\sec Nd + \sec NS + \sec Nu + \sec NF]\, \text{tang}\, C$.

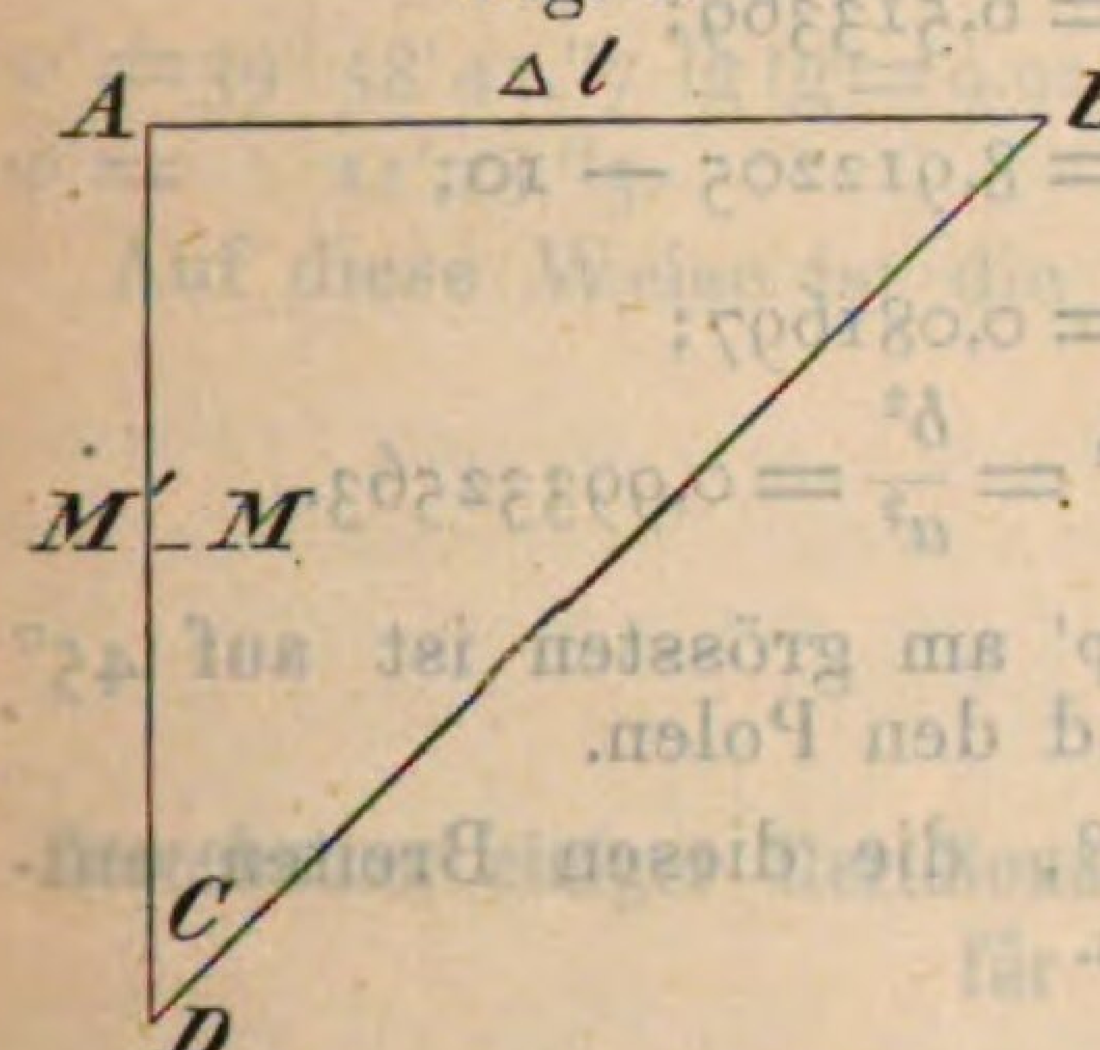
Es ist aber, wenn $Ad = 1$ Meridianminute angenommen wird,

$$Ad\, [\sec Nd + \sec NS + \sec Nu + \sec NF] = M' - M,$$

die Meridional-Differenz von A und B, also

$$NZ = l' - l = \Delta l = [M' - M]\, \text{tang}\, C \, \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Fig. 6.



Wenn man nun im ebenen rechtwinkligen Dreieck ABD (Fig. 6.), $AB = \Delta l$, $AD = M' - M$ macht, so wird $\angle D = C$, und es liefert dieses Dreieck die Gleichung (7), weshalb es auch das Mercator'sche Dreieck genannt wird. Dieses Dreieck ist dem nautischen Cursdreieck (§. 8. Fig. 3.) ähnlich, weil beide gleiche Winkel haben, und aus beiden ergiebt sich:

$$\Delta\varphi : a = M' - M : \Delta l \, \ldots (8).$$

Nach Gleichung (4) in §. 9. ist für $r = 1$,

$$\Delta l = a \cdot \sec \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi')$$

nur dann nahe richtig, wenn $\varphi' - \varphi$ nicht sehr bedeutend und φ' wie auch φ nicht sehr gross ist; setzt man aber die Correction, welche auf $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ anzubringen ist $= x$, um Δl genau richtig zu erhalten, wie gross auch $\varphi' - \varphi$ sein mag, so hat man

$\Delta l = a \cdot \sec [\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x]$, und nach Gleichung (8) ist ebenfalls ganz

$$\text{strenge } \Delta l = \frac{a}{\Delta\varphi} [M' - M],$$

$$\text{folglich } \sec [\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x] = \frac{M' - M}{\Delta\varphi} \, \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

woraus sich x bestimmen lässt.

§. 12.

Berechnung der geocentrischen Breite eines Ortes aus seiner geographischen und den beiden halben Erdaxen oder der Excentricität der Erd-Meridiane.

Wenn man, wie in §. 5., die geographische und geocentrische Breite eines Ortes mit φ und φ' bezeichnet, den Halbmesser des Erd-Aequators $a = 3272077{,}14$ Toisen und die halbe Erdaxe $b = 3261139.33$ Toisen nach §. 7. annimmt, so hat man nach Gleichung (23) in §. 85. der Ellipse zur Berechnung von φ' die Formel

$$\text{tang}\, \varphi' = \text{tang}\, \varphi \cdot \frac{b^2}{a^2} \, \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Bezeichnet man ferner die lineare Excentricität der Erd-Meridiane mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ und den Quotienten $\frac{e}{a}$ mit E, unter welchem letztern

späterhin immer die Excentricität dieser Meridiane verstanden werden soll, so ist:

$$E^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\tan(\varphi - \varphi') = \frac{\frac{1}{2} E^2 \cdot \sin 2\varphi}{1 - E^2 \cdot \sin^2 \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{und nahe } \varphi - \varphi' = \frac{E^2 \cdot \sin 2\varphi}{2 \cdot \sin 1''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

(2)–(4) nach §. 87. der Ellipse.

Die Formeln (1) und (4) sind zur Berechnung von φ' und $\varphi - \varphi'$ sehr bequem. Die dazu erforderlichen Logarithmen der Zahlenwerthe von $\frac{b^2}{a^2}$ und E^2 sind den obigen Angaben nach:

$$\log a = 6{,}514823; \qquad \log b = 6{,}513369;$$

$$\log \frac{b^2}{a^2} = 9{,}997092 - 10; \quad \log E = 8{,}912205 - 10;$$

$$\log E^2 = 7{,}824410 - 10; \qquad E = 0{,}081697;$$

$$E^2 = 0{,}00667437, \text{ also } 1 - E^2 = \frac{b^2}{a^2} = 0{,}99332563.$$

Aus (3) und (4) ersieht man, dass $\varphi - \varphi'$ am grössten ist auf 45° Breite, und gleich Null auf dem Aequator und den Polen.

Beispiel. Für $\varphi = 40°\ 10'$ und $= 45°$, die diesen Breiten entsprechende geocentrische Breite zu berechnen.

I. nach Formel (1).

$\varphi = 40°\ 10'$. . . $\lg\operatorname{tg} = 9{,}926378 - 10$	$\varphi = 45°\ 0'$. . . $\lg\operatorname{tg} = 0{,}000000$
$\lg\frac{b^2}{a^2} = 9{,}997092 - 10$	$\lg\frac{b^2}{a^2} = 9{,}997092 - 10$
$\varphi' = 39°\ 58'\ 39{,}''8$ $\lg\operatorname{tg} = 9{,}923470 - 10$	$\varphi' = 44°\ 48'\ 29{,}''5$ $\lg\operatorname{tg} = 9{,}997092 - 10$
$\varphi - \varphi' = 0°\ 11'\ 20{,}''2.$	$\varphi - \varphi' = 0°\ 11'\ 30{,}''5.$

II. nach der Näherungsformel (4).

$\varphi = 40°\ 10'$	$\varphi = 45°\ 0'$
$2\varphi = 80°\ 20'$ $\lg\sin = 9{,}993789 - 10$	$2\varphi = 90°$. . . $\lg\sin = 0{,}000000$
$\lg E^2 = 7{,}824410 - 10$	$\lg E^2 = 7{,}824410 - 10$
$c.\ \lg 2 = 9{,}698970 - 10$	$c.\ \lg 2 = 9{,}698970 - 10$
$c.\ \lg\sin 1'' = 5{,}314425$	$c.\ \lg\sin 1'' = 5{,}314425$
$678{,}''6\ \lg = 2{,}831594$	$688{,}''3\ \lg = 2{,}837805$
$\varphi - \varphi' = 11'\ 18{,}''6.$	$\varphi - \varphi' = 11'\ 28{,}''3.$

Will man bei Berechnung der vorigen Beispiele nach (1) die Abplattung der Erde $= \frac{1}{300}$ benutzen, so müssen zuerst die derselben entsprechenden Zahlenwerthe von $\frac{b^2}{a^2}$ und E^2 ermittelt werden.

Da nun $\frac{1}{300} = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$,

woraus folgt $\frac{b}{a} = \frac{299}{300}$, also $\frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{299}{300}\right)^2$ und $E^2 = 1 - \left(\frac{299}{300}\right)^2$,

so ergiebt sich: $\lg 299 = 2{,}475671$

$\lg 300 = 2{,}477121$

$\lg \frac{b}{a} = 9{,}998550 - 10$

$\lg \frac{b^2}{a^2} = 9{,}997100 - 10$

$\frac{b^2}{a^2} = 0{,}993345$

$E^2 = 0{,}006655$

$\lg E^2 = 7{,}823148 - 10$

$\varphi = 40^\circ\, 10'$. . . $\lg tg = 9{,}926378 - 10$	$\varphi = 45^\circ\; 0'$. . . $\lg tg = 0{,}000000$
$\lg \frac{b^2}{a^2} = 9{,}997100 - 10$	$\lg \frac{b^2}{a^2} = 9{,}997100 - 10$
$\varphi' = 39^\circ\, 58'\, 41{,}''7$ $\lg tg = 9{,}923478 - 10$	$\varphi' = 44^\circ\, 48'\, 31{,}''4$ $\lg tg = 9{,}997100 - 10$
$\varphi - \varphi' = \quad 11'\, 18{,}''3.$	$\varphi - \varphi' = \quad 11'\, 28{,}''6.$

Auf diese Weise ist die nautische Tafel XIX. berechnet worden.

§. 13.

Berechnung einiger Meridionaltheile nach Formel (II.) in §. 11. und zwar für 60° und 80° Breite.

In dieser Formel $M = 7915{,}704 \cdot \log\tan(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, ist die Tangente für den Radius $= 1$ zu nehmen und somit die Rechnung nach derselben wie folgt:

für $\varphi = 60^\circ$

$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi = 75^\circ$ $\log\tan = 0{,}571948$ $\log = 9{,}757356 - 10$

$7915{,}704$ $\log = 3{,}898489$

Meridionaltheile $= 4527{,}37$ $\log = 3{,}655845;$

für $\varphi = 80^\circ$

$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi = 85^\circ$ $\log\tan = 1{,}058048$ $\log = 0{,}024506$

$7915{,}704$ $\log = 3{,}898489$

Meridionaltheile $= 8375{,}20$ $\log = 3{,}922995.$

Die nautische Tafel III. ist so berechnet.

§. 14.

Berechnung der Grösse x nach Formel (9) in §. 11., welche man auf die Mittelbreite anzuwenden hat, um diejenige Breite zu erhalten, in welche die Abweichung fällt.

Obige Formel, nämlich $\sec\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} + x\right) = \frac{M' - M}{\Delta\,\varphi}$, kann bekanntlich auch so geschrieben werden: $\cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} + x\right) = \frac{\Delta\,\varphi}{M' - M}$, nach welcher letztern das Beispiel: „verlassene Breite $= 60^\circ\, N$ und erreichte Breite $= 72^\circ\, N$,“ berechnet werden soll.

$$\varphi = 60^\circ \text{ Meridionaltheile} = 4527{,}37$$
$$\varphi' = 72^\circ \text{ Meridionaltheile} = 6334{,}84$$
$$\varphi' - \varphi = 12^\circ \qquad 1807{,}47 \quad \log = 3{,}257073$$
$$\text{d. i. } \Delta\varphi = 720' \ldots\ldots\ldots\ldots \log = 2{,}857332$$
$$\text{giebt } \frac{\varphi + \varphi'}{2} + x = 66^\circ\ 31'\ 31'' \quad \log\cos = 9{,}600259 - 10$$
$$\text{und da } \frac{\varphi + \varphi'}{2} = 66^\circ$$
$$\text{so wird } \quad x = 0^\circ\ 31{,}'5.$$

Diese Grösse x ist zur Mittelbreite zu addiren.

Die nautische Tafel IV. ist auf diese Weise berechnet.

§. 15.

Astronomische Erklärungen.

Zenith, Nadir, Almukantarate, Horizonte und Verticalkreise.

Schon in §. 2. ist gesagt, dass der Himmel mit seinen Gestirnen einer hohlen Kugel gleicht, welche die Erde concentrisch umgiebt, und diese Erscheinung davon herrührt, dass das Auge nach allen Richtungen gleich weit in den unendlichen Weltraum dringt. Von dieser scheinbaren hohlen Himmelskugel sieht man aber von der Oberfläche der Erde aus immer nur die eine Hälfte, weil die undurchsichtige Erde die Aussicht nach der andern Hälfte nicht gestattet.

Die Richtung der Schwere auf der Oberfläche der Erde in dem Orte des Beobachters trifft in ihrer Verlängerung die hohle Himmelskugel in zwei Punkten, wovon der über dem Beobachter befindliche, Zenith oder Scheitelpunkt, und der diesem entgegengesetzte, unsichtbare, Nadir oder Fusspunkt genannt wird. Die Verbindungslinie zwischen diesen beiden Punkten heisst bekanntlich Verticallinie.

Alle Kreise an der hohlen Himmelskugel, deren Mittelpunkte in der Verticallinie liegen, und deren Ebenen normal auf dieser stehen, werden Höhenparallele oder Almukantarate genannt; von diesen heisst aber derjenige, dessen Ebene durch das Centrum der Erde geht, der wahre Horizont, und ein zweiter, dessen Ebene die Oberfläche der Erde in dem Punkte berührt, den der Beobachter einnimmt, der scheinbare Horizont dieses Ortes.

Der wahre Horizont theilt somit die Himmelskugel in zwei gleiche Theile, nämlich in die sichtbare und unsichtbare Halbkugel. In Bezug auf diejenigen Gestirne, welche von der Erde unendlich weit entfernt sind, — gegen welche Entfernung der Halbmesser der Erde als ganz verschwindend anzusehen ist, — ist es gleichgültig, ob man den wahren Horizont für den scheinbaren setzt, oder umgekehrt.

Zenith und Nadir sind somit die Pole des wahren Horizontes, und daher müssen alle grössten Kreise, die durch diese beiden Punkte gehen, den wahren Horizont normal durchschneiden. Sie werden Verticalkreise, oder Scheitelkreise, oder Höhenkreise genannt.

Die Ebene des scheinbaren Horizontes darf nicht immer die Oberfläche der Erde berühren, — welches nur dann streng genommen möglich sein wird, wenn nicht die Rede von dem scheinbaren Horizonte des Beobachters ist, — sondern muss stets durch das Auge des Beobachters gehen und normal auf der Richtung der Schwere des Beobachtungsortes sein.

Wenn das Auge sich in einer ebenen Gegend oder auf dem Meere in einiger Entfernung von der Oberfläche der Erde oder des Meeres

befindet, so erblickt es um sich herum einen Kreis, in dessen Mittelpunkt es zu sein und in dessen Umfang es die Berührung von Himmel und Erde wahrzunehmen glaubt. Dieser Kreis wird Gesichtskreis, auf dem Meere auch Meereshorizont, Seehorizont, Kimm, auch Kimmung genannt. Er entsteht auf folgende Weise.

Wenn man von dem Auge des Beobachters, welches etwas von der Oberfläche des Meeres entfernt ist, sich eine Tangente an die Oberfläche des Meeres gezogen denkt, so wird der Berührungspunkt im Gesichtskreise liegen; denkt man sich ferner diese Tangente auf der Oberfläche des Meeres ganz herum geführt, aber immer so, dass sie letztere berührt und sich stets im Auge des Beobachters befindet, so wird dadurch der Gesichtskreis beschrieben, d. h. alle Berührungspunkte machen den Gesichtskreis aus. Die Tangente selbst beschreibt den Mantel eines Kegels, dessen Spitze im Auge des Beobachters liegt, und dessen Grundkante der Gesichtskreis ist. Dieser Gesichtskreis wird immer, wenn das Auge des Beobachters etwas von der Oberfläche des Meeres entfernt ist, unter dem scheinbaren Horizonte liegen, höchstens kann er, wenn das Auge an der Oberfläche des Meeres ist, mit diesem zusammenfallen.

§. 16.

Weltpole, Weltaxe, Himmels-Aequator, Declinationskreise oder Stundenkreise.

Die verlängerte Erdaxe bis an die hohle Himmelskugel heisst Weltaxe oder Himmelsaxe, und die Punkte, in welchen sie die Himmelskugel trifft, nennt man Weltpole oder Himmelspole.

Der Weltpol, welcher von der nördlichen Halbkugel der Erde aus sichtbar ist, wird der nördliche, und der andere der südliche genannt.

Die tägliche Bewegung der Himmelskörper geht in unter einander sehr nahe parallelen Kreisen vor sich, deren sämmtliche Mittelpunkte in der Weltaxe liegen, und deren Ebenen normal auf dieser stehen. Diese Parallelkreise an der hohlen Himmelskugel nennt man Declinations-Parallele und unter diesen ist der von beiden Weltpolen gleich weit abstehende ein grösster Kreis, der Aequinoctial oder Himmels-Aequator genannt wird. Der Himmels-Aequator liegt mit dem Erd-Aequator in einer Ebene und theilt die Himmelskugel in zwei Hälften, die nördliche und südliche Halbkugel.

Grösste Kreise, durch die beiden Weltpole gehend, werden Declinationskreise oder Stundenkreise genannt, je nachdem sie zur Bestimmung der Declination oder des Stundenwinkels dienen sollen, und stehen normal auf dem Himmels-Aequator. In der Regel werden darunter nur die grössten Halbkreise, von Pol zu Pol gehend, verstanden.

§. 17.

Die Hauptpunkte des Horizontes, die Mittagslinie, der Himmels-Meridian.

Der wahre Horizont und der Himmels-Aequator halbiren sich gegenseitig in zwei Punkten, wovon derjenige Punkt, der 90° vom Meridian an der Seite, an welcher die Gestirne sich über den Horizont erheben, entfernt liegt, der wahre Ostpunkt, oder der wahre Osten, auch Morgen, und der ihm entgegengesetzte der wahre Westpunkt, oder der wahre Westen, auch Abend genannt wird.

Derjenige grösste Kreis an der scheinbaren hohlen Himmelskugel, den man sich durch die beiden Weltpole und durch das Zenith und Nadir eines Ortes gezogen denkt, ist der Himmels-Meridian dieses Ortes, welcher mit dem Erd-Meridian desselben Ortes in einer Ebene liegt. Der Himmels-Meridian halbirt den wahren Horizont ebenfalls in zwei Punkten, wovon

der in der nördlichen Halbkugel liegende, der wahre Nordpunkt, oder der wahre Norden, und der diesem entgegengesetzte, der wahre Südpunkt, oder der wahre Süden, genannt wird.

Die gerade Linie zwischen dem wahren Nord- und Südpunkte heisst Mittagslinie, oder auch die wahre Nord-Südlinie, und diejenige zwischen dem wahren Ost- und Westpunkte die wahre Ost-Westlinie.

Die vier Punkte: Nord, Süd, Ost und West sind die vier Cardinal- oder Hauptpunkte des wahren Horizontes und durch sie wird derselbe in vier gleiche Theile getheilt, deren jeder 90° enthält. Denkt man sich durch diese Hauptpunkte Verticalkreise gelegt, so durchschneiden letztere den scheinbaren Horizont und auch den Gesichtskreis, jeden in vier Punkten, die man wieder als die Hauptpunkte dieser Kreise ansehen kann und die somit dieselbe Benennung erhalten. Die in der Nähe der Hauptpunkte liegenden Theile des Horizontes bilden die Himmelsgegenden.

§. 18.

Auf- und Untergang, Amplitude, Azimuth, Culmination, Stundenwinkel, Höhe und Zenithdistanz eines Gestirns.

Der Auf- oder Untergang eines Gestirns findet in dem Augenblicke statt, in welchem dasselbe auf der Ost- oder Westseite durch den Horizont geht. Der Bogen des Horizontes zwischen dem Centrum des auf- oder untergehenden Gestirns und dem Ost- oder Westpunkte heisst Morgen- oder Abendweite, oder auch Amplitude desselben.

Culmination eines Gestirns für einen gegebenen Ort oder Meridian der Erde bezeichnet den Augenblick, in welchem dasselbe sich im Himmelsmeridian dieses Ortes befindet.

Derjenige Verticalkreis, welcher durch den wahren Ost- und Westpunkt geht, heisst Premiervertical oder der erste Vertical, und derjenige Stundenkreis, welcher ebenfalls durch den wahren Ost- und Westpunkt geht, wird der Sechsstundenkreis genannt.

Der Winkel am Zenith zwischen dem Himmelsmeridian und dem Verticalkreise eines Gestirns ist dessen wahres Azimuth, und der Winkel am Zenith zwischen dem ersten Vertical und dem Verticalkreise eines Gestirns ist auch dessen wahre Amplitude.

Der Winkel am Weltpol zwischen dem Himmelsmeridian eines Ortes und dem Stundenkreise eines Gestirns ist der Stundenwinkel desselben. Die Azimuthe und Stundenwinkel der Gestirne kann man vom Himmelsmeridian nach Osten oder Westen bis 180°, oder auch bis 360° zählen; gewöhnlich zählt man sie aber bis 180°, und in diesem Falle ist das Azimuth oder auch der Stundenwinkel östlich oder westlich, je nachdem der Vertical- oder Stundenkreis des Gestirns auf der Ost- oder Westseite des Meridians liegt.

Unter Höhe eines Gestirns versteht man im Allgemeinen den Verticalwinkel, den die gerade Linie vom Mittelpunkte des Gestirns nach dem Auge des Beobachters gezogen, mit der Ebene des scheinbaren Horizontes des Beobachters macht, und unter Zenithdistanz oder Zenithabstand desselben den Winkel, den diese Verbindungslinie zwischen dem Auge des Beobachters und dem Mittelpunkte des Gestirns mit der Richtung der Schwere am Orte des Beobachters nach dem Zenith hin, bildet. Höhe und Zenithdistanz bilden also zusammengenommen einen rechten Winkel. Die Höhe eines Gestirns über dem Meereshorizont ist der Winkel, den die gerade Linie von dem Auge des Beobachters nach dem Mittelpunkte des Gestirns gedacht, mit derjenigen geraden Linie bildet, welche man sich von dem Auge des Beobachters nach demjenigen Punkte im Meereshorizont gezogen denkt, der in der Verticalebene des Gestirns liegt. Soll die Höhe eines Gestirns

sich aber auf den wahren Horizont beziehen, so ist sie der Winkel, den die gerade Linie zwischen den Mittelpunkten der Erde und des Gestirns mit der Ebene des wahren Horizontes des Beobachters bildet.

§. 19.

Die Drehung der Erde um ihre Axe.

Im Allgemeinen wird in der Astronomie die Zeit durch den Winkel gemessen, den die Verbindungslinie zwischen einem gleichförmig bewegten Punkt und einem unveränderlichen Mittelpunkte, beide stets in derselben Ebene liegend, beschreibt.

Da nun von den ältesten Beobachtungen bis auf die neuesten herab die scheinbare tägliche Bewegung der hohlen Himmelskugel mit ihren Gestirnen um die Erde, oder richtiger die Umdrehung der Erde um ihre Axe eine solche äusserst gleichförmige Bewegung ist, so ist auch diese Bewegung vorzugsweise zur Bestimmung der Zeit benutzt worden.

Denkt man sich nämlich von einem festen Punkt an der hohlen Himmelskugel eine Normale auf die Weltaxe gezogen und diese für den Augenblick in der obern Meridianebene des Beobachtungsortes (die Ebene durch die beiden Weltpole und das Zenith gehend) befindlich, so wird diese Gerade sich gleichförmig nach Westen zu von der Meridianebene entfernen und somit sich nach derselben Richtung fortbewegen, bis sie wieder die frühere Lage in der Meridianebene einnimmt. Durch diese Rotation (Umdrehung) hat dann die Gerade einen Winkel von 360° beschrieben, den man Behufs der Zeitmessung in 24 gleiche Theile theilt und jeden davon eine Stunde nennt.

Denkt man sich ferner durch den angenommenen Punkt einen Stundenkreis gelegt, so wird dieser während der ganzen scheinbaren Rotation der Himmelskugel einen sphärischen Winkel von 360° oder 24 Stunden beschreiben; von diesem Winkel ist aber der Himmels-Aequator das Maass und deshalb gehen 15 Aequatorgrade auf eine Stunde.

Da der Erd-Aequator und der Himmels-Aequator concentrische Kreise sind, so müssen auch 15° des ersteren auf eine Stunde gehen, und diesem zufolge kann die geographische Länge ebenfalls in Zeit ausgedrückt werden. Die Stunde wird ferner in 60 Zeitminuten, die Zeitminute in 60 Zeitsecunden u. s. w. eingetheilt; demnach müssen 15 Bogenminuten auf eine Zeitminute, 15 Bogensecunden auf eine Zeitsecunde u. s. w. gehen. Ferner muss 1° = 4 Zeitminuten, 1 Bogenminute = 4 Zeitsecunden sein.

§. 20.

Wahre und mittlere Zeit, Sternzeit.

Man hat es in der Astronomie besonders mit drei verschiedenen Zeiten zu thun, nämlich: mit wahrer Zeit, mittlerer Zeit und Sternzeit.

Zuvörderst ist folgende Bemerkung zu beachten. Den Himmelsmeridian betrachte man als aus zwei grössten Halbkreisen bestehend, und zwar den von dem sichtbaren (obern) Weltpol durch das Zenith nach dem unsichtbaren (untern) Weltpol gehenden, als den obern Meridian. die andere Hälfte von dem sichtbaren Weltpol durch das Nadir nach dem unsichtbaren Weltpol sich erstreckend, als den untern Meridian, Wenn ein Gestirn sich nun im obern oder untern Meridian befindet, so sagt man, es sei in seiner obern oder untern Culmination.

Wahre astronomische Zeit ist der in Zeit verwandelte Stundenwinkel der Sonne vom obern Meridian nach und durch Westen bis 360° gezählt. Da die Sonne sich aber nicht in dem Himmels-Aequator gleichförmig fortbewegt, sondern in der Ekliptik, — einem Kreise, der den Himmels-Aequator unter einem Winkel von ungefähr $23\frac{1}{2}$° durchschnei-

det, — ungleichförmig fortschreitet, wie späterhin angegeben werden soll; so muss die wahre Zeit selbst etwas Ungleichförmiges und daher zu einem allgemeinen Zeitmaasse nicht unmittelbar geeignet sein; weil aber die Sonne unter allen Gestirnen unsere Aufmerksamkeit besonders erregt, und in sofern zur Bestimmung der Zeit am geeignet'sten ist, so hat man, um ein gleichförmiges Zeitmaass zu erhalten, sich eine andere mittlere Sonne S' gedacht, welche gleichförmig in der Ektiptik fortschreitet, und zwar so, dass sie mit der wirklichen Sonne zugleich durch die beiden Punkte geht, in welchen diese ihre grösste und kleinste Geschwindigkeit hat. Hierdurch wird nun allerdings die von der ungleichförmigen Bewegung der wirklichen Sonne herrührende Ungleichheit gehoben, es bleibt aber noch die von der schiefen Lage der Ekliptik gegen den Himmels-Aequator abhängende Ungleichheit übrig. Um auch diese wegzuschaffen, denkt man sich eine zweite mittlere Sonne S'', mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Himmels-Aequator so fortrückend, dass sie mit der ersten mittlern Sonne S' zugleich durch die beiden Durchschnittspunkte der Ekliptik und des Himmels-Aequators geht. Hiernach sind nun die Umlaufszeiten dieser drei Sonnen gleich, die erste bewegt sich aber in der Ekliptik mit ungleichförmiger Geschwindigkeit, die zweite in derselben Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit, und die dritte im Himmels-Aequator ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Wenn überhaupt von der mittlern Sonne späterhin die Rede ist, so wird die zweite mittlere Sonne immer damit gemeint sein. Diese mittlere Sonne ist demnach nur ein gedachter Punkt, der gleichförmig im Himmels-Aequator nach Osten rückt.

Mittlere astronomische Zeit ist nun der in Zeit verwandelte Stundenwinkel der zweiten mittlern Sonne S'', vom obern Meridian nach und durch Westen bis 360° gezählt.

Sternzeit ist der in Zeit verwandelte Stundenwinkel des mittlern (von der Nutation befreiten) Frühlingspunktes, ebenfalls von dem obern Meridian nach und durch Westen bis 360° gerechnet.

Der wahre astronomische Tag, der mittlere astronomische Tag und der Sterntag, diese Tage fangen an, wenn beziehlich die wahre Sonne oder vielmehr das Centrum derselben, die zweite mittlere Sonne S'' und der mittlere Frühlingspunkt in dem obern Meridian des Ortes sind.

Die Dauer des wahren astronomischen Tages, des mittlern astronomischen Tages und des Sterntages sind beziehungsweise die Zeiten zwischen zwei aufeinander folgenden obern Culminationen der wahren Sonne, der zweiten mittlern Sonne S'' und des mittlern Frühlingspunktes.

Die Differenz zwischen der wahren und mittlern astronomischen Zeit, — beide für denselben Zeitpunkt geltend, — wird Zeitgleichung genannt.

Ausser diesen Zeiten hat man noch bürgerliche Zeit. Der bürgerliche Tag fängt 12 Stunden früher an als der astronomische, also wenn die wahre oder mittlere Sonne in dem untern Meridian ist. Man zählt ferner bei der bürgerlichen Zeitrechnung nur bis 12 Stunden. Je nachdem die wahre oder mittlere Sonne in dem obern Meridian ist, sagt man, es ist wahrer oder mittlerer Mittag, und je nachdem die wahre oder mittlere Sonne sich in dem untern Meridian befindet, ist es wahre oder mittlere Mitternacht. Der bürgerliche Tag fängt also um Mitternacht an. Man zählt die Stunden von hier bis Mittag und nennt das die Morgenstunden; von Mittag werden sie dann weiter bis Mitternacht gezählt und Abendstunden genannt.

Der natürliche Tag ist diejenige Zeit, welche die Sonne über dem Horizonte verweilt, und unter Nacht versteht man die Zeit, welche die Sonne unter dem Horizonte bleibt. Gewöhnlich wird der natürliche Tag und die Nacht zusammengenommen auch Tag genannt.

§. 21.

Jahre und Monate; Ekliptik; Planeten, Monde und deren Bahnen.

Fernere Maasse der Zeit sind noch das Jahr und der Monat; bevor jedoch hierüber etwas Näheres gesagt werden kann, ist noch folgende Betrachtung nöthig.

Jeder aufmerksame Beobachter des Himmels nimmt wahr, dass die zahllosen Gestirne fast immer dieselbe Stelle gegen einander an der hohlen Himmelskugel einnehmen und nur einige ihren Ort an derselben verändern. Die erstern nennt man Fixsterne, und zwar wegen der eben erwähnten unveränderten Lage gegen einander. Die Fixsterne haben überdies ihr eigenes Licht; wegen ihrer sehr grossen Entfernung von der Erde erscheinen sie uns nur als Lichtpunkte, zeitweise flimmernd. Zu den Fixsternen gehört auch die Sonne, denn auch sie hat ihr eigenes Licht, welches sie nach allen Richtungen aussendet, wodurch hauptsächlich Leben und somit Thätigkeit auf den sie umkreisenden Himmelskörpern, — wozu auch die von uns bewohnte Erde gehört, — bewirkt wird.

Bisher wurde die Erde als ruhend und die Sonne als sich in der Ekliptik um die Erde bewegend angenommen; dies verhält sich aber in der That nicht so, sondern die Sonne ist ruhend und die Erde umkreist sie rotirend in ihrer Bahn, die eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet. Die Ekliptik ist demnach nur die scheinbare Sonnenbahn, und die wirkliche Erdbahn liegt in der Ebene derselben.

Die Neigung der Ekliptik gegen den Himmels-Aequator heisst die Schiefe der Ekliptik, und die Durchschnittspunkte der Ekliptik und des Himmels-Aequators werden Aequinoctialpunkte genannt, von denen der eine der Nullpunkt des Widders, oder der Frühlingspunkt, der andere der Nullpunkt der Waage, oder der Herbstpunkt ist.

Wenn die Sonne in diesen Punkten ist, so ist die Tageslänge gleich der Nachtlänge, und daher werden diese Punkte auch die der Tag- und Nachtgleichen genannt.

Die Ekliptik theilt man in zwölf gleiche Theile und jeden dieser Theile nennt man ein Himmelszeichen. Gewöhnlich versteht man aber unter Himmelszeichen den zwölften Theil des Thierkreises. Dies ist die Zone etwa 8° zu beiden Seiten der Ekliptik. Diese Eintheilung beginnt im Frühlingspunkte und wird der täglichen scheinbaren Bewegung der Gestirne entgegengesetzt gezählt. Diese Zeichen haben folgende Benennung und Bezeichnung:

1) Der Widder	♈	7) Die Waage	♎
2) Der Stier	♉	8) Der Skorpion . . .	♏
3) Die Zwillinge . . .	♊	9) Der Schütze	♐
4) Der Krebs	♋	10) Der Steinbock . . .	♑
5) Der Löwe	♌	11) Der Wassermann .	♒
6) Die Jungfrau	♍	12) Die Fische	♓.

Die die Sonne in elliptischen Bahnen umkreisenden Himmelskörper nennt man Planeten, wozu auch, wie schon bemerkt, die Erde gehört. Die Sonne befindet sich in dem einen Brennpunkte dieser elliptischen Bahnen, welchen letztere gemeinschaftlich haben. Die Planeten sind dunkele Körper und empfangen ihr Licht von der Sonne, welches sie reflectiren (zurückwerfen) und dadurch erst sichtbar werden. Sie bewegen sich ferner um die Sonne nach einer Richtung, welche der scheinbaren täglichen Bewegung der Gestirne entgegengesetzt ist. Diejenigen Himmelskörper, welche einige Planeten in derselben Weise umkreisen, wie die letzteren die Sonne, heissen Nebenplaneten, Trabanten oder Monde. Die

Erde hat einen solchen Mond, der ihr fortwährend dieselbe Seite zukehrt. Diese Monde sind dunkele Körper, welche ihr Licht von der Sonne empfangen und dasselbe ebenfalls reflectiren; auch sie bewegen sich in elliptischen Bahnen um ihren Planeten, der in dem einen Brennpunkte derselben sich befindet.

Die Gerade zwischen dem Centrum der Sonne und einem Planeten, oder zwischen einem Planeten und seinem Monde wird Radiusvector der betreffenden Planeten- oder Mondbahn genannt, und die Richtung der grossen Axe einer Planeten- oder Mondbahn heisst ihre Apsidenlinie. Wenn die Erde die Endpunkte der grossen Axe ihrer Bahn erreicht, so ist sie in dem einen der Sonne am nächsten, in der Sonnennähe oder im Perihel, und in dem andern am weitesten von ihr entfernt, in der Sonnenferne oder im Aphel. Ist der Mond der Erde in die Endpunkte der grossen Axe seiner Bahn gelangt, so ist er in dem einen in der Erdnähe und in dem andern in der Erdferne, welche Standpunkte auch beziehlich Perigäum und Apogäum genannt werden.

Die Dauer des Jahres ist im Allgemeinen die Zeit, welche die Erde zu ihrem Umlaufe um die Sonne gebraucht. Die Dauer des Monats scheint ursprünglich von der Zeit bestimmt worden zu sein, welche der Mond zu seiner Umkreisung der Erde nöthig hat. Die Mondbahn durchschneidet die Ebene der Ekliptik unter einem Winkel von $5^\circ\ 8'$ nahe, die Durchschnittspunkte heissen: der aufsteigende Knoten (☊) und der niedersteigende Knoten (☋); der letztere ist der, durch den der Mond von Norden nach Süden geht. Steht der Mond zwischen Erde und Sonne, so ist es Neumond, oder Sonne und Mond stehen in Conjunction (☌) oder Zusammenkunft; befindet sich aber die Erde zwischen Mond und Sonne, so sind diese beiden Gestirne in Opposition (☍) oder Gegenschein, und es ist Vollmond. Wenn der Mond 90° ostwärts oder westwärts von der Sonne steht, so befindet er sich in den Quadraturen (□), und zwar im ersten Falle im ersten Viertel, im andern Falle im letzten Viertel. Neumond und Vollmond werden auch Syzygien genannt.

Die Zeit, welche der Mond gebraucht, um wieder zu demselben Fixstern zu gelangen, heisst der siderische Monat; derselbe beträgt 27 Tage $7^h\ 43'\ 11'',5$ und während dieser Zeit dreht der Mond sich einmal um seine Axe.

Die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Neumonden heisst ein synodischer Monat und dieser ist 29 Tage $12^h\ 44'\ 2'',9$.

Die Zeit, welche der Mond bis zur Wiederkehr in denselben Knoten seiner Bahn gebraucht, heisst der drakonische Monat und beträgt 27 Tage $5^h\ 5'\ 28'',9$.

Die Knoten der Mondbahn rücken nämlich immer westlicher in der Ekliptik fort und in nahe 18,6 Jahren hat ein solcher Knoten die Ekliptik durchlaufen.

Man unterscheidet das tropische und siderische Jahr. Das tropische Jahr ist die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Wiederkehren der Sonne nach dem Punkte der Frühlingsnachtgleiche (dem Nullpunkte des Widders) verfliesst, und hat eine Dauer von 365,242255 Tagen = 365 Tagen $5^h\ 48'\ 50''$. Das siderische Jahr ist die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Wiederkehren der Sonne nach ein und demselben Fixstern verfliesst, und ist = 365,25638 Tagen = 365 Tagen $6^h\ 9'\ 11''$. Der Unterschied zwischen beiden rührt von der rückgängigen Bewegung der Aequinoctialpunkte in der Ekliptik her, welche jährlich 50,34 Bogensecunden beträgt. Die mittlere tägliche Bewegung der Erde in der Ekliptik ist hiernach = $59'\ 8'',33$.

Das bürgerliche Jahr rechnet man zu 365 Tagen, und deshalb findet der Anfang des Jahres beständig um $5^h\ 48'\ 50''$ zu früh statt. Um diese

Ungleichheit zu heben, schaltet man alle 4 Jahre einen Tag ein, wodurch das bürgerliche Jahr auf 365¼ Tage gesetzt wird, hierbei rechnet man also mit jedem Jahre 11′ 10″ zu viel, welches man dadurch wieder auszugleichen sucht, dass man an dem Ende dreier aufeinander folgender Jahrhunderte das Einschalten eines Tages unterlässt, und erst am Ende des vierten Jahrhunderts wieder einen Schalttag setzt.

Die Planeten und Monde unsers Sonnensystems, von einigen der erstern die siderischen Umlaufszeiten und mittlern Abstände von der Sonne — der mittlere Abstand der Erde von der Sonne = 20682000 geogr. Meilen als Einheit angenommen — sind:

1)	☿ Merkur,	87,97	Tage,	0,38709,	
2)	♀ Venus,	224,7	»	0,72333,	
3)	♁ Erde,	365,26	»	1,00000,	hat einen Mond,
4)	♂ Mars,	686,98	»	1,52369,	
5)	♃ Jupiter,	4332,58	»	5,20277,	hat 4 Monde,
6)	♄ Saturn,	10759,22	»	9,53885,	hat 8 Monde,
7)	♅ Uranus,	30686,82	»	19,18239,	hat 6 Monde,
8)	♆ Neptun,	60126,7	»	30,03628,	hat 2 Monde.

Hierzu gehören nun noch die folgenden kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter, welche auch Coplaneten, Asteroiden, Planetoiden heissen, und, wie Uranus und Neptun, nicht mit blossem Auge wahrgenommen werden können. Sie sind, mit Ausnahme der vier ersten, in neuerer Zeit entdeckt worden und heissen:

(1) Ceres,
(2) Pallas,
(3) Juno,
(4) Vesta,
(5) Astraea,
(6) Hebe,
(7) Iris,
(8) Flora,
(9) Metis,
(10) Hygiea,
(11) Parthenope,
(12) Victoria,
(13) Egeria,
(14) Irene,
(15) Eunomia,
(16) Psyche,
(17) Thetis,
(18) Melpomene,
(19) Fortuna,
(20) Massalia,
(21) Lutetia,
(22) Calliope,
(23) Thalia,
(24) Themis,
(25) Phocaea,
(26) Proserpina,
(27) Euterpe,
(28) Bellona,
(29) Amphitrite,
(30) Urania,
(31) Euphrosyne,
(32) Pomona,
(33) Polyhymnia,
(34) Circe,
(35) Leukothea,
(36) Atalante,
(37) Fides,
(38) Leda,
(39) Laetitia,
(40) Harmonia,
(41) Daphne,
(42) Isis,
(43) Ariadne,
(44) Nysa,
(45) Eugenia,
(46) Hestia,
(47) Aglaja,
(48) Doris,
(49) Pales,
(50) Virginia,
(51) Nemausa,
(52) Europa,
(53) Calypso,
(54) Alexandra,
(55) Pandora,
(56) Melete,
(57) Mnemosyne,
(58) Concordia,
(59) Elpis,
(60) Echo,
(61) Danaë,
(62) Erato,
(63) Ausonia,
(64) Angelina,
(65) Cybele,
(66) Maja,
(67) Asia,
(68) Leto,
(69) Hesperia,
(70) Panopaea,
(71) Niobe,
(72) Feronia,
(73) Clytia,
(74) Galatea,
(75) Eurydice,
(76) Freia,
(77) Frigga,
(78) Diana,
(79) Eurynome,
(80) Sappho,
(81) Terpsichore,
(82) Alkmene,
(83) Beatrix,
(84) Clio,
(85) Jo,
(86) Semele,
(87) Sylvia,
(88) Thisbe,
(89) Julia,
(90) Antiope,
(91) Aegina,
(92) Undina,
(93) Minerva,
(94) Aurora,
(95) Arethusa,
(96) Aegle,
(97) Clotho,
(98) Janthe,
(99) Dike,
(100) Hecate,
(101) Helena,
(102) Miriam,
(103) Hera,
(104) Clymene,

(105) Artemis,
(106) Dione,
(107) Camilla,
(108) Hecuba,
(109) Felicitas,
(110) Lydia,
(111) Ate,
(112) Iphigenia,
(113) Amalthea,
(114) Cassandra,
(115) Thyra,
(116) Sirona,
(117) Lomia,
(118) Peitho,
(119) Althaea,
(120) Lachesis,
(121) Hermione,
(122) Gerda,
(123) Brunhilda,
(124) Alkeste,
(125) Liberatrix,
(126) Velleda,
(127) Johanna,
(128) Nemesis,
(129) Antigone,
(130) Elektra,
(131) Vala,
(132) Aethra,
(133) Cyrene,
(134) Sophrosyne,
(135) Hertha,
(136) Austria,
(137) Meliboea,
(138) Tolosa,
(139) Juewa,
(140) Siwa,
(141) Lumen,
(142) Polana,
(143) Adria,
(144) Vibilia,
(145) Adeona,
(146) Lucina,
(147) Protogeneia,
(148) Gallia,
(149) Medusa,
(150) Nuwa,
(151) Abundantia,
(152) Atala,
(153) Hilda,
(154) Bertha,
(155) Scylla,
(156) Xanthippe,
(157) Dejanira,
(158) Koronis,
(159) Aemilia,
(160) Una,
(161) Athor,
(162)
(163) Erigone,
(164) Eva,
(165) Loreley,
(166) Rhodope,
(167) Urda,
(168) Sibylla,
(169) Zelia.

§. 22.

Breitenkreise, Coluren, Aequinoctial- und Solstitialpunkte.

Die Ekliptik hat ihre Pole ebenso wie der Himmels-Aequator, und sie sind von den respectiven Weltpolen um die Schiefe der Ekliptik, also nahe um $23\frac{1}{2}°$ entfernt.

Kreise, welche durch die beiden Pole der Ekliptik gehen, somit die Ekliptik normal durchschneiden, nennt man Breitenkreise an der Himmelskugel, und diejenigen kleinern Kreise, welche mit der Ekliptik parallel laufen, werden Breitenparallele an der Himmelskugel genannt.

Die beiden Punkte in der Ekliptik, welche am weitesten von dem Himmels-Aequator entfernt sind, — die Nullpunkte des Krebses und des Steinbocks, — werden Solstitialpunkte oder Punkte der Sonnenwende genannt. Die Declinationskreise, welche durch die Aequinoctial- und Solstitialpunkte gehen, heissen Coluren (Jahrzeitkreise), und zwar ist der erstere der der Aequinoctien, und der letztere der der Solstitien.

Diejenigen Declinationsparallele, welche die Ekliptik in den Solstitialpunkten berühren, heissen Wendekreise, und diejenigen, welche eben so weit von den Weltpolen abstehen, als die Wendekreise von dem Himmels-Aequator, werden Polarkreise genannt.

§. 23.

Rectascension, Declination, Poldistanz, Länge und Breite der Gestirne.

Die Lage der Gestirne an der hohlen Himmelskugel wird ähnlich angegeben, wie die Lage der Punkte auf der Oberfläche der Erde; sie kann aber auf zweierlei Weise bestimmt werden, einmal durch Rectascension und Declination, das andere Mal durch Länge und Breite. Die erste Bestimmungsart bezieht sich auf den Himmels-Aequator, die letztere auf die Ekliptik.

Rectascension oder gerade Aufsteigung eines Gestirns ist das Stück des Himmels-Aequators vom Frühlingspunkte an, der täglichen scheinbaren Bewegung der Himmelskörper entgegengesetzt gezählt, bis zum Declinationskreise desselben; sie kann aber auch als der Winkel ange-

sehen werden, den der Colur des Frühlingspunktes mit dem Declinationskreise des Gestirns bildet, ebenfalls von diesem Colur der täglichen scheinbaren Bewegung der Gestirne entgegengesetzt gezählt. Die Rectascension wird gewöhnlich in Zeit angegeben, und kann also 24 Stunden werden.

Declination oder Abweichung eines Gestirns ist der Winkel, den die gerade Linie zwischen dem Mittelpunkte der Erde und dem des Gestirns mit der Aequator-Ebene bildet. Von diesem Winkel ist das Stück Declinationskreis zwischen dem Mittelpunkte des Gestirns und dem Himmels-Aequator das Maass, folglich kann auch dieses Maass als die Declination selbst angesehen werden. Die Declination ist nördlich oder südlich, je nachdem das Gestirn nördlich oder südlich von dem Himmels-Aequator liegt, und sie kann ihrer Erklärung nach 90° nicht übersteigen.

Poldistanz oder Polabstand eines Gestirns ist der Winkel, den die gerade Linie zwischen dem Centrum der Erde und dem des Gestirns mit der Weltaxe macht. Von diesem Winkel ist das Stück Declinationskreis zwischen dem Centrum des Gestirns und dem Weltpol das Maass, und daher kann man auch diesen Bogen als die Poldistanz ansehen. Sie kann ferner von jedem Weltpol gezählt werden, gewöhnlich aber will man nur die von dem obern Weltpol gerechnet, haben.

Länge eines Gestirns ist der Bogen der Ekliptik von dem Frühlingspunkte bis zum Breitenkreise des Gestirns, von ersterem der täglichen scheinbaren Bewegung der Gestirne entgegengesetzt gezählt, bis 360°; sie kann aber auch als der sphärische Winkel angesehen werden, den der Breitenkreis des Frühlingspunktes mit dem des Gestirns macht, von ersterem ebenfalls der täglichen scheinbaren Bewegung der Gestirne entgegengesetzt gerechnet. Jetzt wird gewöhnlich die Länge nur in Graden, Minuten und Secunden angegeben, ehemals aber auch noch in Zeichen.

Breite eines Gestirns ist der Winkel, den die gerade Linie, von dem Centrum der Erde nach dem des Gestirns gedacht, mit der Ebene der Ekliptik macht. Das Maass dieses Winkels ist der Bogen des Breitenkreises zwischen dem Mittelpunkte des Gestirns und der Ekliptik; deshalb kann auch dieser Bogen als die Breite des Gestirns angesehen werden. Die Breite kann hiernach nördlich oder südlich sein, je nachdem das Gestirn auf der Nord- oder Südseite der Ekliptik liegt, und nicht grösser als 90° werden.

Breite und Länge der Gestirne nennt man astronomische Breite und Länge.

§. 24.

Klassification der Fixsterne; Sternbilder.

Die Fixsterne theilt man nach ihrer Lichtstärke in verschiedene Klassen. Die hellsten Sterne nennt man nämlich Sterne erster Grösse, die etwas minder hellen Sterne zweiter Grösse u. s. w. Diejenigen Sterne, welche man bei heiterm Himmel in hellen Nächten ohne Mondschein nur noch mit blossem Auge als solche wahrnehmen kann, werden Sterne sechster Grösse genannt. Den Sternen erster Grösse hat man früher besondere Namen gegeben, und auch einigen zweiter Grösse; um aber jeden Stern bequem bezeichnen zu können, ohne dass man ihm einen besondern Namen beizulegen brauchte, hat man sich am Himmel verschiedene Bilder gedacht, als: einen Bären, einen Löwen, einen Stier u. s. w., so dass die Sterne bestimmten Theilen dieser Bilder entsprechen und dadurch ihren Namen erhalten haben. Man nannte z. B. den Stern, welcher dem Auge des Stiers entsprach, das Stierauge u. s. w. Man konnte hiernach die Stellen am Himmel bezeichnen, wo ein neuer Stern gesehen wurde, wenn man sagte: er sei im Schwanz des grossen Bären, am Kopf des Stiers u. s. w. Die

zu einem solchen Bilde gehörigen Sterne machen ein sogenanntes Sternbild (Constellation) aus. Man hat jetzt etwa 107 solcher Sternbilder, nämlich: 40 nördliche, 12 Zodiacal- und 55 südliche Sternbilder. Die Sterne in diesen werden mit Buchstaben, besonders mit denen des kleinen Griechischen Alphabets bezeichnet, und wenn diese nicht ausreichen, so werden entweder Buchstaben des grossen Griechischen oder eines andern Alphabets, oder auch Ziffern dazu benutzt. Sterne erster Grösse giebt es etwa 22, zweiter 56, dritter 200, vierter, fünfter und sechster zusammengenommen 2844. Die Sternbilder findet man auf den Sternkarten nebst den Sternen und den diesen beigelegten Buchstaben verzeichnet.

Die besten neuesten Sternkarten sind von Schwink, Argelander und der Berliner Akademie geliefert.

Ehemals haben die Himmelszeichen den gleichnamigen Sternbildern entsprochen, denn nach diesen sind jene benannt worden. Gegenwärtig sind die Aequinoctialpunkte um ein ganzes Zeichen verändert, so dass das Zeichen des Widders in dem Sternbilde der Fische, das Zeichen der Waage in dem Sternbilde der Jungfrau sich befindet. Dies rührt her von der rückgängigen Bewegung der Aequinoctialpunkte in der Ekliptik (§. 21.), welche es auch macht, dass der derzeitige Polarstern (α ursae minoris) nicht immer dem Pol so nahe bleibt, wie jetzt.

§. 25.

Gerade, parallele und schiefe Sphäre. Die Kepler'schen Gesetze; das Newton'sche Gravitationsgesetz.

Jedes Gestirn beschreibt bei seiner täglichen scheinbaren Bewegung einen mit dem Himmels-Aequator sehr nahe parallelen Kreis, den man seinen Tagekreis nennt. Steht nun ein Beobachter in einem Punkte des Erd-Aequators, so geht der Himmels-Aequator durch sein Zenith, die Pole liegen in seinem wahren Horizonte, die Tagekreise der Gestirne stehen auf letzterem normal und werden von ihm halbirt, weshalb jedes Gestirn so lange über als unter dem Horizonte in diesem Falle bleibt. Diese Stellung wird auch die gerade Sphäre genannt.

Steht ein Beobachter in einem der Erdpole, so hat er den gleichnamigen Weltpol im Zenith, und der Aequator fällt mit seinem wahren Horizonte zusammen. Ferner werden die Tagekreise der Gestirne mit dem Horizonte sehr nahe parallel laufen, und somit kein Auf- oder Untergang der Gestirne stattfinden. Diese Stellung heisst die parallele Sphäre. Jede andere Stellung, als die beiden erwähnten, wird die schiefe Sphäre genannt.

Die Kepler'schen Gesetze sind folgende:

1) Die Erdbahn und alle Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

2) Der Radiusvector eines Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich zu einander wie die Kuben der grossen Axen ihrer Bahnen.

Die vorstehenden Gesetze befolgen auch die Nebenplaneten bei ihrem Umlauf um ihren Hauptplaneten.

Diese Gesetze sind Folgerungen des später von Newton gefundenen Gravitationsgesetzes, das kurz so lautet:

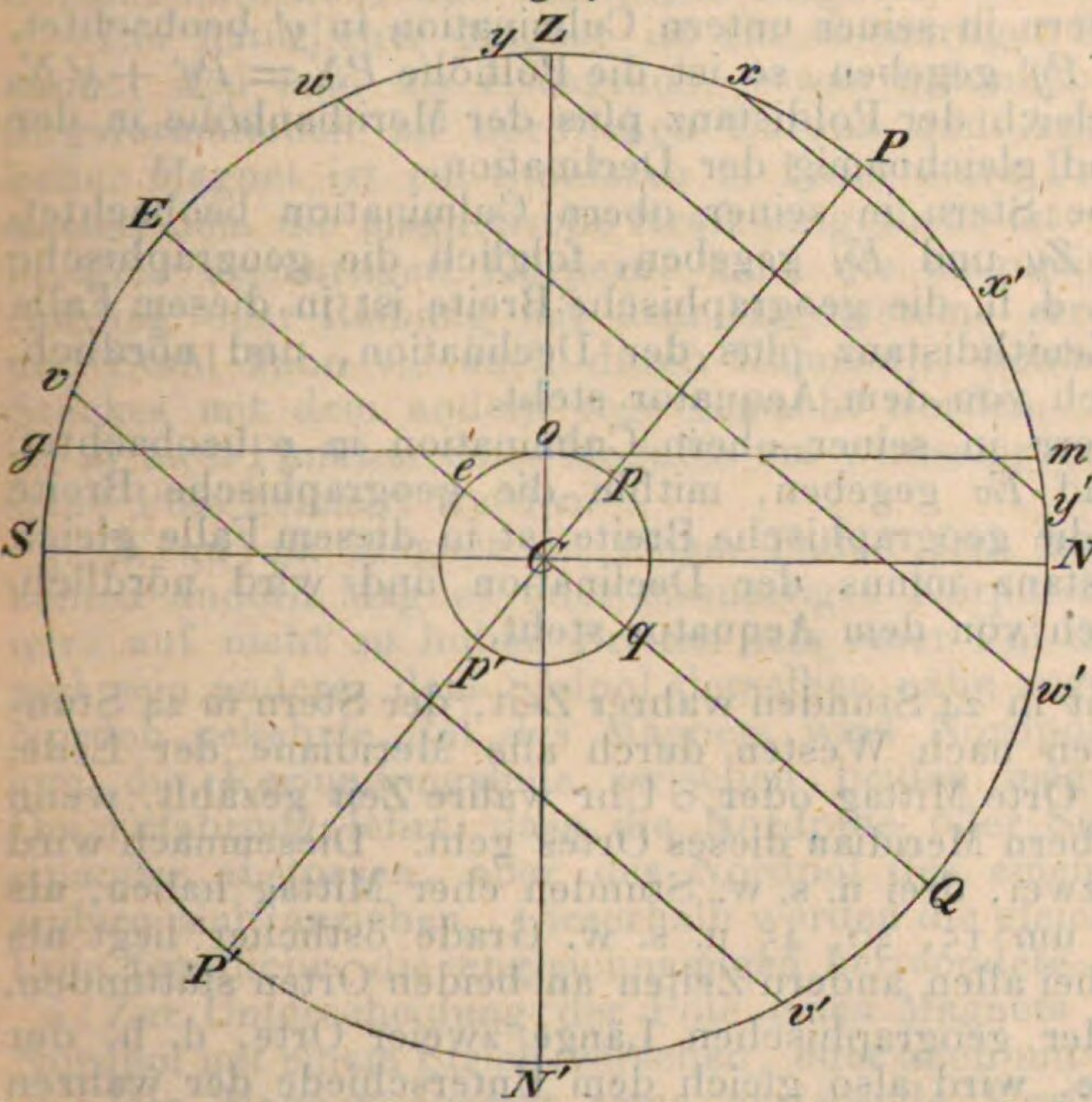
> »Die Himmelskörper unsers Sonnensystems ziehen sich gegenseitig an, und diese anziehende Kraft steht in geradem Verhältnisse ihrer Masse, aber im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernung.«

§. 26.

Geographische Breite und Länge durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen.

Nach diesen Vorausschickungen wird die Art und Weise, geographische Breite und Länge durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen, dargethan werden können.

Fig. 7.



In Fig. 7. sei *opqp'e* ein Meridian-Durchschnitt der Erde, *ZPNQN'P'SE* ein Durchschnitt der hohlen Himmelskugel, der mit ersterem in einer Ebene liegt, *p* und *p'* seien die beiden Erdpole, also *P* und *P'* die beiden Weltpole, so ist *pp'* die Erdaxe, *PP'* die Weltaxe, *eq* der Durchmesser des Erd- und *EQ* der Durchmesser des Himmels-Aequators, weil diese eine gerade Linie bilden, normal auf *PP'* stehen und durch *C* gehen. Ferner sei *o* ein Punkt auf der Oberfläche der Erde, so ist *Z* dessen Zenith, *N'* das Nadir, *SN* eine Linie im wahren Horizonte und *gm* eine im scheinbaren Horizonte, weil beide normal auf *oC*, der Richtung der Schwere des Punktes *o* stehen, und durch die Punkte *C* und *o* gehen.

Von dem Punkte *o* ist $\angle\, PCN$ die Polhöhe, oder sein Maass der Bogen *PN*, und $\angle\, ZCE$ seine geographische Breite, oder dessen Maass der Bogen *EZ*: beide sind einander gleich als Complemente des Winkels *ZCP*. Der Winkel *SCE*, welcher das Complement der geographischen Breite des Punktes *o* ist, wird Aequatorhöhe genannt. Ferner ist für den Ort *o* der Bogen *PZS* der sichtbare Theil des obern, und *PN* der sichtbare Theil des untern Himmels-Meridians, sowie *ZS* der südliche und *ZN* der nördliche sichtbare Meridian-Quadrant, wenn *P* der nördliche Weltpol ist.

I. Beobachtet man nun von *o* aus einen Fixstern in seiner obern und darauf folgenden untern Culmination, z. B. die Meridianhöhen *xN* und *x'N*, so ist die Polhöhe $PN = \frac{Nx + Nx'}{2}$, d. i. die halbe Summe der beiden Meridianhöhen, und die Poldistanz dieses Sterns *Px'* oder $Px = PN - x'N = xN - PN$, also seine Declination $Ex = 90^\circ - Px$, oder $Qx' = 90^\circ - Px'$. In diesem Falle ist sowohl die Polhöhe als auch die Declination des Sterns nördlich.

Da die Fixsterne unendlich weit von der Erde entfernt sind, so dass der Erdradius dagegen ganz verschwindet, oder was dasselbe heisst, der Winkel, welcher entsteht, wenn man von einem im scheinbaren Horizonte (in *m*) befindlichen Stern gerade Linien nach *o* und *C* zieht, Null wird,

welchen Winkel man Horizontal-Parallaxe nennt, so werden die von o aus beobachteten Höhen gleich denen von C aus sein.

Man kann also, wenn man an einem Orte von einem dem sichtbaren Weltpol nahe stehenden Stern die Meridianhöhen in beiden Culminationen beobachtet, daraus die Polhöhe des Beobachtungsortes und die Declination des Sterns ableiten. Wenn indessen die Declination des Sterns auf anderem Wege schon gefunden ist, so kann man vermittelst dieser und der Meridianhöhe desselben, gleichviel, ob in der untern oder obern Culmination, die Polhöhe des Beobachtungsortes finden.

Es sei z. B. ein Stern in seiner untern Culmination in y' beobachtet, also Ny' und Qy' oder Py' gegeben, so ist die Polhöhe $PN = Py' + y'N$, d. h. die Polhöhe ist gleich der Poldistanz plus der Meridianhöhe in der untern Culmination, und gleichnamig der Declination.

Sei ferner derselbe Stern in seiner obern Culmination beobachtet, in y, so ist yS oder Zy und Ey gegeben, folglich die geographische Breite $EZ = Zy + Ey$, d. h. die geographische Breite ist in diesem Falle gleich der Meridian-Zenithdistanz plus der Declination, und nördlich, weil das Zenith nördlich von dem Aequator steht.

Ist endlich ein Stern in seiner obern Culmination in v beobachtet, so ist vS oder Zv und Ev gegeben, mithin die geographische Breite $EZ = Zv - Ev$, d. h. die geographische Breite ist in diesem Falle gleich der Meridian-Zenithdistanz minus der Declination und wird nördlich, weil das Zenith nördlich von dem Aequator steht.

II. Die Sonne geht in 24 Stunden wahrer Zeit, der Stern in 24 Stunden Sternzeit von Osten nach Westen durch alle Meridiane der Erde, und es wird an jedem Orte Mittag oder 0 Uhr wahre Zeit gezählt, wenn die Sonne durch den obern Meridian dieses Ortes geht. Diesemnach wird also ein Ort um eine, zwei, drei u. s. w. Stunden eher Mittag haben, als ein anderer, wenn er um 15, 30, 45 u. s. w. Grade östlicher liegt als jener. Dasselbe wird bei allen andern Zeiten an beiden Orten stattfinden.

Der Unterschied der geographischen Länge zweier Orte, d. h. der Winkel ihrer Meridiane, wird also gleich dem Unterschiede der wahren Zeiten, mittlern Zeiten oder Sternzeiten sein, welche an beiden Orten in demselben Augenblick gezählt werden.

Die Zeit wird durch Uhren gemessen, die entweder nach mittlerer Zeit oder nach Sternzeit gehen. Nach wahrer Zeit kann keine Uhr genau gehen, weil diese selbst nichts Gleichmässiges ist und die grösste Vollkommenheit einer Uhr darin besteht, dass sie regelmässig geht. Demnach müssen die Uhren wegen ihrer Wandelbarkeit öfters durch astronomische Beobachtungen geprüft und berichtigt werden. Die nach Sternzeit gehenden Uhren sind für den Astronomen, und die nach mittlerer Zeit gehenden für den Seemann am zweckmässigsten.

Es kommt also bei dieser Art, die Länge zu bestimmen, besonders darauf an, zu ermitteln, welche mittlere oder wahre Zeit, oder Sternzeit es in einem und demselben Augenblicke an beiden Orten ist. Diese ergiebt sich wieder leicht, wenn eine an beiden Orten sichtbare Himmelserscheinung beobachtet wird, die für beide in demselben Augenblicke stattfindet, wie z. B. Mondfinsternisse, Ein- und Austritte der Jupiters-Trabanten in den Schatten ihres Hauptplaneten und Pulversignale. In neuerer Zeit bedient man sich hierzu des elektrischen Telegraphen. Die Zeichen damit an dem einen Orte gegeben, können gleichzeitig an einem andern Orte, der nach ersterem die Drahtleitung hat, beobachtet werden. Die Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Orte vermittelst dieses Telegraphen ist die genaueste, denn in kurzer Zeit können viele Beobachtungen zu diesem Zwecke gemacht werden.

§. 27.

Vom Magnetismus.

Diejenige Kraft, welche in einigen eisenartigen Körpern thätig ist und das Bestreben äussert, eiserne oder eisenartige Körper anzuziehen, wird Magnetismus oder magnetische Kraft genannt. Die Körper selbst, welche diese Kraft besitzen, heissen Magnete. Von diesen giebt es zwei Sorten, natürliche und künstliche Magnete.

Ein natürlicher Magnet ist ein eisenartiger Stein, Magnetstein genannt, den man als eisengraue, etwas bräunliche Masse in ältern Gebirgsformationen im nördlichen Europa und Asien findet. Ein künstlicher Magnet ist ein Stahlstab in Form eines Prismen oder eines Hufeisens, dem die magnetische Kraft mitgetheilt ist. In Stahlstäben, sowie in allen eisenartigen Körpern, kann die magnetische Kraft durch Berührung oder Reibung mit dem Magnetsteine erregt werden. In Eisen und Stahl kann sie auch durch Hämmern, Schlagen und Stossen eines Stückes mit dem andern rege gemacht werden. Die magnetische Kraft ist in zwei Punkten eines Magnets am wirksamsten, welche deshalb auch seine Pole genannt werden.

Wenn ein Magnet an einem Faden frei horizontal schwebt, und keinen andern Magnet oder eisenartigen Körper in seiner Nähe hat, so wird auf nicht zu hohen Breiten sein einer Pol dem Nordpol der Erde, und sein anderer dem Südpol derselben nahe zugekehrt sein. Der nach Norden gekehrte Pol des Magnets wird Nordpol, der andere Südpol, und die Verbindungslinie zwischen beiden magnetische Axe genannt. Die Erfahrung lehrt, dass die Nordpole oder Südpole zweier Magnete einander abstossen, aber der Nordpol des einen und der Südpol des andern sich anziehen. Dieserhalb werden die gleichnamigen magnetischen Pole feindliche, die ungleichnamigen befreundete genannt.

Zur Unterscheidung der Pole eines Magnets ist gewöhnlich dessen Nordpol mit einem Strich versehen, oder auch mit einem andern Zeichen.

Der Magnet äussert seine anziehende Kraft auf das Eisen auch durch andere Körper hindurch; sie nimmt mit der Vergrösserung der Entfernung zwischen dem Magnet und Eisen rasch ab, und zwar wie die Quadrate der Entfernungen zunehmen. Es tritt jedoch dann eine Verschiedenheit ein, wenn man zwischen den Magneten und das Eisen ein Eisenblech oder einen andern Körper bringt, der von dem Magneten angezogen wird. In diesem Falle wird entweder die Wirkung geschwächt, oder hört ganz auf.

Die Erde hat zwei magnetische Pole, welche nach der Bestimmung von Gauss für das Jahr 1835 in:

73° 35′ NBr. und 95° 39′ WL. von Greenwich,
und 72° 35′ SBr. und 152° 30′ OL. von Greenwich liegen.

Der erstere wird Nordpol, der letztere Südpol genannt. Nach dem angeführten Gesetze, nach welchem sich nur die ungleichnamigen Pole zweier Magnete anziehen, wäre mit Rücksicht auf die Bezeichnung der magnetischen Pole des Erdkörpers der nach Norden gekehrte Pol eines frei beweglich aufgehängten Magnets sein Südpol und der andere sein Nordpol. Der Bequemlichkeit halber bleibt man aber bei dem eingeführten Gebrauche und nennt das dem Nordpol der Erde zugekehrte Ende des frei beweglichen Magnets seinen Nordpol und das andere seinen Südpol. Dieser Annahme nach hat eigentlich die Erde auf der nördlichen Halbkugel einen magnetischen Südpol und auf der südlichen einen magnetischen Nordpol.

Magnetnadel wird jeder magnetisirte, prismatisch, cylinderisch oder länglich rautenförmig geformte Stahlstab genannt.

Der Winkel, den eine frei bewegliche, horizontal schwebende Magnetnadel mit der Meridianebene des Ortes macht, heisst ihre Abweichung oder Declination, und bei den Seeleuten Missweisung. Sie heisst westlich, wenn der Nordpol der Magnetnadel nach Westen zu von der durch ihren Mittelpunkt gehenden Meridianebene liegt; östlich, wenn derselbe auf der Ostseite dieser Meridianebene sich befindet. Die durch die Richtung einer frei beweglichen, in Ruhe befindlichen Magnetnadel gehende Verticalebene ist der magnetische Meridian des Ortes, und der Winkel, den dieser mit der Erdmeridianebene desselben Ortes bildet, ist gleich der Declination der Magnetnadel.

Der Winkel, den eine nur in der Ebene des magnetischen Meridians um eine horizontale, durch ihren Schwerpunkt gehende Axe frei bewegliche Magnetnadel mit der Horizontalebene bildet, heisst ihre Inclination.

Die Veränderungen in der Declination und Inclination zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten werden magnetische Variationen genannt. Die Declination kann man mittelst des Declinatoriums, die Inclination mittelst des Inclinatoriums und die Variation durch den Magnetometer von Gauss bestimmen.

Die Erfahrung lehrt, dass die Anzahl der Schwingungen, welche eine frei schwebende, aus ihrer gewöhnlichen Lage gebrachte Magnetnadel in einer gewissen Zeit an einem Orte macht, der vom Aequator möglichst weit entfernt, grösser ist, als die, welche dieselbe Nadel bei unverändertem Magnetismus in derselben Zeit an einem Orte in der Nähe des Aequators machen würde. Auf diese Weise wird die Stärke der magnetischen Kraft der Erde an den verschiedenen Punkten ihrer Oberfläche bestimmt; sie verändert sich aber ebenfalls mit den Tages- und Jahreszeiten.

Von der Stärke der magnetischen Kraft der Erde ist die der Magnetnadel zu unterscheiden. Wenn nämlich zwei Magnetnadeln an einem Orte frei schwingen, ohne sich gegenseitig zu stören, und die eine in derselben Zeit mehr Schwingungen macht als die andere, so ist die magnetische Kraft der ersteren stärker als die der letztern.

Wenn man an irgend einem Orte magnetische Beobachtungen anstellen will, so hat man die Declination, Inclination und die Stärke der magnetischen Kraft für diesen Ort zu bestimmen. Für den Seemann ist die Declination die Hauptsache.

Die magnetische Declination (Missweisung) ist jetzt an vielen Orten westlich, wo sie früher östlich war. Der Grund hiervon liegt vielleicht in der Ortsveränderung der magnetischen Pole der Erde.

Diejenigen Linien, welche man sich durch Orte auf der Oberfläche der Erde von gleicher Declination denkt, heissen isogonische, und diejenigen, welche man sich durch die Orte gleicher Inclination vorstellt, werden isoclinische genannt. Die isoclinische Linie, welche durch die Orte auf der Erde geht, an denen die Inclination Null ist, nennt man den magnetischen Aequator. Dieser magnetische Aequator durchschneidet den Erd.-Aequator in zwei Punkten, ein Mal im Atlantischen (8° OL v. Greenw.), das andere Mal im Stillen Meere (171° WL v. Greenw.). Der magnetische Aequator eines Ortes ist diejenige Ebene, welche auf seinem magnetischen Meridian normal steht.

Von den Isogonen sind besonders diejenigen merkwürdig, die durch Orte gehen, wo die Declination Null ist. Bis jetzt kennt man zwei dergleichen. Die eine, vom magnetischen Nordpol ausgehend, nimmt ihren Lauf durch die Vereinigten Staaten Nord-Amerika's, die Nordostspitze Süd-Amerika's, das Südatlantische Meer, und entzieht sich im antarktischen

Eise den weitern Nachforschungen; die andere geht vom magnetischen Südpol aus über Neuholland, das Indische Meer, das Caspische Meer, Sibirien und kann im nördlichen Eismeer ebenfalls nicht weiter verfolgt werden.

Schon im Vorhergehenden ist erwähnt worden, dass die Stärke der magnetischen Kraft der Erde durch die Zahl der Schwingungen bestimmt wird, die eine sehr empfindliche horizontal schwebende Magnetnadel, deren magnetische Kraft sich nicht verändert, an verschiedenen Orten in gleichen Zeiten macht.

Die magnetische Kraft der Erde wirkt auf eine frei bewegliche Magnetnadel gleichförmig beschleunigend, deshalb müssen die Intensitäten der magnetischen Kräfte M und m sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der in gleichen Zeiten vollbrachten Schwingungen N^2 und n^2. Diejenigen Linien, welche man sich durch Punkte auf der Oberfläche der Erde von gleicher magnetischer Kraft denkt, werden isodynamische genannt.

Die magnetische Kraft der Erde wird auf ihren magnetischen Polen am grössten und auf dem magnetischen Aequator am kleinsten sein. Die Inclination ist auf den magnetischen Polen der Erde gleich 90°, und auf dem magnetischen Aequator Null; die Declination auf den magnetischen Polen der Erde aber gar nicht bestimmbar.

Da die Richtung der magnetischen Kraft der Erde auf den verschiedenen Punkten ihrer Oberfläche mit den respectiven Horizontalebenen einen Winkel macht, welcher den respectiven Inclinationen gleich ist, so wird man diese Kraft in zwei andere, eine horizontale und eine verticale zerlegen können.

Bezeichnet man nämlich die ganze Kraft mit M, die horizontal wirkende mit h, die vertical wirkende mit v, die Inclination mit I, so ist:

(1) $h = M \cdot \cos I$,

(2) $v = M \cdot \sin I$,

(3) $M = h \cdot \sec I = v \cdot \operatorname{cosec} I$.

Nach diesen Gleichungen lässt sich also die ganze magnetische Kraft aus der horizontal oder auch aus der vertical wirkenden bestimmen. Zu der letzteren Bestimmungsart benutzt man die Schwingungen der im magnetischen Meridian aufgestellten Inclinationsnadel in einer bestimmten Zeit. Da hier aber eine stärkere Reibung auf der Axe stattfindet, als die Torsion eines ungedrehten seidenen Fadens beträgt, an welchem die Nadel hängt, so bestimmt man sie lieber durch horizontale Schwingungen. Zu diesem Behuf hat Gauss schwere magnetische Parallelepipeden vorgeschlagen, um den Widerstand der Luft, die Störung durch Einwirkung der Wärme und die sonstigen äusseren Erschütterungen leichter überwinden zu können, als die früher beliebten magnetisirten Stahlcylinder an einem ungedrehten seidenen Faden in einer Glasröhre hängend und in einem länglichen Kasten frei schwingend.

Alexander von Humboldt setzte in Peru, in 7° SBr. und 88° WL von Greenwich die Intensität = 1, welche die späteren Beobachter allgemein als Norm angenommen haben. Die Magnetnadel machte hier in 10 Minuten 211 Schwingungen, und bei unveränderter Kraft in Paris während derselben Zeit 245 Schwingungen. Bezeichnet man für diesen Ort

die Intensität der magnetischen Kraft der Magnetnadel mit . . . M,
den horizontalen Theil derselben mit h,
die Inclination mit . I,
die Zeit von N Schwingungen mit t,

und nennt man für einen anderen Ort dieselben Grössen M', h', I', t', so ist

$$h = M \cdot \cos I, \text{ und } h' = M' \cdot \cos I',$$

und nach Hansteen:

$$(4) \quad \dots . \; h : h' = t'^2 : t^2,$$
$$\text{also auch } t'^2 : t^2 = M \cdot \cos I : M' \cdot \cos I',$$
$$\text{folglich } t'^2 \cdot M' \cdot \cos I' = t^2 \cdot M \cdot \cos I,$$

eine constante Grösse, wenn die Nadel nichts von ihrer magnetischen Kraft verloren hat. Bezeichnet man diese Constante mit C, ist ferner t und I an einer gewissen Stelle beobachtet, M bekannt für dieselbe, und beobachtet man nun mit dieser Nadel an einer andern Stelle t' und I', so hat man für letztere

$$(5) \quad \dots . . \; M' = \frac{C}{t'^2 \cdot \cos I'}.$$

Das Minimum der magnetischen Kraft der Erde ist hiernach nicht unter 0,8 und das Maximum derselben nicht über 2,26 gefunden worden.

Die Declination der Magnetnadel bleibt, wie schon angedeutet, an ein und demselben Orte nicht constant; sie war nämlich in Paris

im Jahre	1580	11° 30′	östlich,
» »	1618	8° 0′	»
» »	1663	0° 0′	»
» »	1678	1° 30′	westlich,
» »	1700	8° 10′	»
» »	1767	19° 16′	»
» »	1780	19° 55′	»
» »	1785	22° 0′	»
» »	1805	22° 5′	»
» »	1813	22° 28′	»
» »	1819	22° 29′	»
» »	1835	22° 4′	» .

Die westliche Declination hat hiernach im Jahre 1819 in Paris ihr Maximum erreicht und ist jetzt im Abnehmen.

In London war sie im Jahre 1657 = 0° und 1819 hatte sie daselbst ebenfalls ihr Maximum, und zwar war es 24° 42′ westlich.

In Danzig war sie im Jahre 1839 = 15° West und 1876 fand man sie 9,6° West.

Die täglichen Veränderungen, welche die Declination in unseren Gegenden erleidet, sind im Sommer beträchtlicher als im Winter, rühren also wahrscheinlich von dem Stande der Sonne her; sie umfassen im Sommer etwa einen Winkel von 13 Minuten und im Winter von 8 Minuten. Die westliche Declination ist des Morgens am kleinsten, wächst dann bis 2 Uhr Nachmittags, nimmt demnächst bis etwa 10 Uhr Abends ab und verhält sich während der Nacht ziemlich ruhig.

Nach Gauss's Bericht an die Göttinger Societät der Wissenschaften haben gleichzeitige Beobachtungen zu Mailand, Braunschweig, Berlin und Copenhagen eine absolute Zeitübereinstimmung aller grossen und kleinen Declinations- und Inclinations-Veränderungen gegeben. Gauss's Apparat zur Beobachtung aller angeführten Veränderungen besteht aus einem starken prismatischen Magnetstabe von 22,5 Zoll Länge Pariser Maass und 2 Pfund Gewicht, welcher mittelst eines aus 200 Coconfäden zusammengesetzten, 7 Fuss langen Fadens an der Decke des Zimmers aufgehängt ist, und an seinem einen Ende normal auf seiner magnetischen Axe einen Spiegel trägt, welchem gegenüber in 16 Fuss Entfernung eine horizontale, in Millimeter getheilte Scale, und über dieser ein gegen die Mitte des Spiegels gerichtetes Fernrohr angebracht ist, durch welches die geringsten Veränderungen in der Lage der Nadel stark vergrössert gesehen und beobachtet werden können. Dieser Apparat ist in einem eisenfreien Gebäude von 32 Fuss Länge, 15 Fuss Breite und 10 Fuss

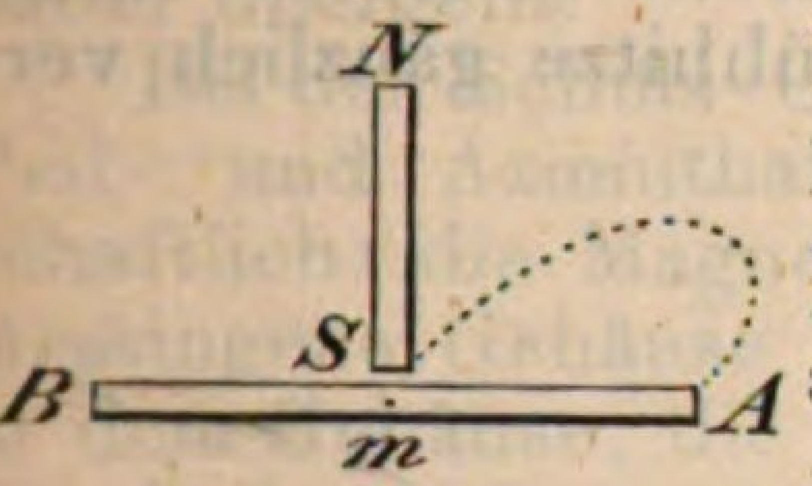
Höhe, dessen Länge mit dem magnetischen Meridian parallel ist, aufgestellt. Solche Observatorien sind auf A. von Humboldt's Verwendung in Berlin, Lissabon, Freiburg, Petersburg, Kasan, Nikolajew, auf dem Cap der guten Hoffnung, St. Helena, Neuholland und in den Vereinigten Staaten errichtet.

Das Nordlicht bringt die meisten Veränderungen in der Lage dieser grösseren Magnetnadeln hervor, ausserdem bleiben Gewitter und Erdbeben nicht ohne Einfluss auf dieselben. Die gewöhnlichen elektrischen Veränderungen in der Atmosphäre scheinen ebenfalls auf die Richtung dieser Magnetnadeln einzuwirken.

§. 28.

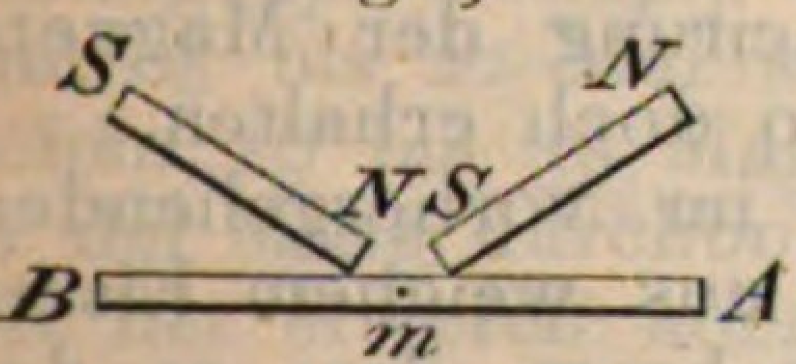
Von der Verfertigung künstlicher Magnete.

Fig. 8.



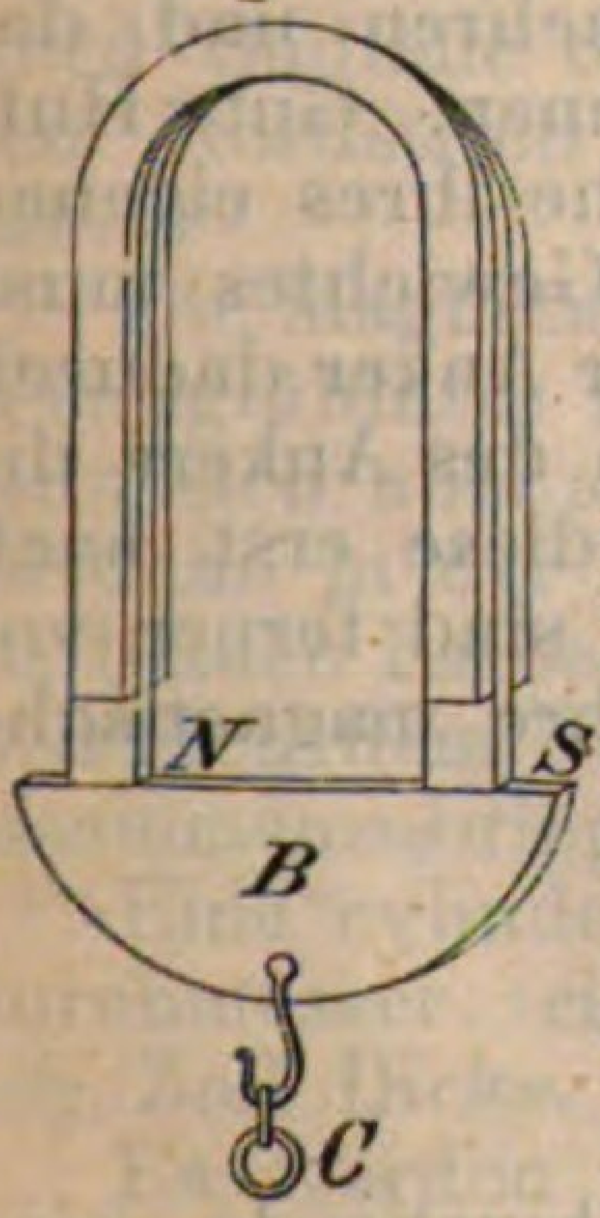
I. In Fig. 8. sei *AB* ein zu magnetisirender Stahlstab, *NS* ein Magnet, *S* sein Südpol und *N* sein Nordpol. Diesen Magnet setze man mit seinem Südpol *S* auf die Mitte *m* des Stahlstabes *AB* und führe ihn auf demselben bis *A*, hier ziehe man ihn ab und setze denselben, in hohem Bogen umkehrend, — etwa wie der punktirte — wieder in *m* auf. Wenn man dieses Streichen, Auf- und Absetzen auf die angegebene Weise etwa 40 bis 60 Mal mit dem Magnet wiederholt, so wird das gestrichene Ende *A* der Nordpol des künstlichen Magnets. Durch ein gleiches Streichen mit dem Nordpol *N* des Magnets von *m* bis *B* wird *B* zum Südpol des künstlichen Magnets.

Fig. 9.



II. Auf folgende Weise wird man in kürzerer Zeit einen Stahlstab in einen Magnet umschaffen. Man nehme zwei Magnete, setze diese — wie Fig. 9. zeigt — mit ihren freundlichen Polen sich berührend auf die Mitte (*m*) des zu magnetisirenden Stahlstabes *AB*, führe sie sodann gleichmässig, unter einem Winkel von etwa 40° gegen den Stahlstab *AB* geneigt, nach dessen beiden Enden *A* und *B*, ziehe sie hier ab und setze sie, im Bogen umkehrend, wieder in der Mitte (*m*) auf. Dieses Streichen etwa 50 Mal wiederholt, wird *A* zum Nordpol und *B* zum Südpol des Stahlstabes machen.

Fig. 10.



III. Am meisten sind jetzt die Hufeisen-Magnete im Gebrauch. Diese haben grösstentheils drei Lamellen (Stahlblättchen), wovon die mittlere die längere ist und die anderen beiden gleiche Länge haben. Sie sind (Fig. 10.) mit einem Anker *B* nebst daran befestigtem Gewichte *C* versehen.

Will man nun ein Hufeisen von Stahl durch einen gleich grossen Hufeisen-Magnet magnetisiren, so kann man einen Anker *B* vor die beiden Schenkel des ersteren bringen, und dem Hufeisen die Richtung des magnetischen Meridians geben, hierauf den Hufeisen-Magnet nehmen, denselben so normal darauf stellen, dass der Nordpol auf dem Nordende *N* und der Südpol auf dem Südende *S* steht, dann gleichmässig nach der oberen Krümmung streichen, über diese hinausgehen, und den Magnet in einem Bogen zu seiner ersten Stelle zurückführen. Wenn dieses Streichen auch etwa 50 Mal wiederholt wird, so wird der Hufeisenstahl in einen Magnet umgeschaffen sein.

Man kann aber auch, nachdem der Anker *B* vorgelegt ist, von der Krümmung des Hufeisenstahls nach seinen beiden Enden hinstreichen,

aber so, dass der Nordpol des Magnets auf dem Schenkel *S*, und der Südpol auf dem Schenkel *N* sich bewegt. In diesem Falle wird dann *S* der Südpol, und *N* der Nordpol.

IV. Nicht durch das Streichen mit einem künstlichen oder natürlichen Magnet allein wird in einem Stahlstabe die magnetische Kraft hervorgerufen, sondern auch dadurch, dass man ihn in der Richtung des magnetischen Meridians auf einen Amboss legt und ihn mit einer vertical gehaltenen Eisenstange bestreicht; ein Verfahren, welches früher angewandt und in neuerer Zeit wieder in Vorschlag gebracht worden ist.

In weichem Eisen wird die magnetische Kraft schneller hervorgerufen als in hartem, es verliert dieselbe aber auch wieder eben so schnell. Die Festhaltung der magnetischen Kraft wächst mit der Härte des Stahls, es hat deshalb den Anschein, als wenn diese Festhaltung von der Zusammendrückung der Poren des Stahls abhängig wäre. Die Erfahrung lehrt auch, dass mit steigender Wärme die magnetische Kraft in einem Magnet immer mehr abnimmt, und in der Weissglühhitze gänzlich verschwindet.

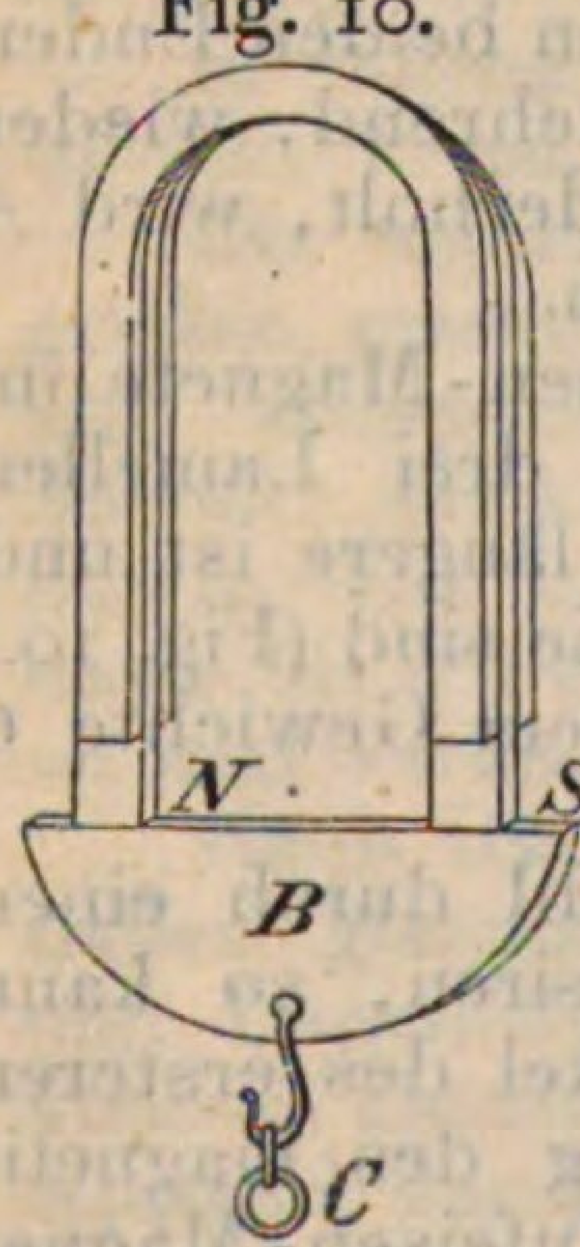
§. 29.

Armatur der künstlichen Magnete.

Wenn man zwei oder mehre künstliche Magnetstäbe aufzubewahren hat, so lege man sie in ein mit Tuch ausgeschlagenes Kästchen, mit ihren ungleichnamigen Polen in Entfernungen von ½ bis 1 Zoll nebeneinander. Vor die Pole lege man ferner Anker aus weichem Eisen angefertigt. Diese Anker haben die Form von Prismen und müssen so lang sein, dass sie alle Pole, selbst die der äussersten Magnete in dem Kästchen bedecken. Durch diese Anker und Placirung der Magnete wird ihr Magnetismus wenn auch nicht vermehrt, so doch erhalten.

Die Hufeisen-Magnete erhalten, wie bereits im vorhergehenden Paragraphen erwähnt ist, einen Anker *B* (Fig. 10.) aus weichem Eisen, an welchem man ein Gewicht, so schwer, dass es der Magnet bequem tragen kann, anbringt. Der Hufeisen-Magnet ist in seiner Krümmung an einer Wand oder einem Pfeiler, wenn man ihn nicht benutzt, aufzuhängen, der Anker vor seine Pole zu legen, und an ersterem ein Gewicht, das er bequem tragen kann, zu befestigen. Dieses Gewicht wird man allmälig vermehren und dadurch die Kraft des Magnets steigern können. Gute Hufeisen-Magnete können das 10- bis 20fache ihres eigenen Gewichtes tragen. Das Vermehren des Gewichtes muss aber sehr vorsichtig geschehen, damit der Anker dadurch nicht abgerissen wird, weil das Abreissen des Ankers die Kraft des Magnets vermindert, und er diese erst nach einiger Zeit wieder erlangt. Die Magnete sind ferner vor Rost zu schützen, weil auch dadurch ihre magnetische Kraft vermindert wird.

Fig. 10.



§. 30.

Vom Schiffs-Compass.

Die in einem Kasten auf einem Stifte horizontal schwebende, eine Kreistheilung tragende, oder in einem getheilten Kreise sich bewegende Magnetnadel heisst Compass.

Die Erfindung des Compasses wird dem Flavio Gioja, einem Neapolitaner, der etwa um's Jahr 1300 lebte, zugeschrieben. Nach Gilbert soll

der Venetianer Marco Polo dieses Instrument aus China mitgebracht haben. Die Chinesen sollen die Magnetnadel sehr früh gekannt und bei ihrer Schifffahrt davon Gebrauch gemacht haben. Dem Seemanne ist dieses Instrument ganz unentbehrlich, denn nur dadurch lässt sich auf offenem Meere erkennen, ob das Schiff seinen Weg nach seinem Bestimmungsorte ununterbrochen inne hält, vorausgesetzt, dass es durch keine Strömung von demselben abgetrieben wird.

Der Schiffs-Compass — und nur von diesem wird hier die Rede sein — unterscheidet sich dadurch von den anderen Compassen, dass das Gehäuse, in welchem die Magnetnadel auf einem verticalen Stifte horizontal schwebt, in zwei horizontalen, concentrischen, messingenen Ringen, die sich um Axen bewegen, welche normal auf einander stehen, befestigt ist, damit auch das Gehäuse immer eine möglichst verticale Lage hat, und die Bewegung des Schiffes stets vermindert auf die Magnetnadel übergeht.

Bei den Schiffs-Compassen unterscheidet man drei Arten: den Steuer-, Peil- und Azimuthal-Compass. Diese drei Compasse haben gemeinschaftlich: die Magnetnadel, die Windrose, das Hütchen, die Pinne, das messingene Gehäuse nebst dem Glasdeckel, den Steuer- oder Peilstrich in dem Gehäuse, die concentrischen messingenen Ringe und den Kasten. Die Peil- und Azimuthal-Compasse sind ausserdem noch mit Dioptern (Sehvorrichtungen), der äussere Rand der Windrose mit einer Grad-Theilung und mit Stativen (dreifüssigen Untergestellen) versehen.

a. Magnetnadel.

Die angewandten Magnetnadeln sind künstliche Magnete, rautenförmig, parallelepipedisch oder cylindrisch geformt. Die rautenförmigen sind 8 bis 12 Mal so lang als ihre grösste Breite, die parallelepipedischen 10 bis 18 Mal so lang als breit, und beide Sorten von Nadeln in der Mitte durchbohrt. Die Dicke der letzteren ist $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$ ihrer Breite, die der ersteren aber geringer, etwa $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{12}$ ihrer Breite. Der Durchmesser der cylinderförmigen Magnetnadel ist $\frac{1}{40}$ bis $\frac{1}{50}$ ihrer Länge und die Enden derselben sind stumpf zugespitzt. Wenn man diese letztere Sorte als Compassnadeln benutzt, so befestigt man zwei gleich lange und dicke in einer parallelen Lage, etwa 2 Zoll von einander entfernt, mit ihren gleichnamigen Polen nach ein und derselben Richtung gekehrt, an der untern Seite der Windrose, und zwar so, dass ihre Axen mit der Nord-Südlinie derselben parallel laufen, die Nordpole der Nadeln neben dem Nordstrich der Windrose sind und gleichen Abstand von diesem haben.

Die Magnetnadel muss ferner vollständig gehärtet, d. h. sie muss zur Weissglühhitze gebracht, und in siedendem Oele abgelöscht sein. Man kann sich aber auch damit begnügen, die Nadel glashart zu machen, und sie dann in der Mitte, welche wegen des Hütchens etwas breiter ist, bis zur blauen Farbe anlassen. Um die magnetische Axe, die Verbindungslinie zwischen dem Nord- und Südpol der Nadel, mit der geometrischen näher zusammenzubringen, sind die dünnen Nadeln den dicken vorzuziehen.

Eine cylinderförmige Compassnadel von $6\frac{1}{2}$ Zoll Länge hat 0,12 Zoll Durchmesser, eine prismatische von $6\frac{1}{2}$ Zoll Länge 0,4 Zoll Breite und 0,07 Zoll Dicke.

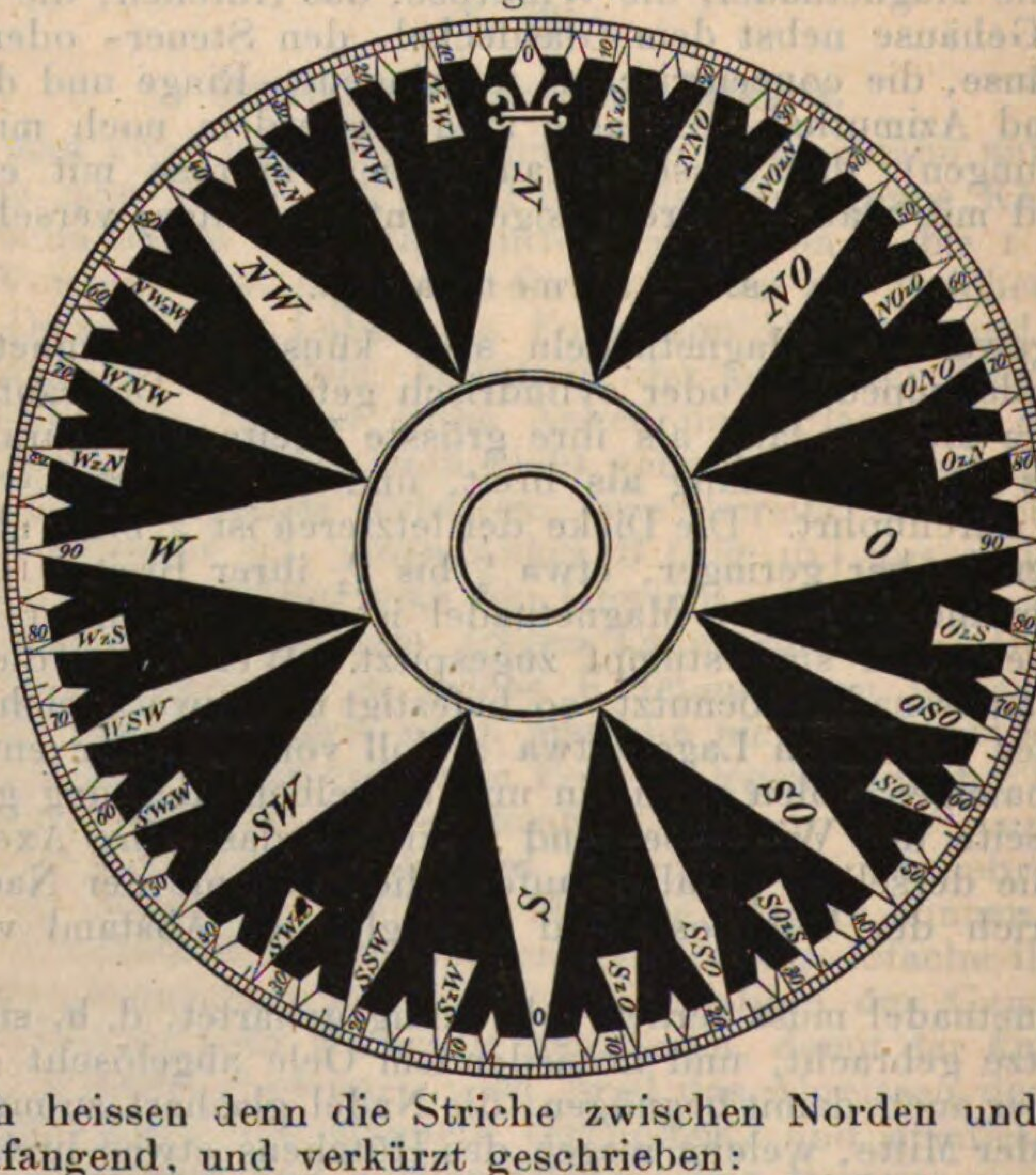
Es werden auch in neuerer Zeit die Windrosen der Normal-Compasse mit vier Nadeln versehen, jede aus zwei Lamellen (Stahlblättchen) zusammengesetzt, und in Abständen von 15° und 45° von der Nord-Südlinie der Windrose an dieser befestigt. Werden nur zwei Nadeln angebracht, so wird ihr Abstand von der Nord-Südlinie der Windrose 30° zu nehmen sein. Jedenfalls verdienen Windrosen mit zwei oder vier

Nadeln den Vorzug vor denen mit einer, die in der Mitte, der Anbringung des Hütchens wegen, durchbohrt sein muss.

b. Windrose.

Die Windrose ist eine kreisförmige Papierscheibe auf Pappe, besser immer, wenn auf Marienglas geklebt, damit sie sich nicht werfen kann, deren äusserer Rand die Eintheilung von 360° trägt, innerhalb welcher sich eine zweite Kreistheilung von 32 Abtheilungen befindet, jede also $11\frac{1}{4}°$ umfassend, die Compass-Striche oder schlechtweg Striche genannt werden. Auf den meisten Windrosen sind diese Striche in halbe und viertel Striche getheilt. Diese Striche werden durch bestimmte Zeichnungen und Benennungen unterschieden, die aus den vier Hauptpunkten des Horizontes: Nord, Süd, Ost und West zusammengesetzt sind. Hierbei geht man, wie die Windrose (Fig. 11.) zeigt, immer von den Endpunkten des magnetischen Meridians, nämlich von Norden und Süden nach Osten und Westen.

Fig. 11.



Sonach heissen denn die Striche zwischen Norden und Osten, von Norden anfangend, und verkürzt geschrieben:

N, NzO, NNO, NOzN, NO, NOzO, ONO, OzN, O.

Werden noch halbe und viertel Striche angegeben, so fügt man, der angegebenen Bezeichnung nach, diesen noch diejenigen Namen der vier Hauptstriche bei, nach welchen sie hinliegen. Man wird z. B. für $N 53\frac{1}{2}° O$ schreiben: $NO\frac{3}{4}O$. Den angeführten Regeln nach werden nun auch die Striche von Norden nach Westen, ebenso die von Süden nach Osten und Westen zu zählen und zu schreiben sein. Die Grade auf der Windrose werden gewöhnlich nur von Norden und Süden nach Osten und Westen bis 90° gezählt.

Was die Befestigung der Magnetnadel an die Windrose betrifft, so ist diese stets so an der Unterkante der letzteren zu bewerkstelligen, dass entweder die magnetische Axe der Nadel oder die Ebene, welche

man sich durch die magnetische Axe denkt, normal auf der Windrose steht und die Durchschnittslinie beider mit der Nord-Südlinie der Windrose parallel läuft, überdies der Nordpol der Nadel dem Nordpunkte der Windrose zugekehrt ist. Der Durchmesser der Windrose ist immer etwas grösser als die Länge der Magnetnadel zu nehmen.

Wegen des Erdmagnetismus wird auf nördlicher magnetischer Breite die um ihren Schwerpunkt frei schwebende Magnetnadel mit ihrem Nordpol gegen den Horizont geneigt sein, und auf südlicher Breite mit dem Südpol. Um nun die Windrose horizontal schwebend zu erhalten, könnte man an ihrer Unterkante ein kleines kupfernes Laufgewicht anbringen. Bei Compassen, welche keine bedeutende Ortsveränderung erleiden, d. h. in Breite, kann das Gleichgewicht der Nadel durch einige Tropfen Siegellack hergestellt werden.

c. Hütchen.

Das Hütchen ist ein kegelförmig ausgehöhlter Achat in Kupfer oder Messing eingefasst, mit seiner Grundebene auf der Oberkante der Windrose stehend, an dieser und der Nadel so befestigt, dass die Normale, die man sich in dem Mittelpunkte der Windrose auf dieser errichtet zu denken hat, durch die Spitze des Hütchens geht. In diesem Falle ist die Windrose mit keiner Excentricität (Entfernung vom Mittelpunkte) behaftet.

d. Pinne.

Die Pinne ist ein messingener runder Stift, der in dem Mittelpunkte der Grundebene des cylinderförmigen messingenen Gehäuses so festgeschraubt ist, dass das andere Ende desselben, welches zugespitzt in einen Punkt endigt, sich genau in der Axe des Gehäuses befindet. In diesem Falle hat auch die Spitze der Pinne keine Excentricität. Die Pinne darf ferner nur so lang sein, dass ihre Spitze in der Ebene liegt oder ein wenig über derselben steht, die man sich durch die Axen gehend zu denken hat, um welche sich das Gehäuse bewegt, weil bei dieser Einrichtung die Bewegung des Schiffes nur den geringsten Einfluss auf die Windrose haben kann. Bei einigen Compassen ist die Spitze der Pinne eine stählerne, welche ihrer Härte wegen hierzu besonders geeignet erscheint.

e. Gehäuse.

Das Gehäuse ist ein messingener, zuweilen auch kupferner, mit einem Boden versehener hohler Cylinder, oder ein einer hohlen Halbkugel ähnliches Gefäss von 4 bis 6 Zoll Höhe, dessen innerer Durchmesser 2 bis 3 Linien grösser ist als der Durchmesser der Windrose. Etwa in $\frac{1}{3}$ der Höhe dieses Gehäuses von der Oberkante desselben gerechnet, sind die Axen angebracht, um welche es sich bewegt, und an der Unterkante seiner Grundebene ist es noch mit einem kleinen Bleigewicht beschwert, damit es langsamer schwingt.

Dieses Gehäuse ist mit einem, in einen kreisförmigen messingenen Rahmen eingefassten Glasdeckel versehen, welcher bequem auf das Gehäuse fest aufgedrückt werden kann, wodurch die eingeschlossene, auf der Pinne frei schwebende, Windrose gegen Luftzug geschützt wird.

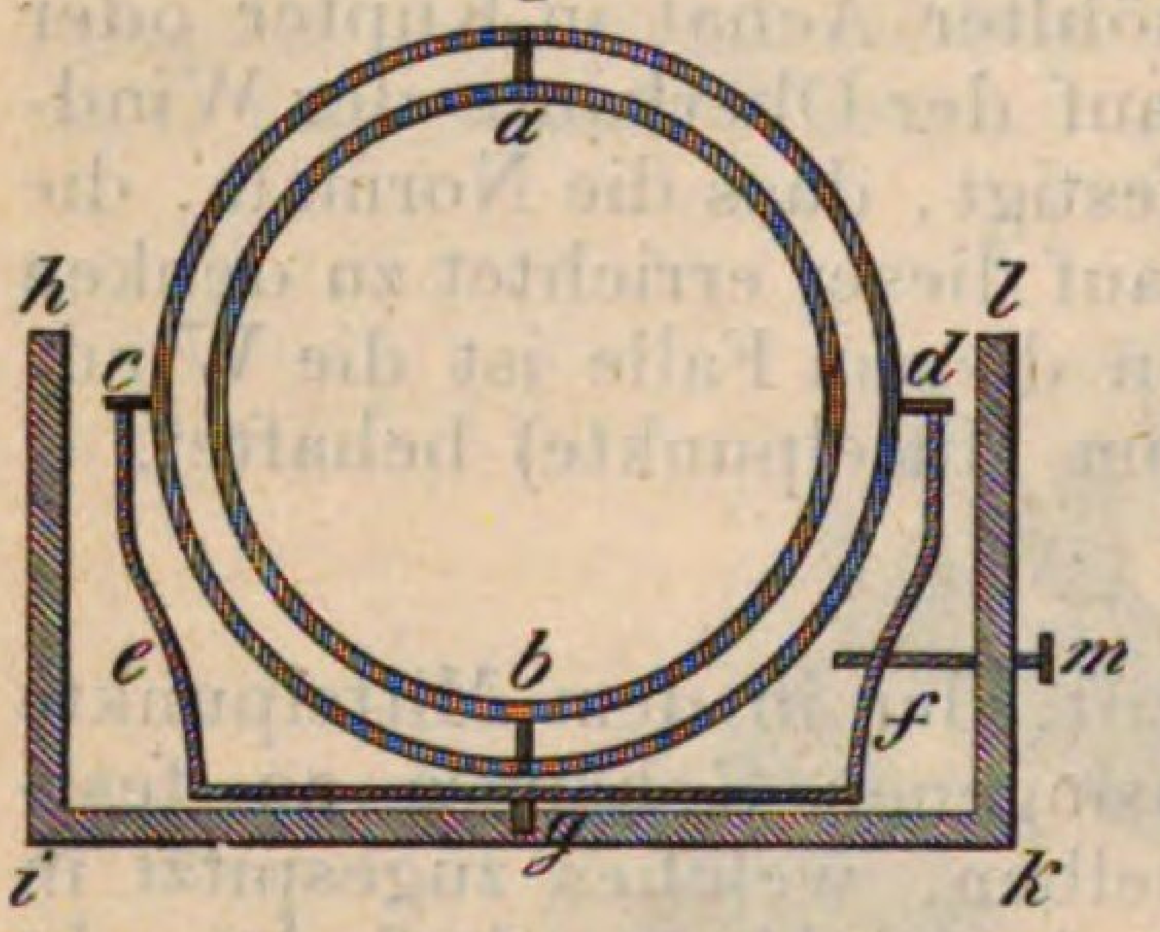
f. Steuerstrich.

Der Steuerstrich ist ein auf der inneren, gewöhnlich weiss gestrichenen Seitenwand des Gehäuses gezogener schwarzer Strich, der normal auf der Grundebene des Gehäuses steht. In den meisten Gehäusen ist noch ein zweiter Steuerstrich angebracht, der mit dem ersten in gerade entgegengesetzter Richtung liegt. In einigen Gehäusen befinden sich sogar vier Steuerstriche, welche dann so gegen einander gestellt sein müssen,

dass die Ebenen, die durch je zwei gegenüberstehende Steuerstriche gedacht, normal auf einander und auf der Grundebene des Gehäuses stehen, und die Durchschnittslinie dieser beiden Steuerstrichebenen mit der Axe des Gehäuses zusammenfällt.

Der Steuer-Compass ist auf dem Deck und zwar in dem Nachthause oder mit diesem so aufzustellen, dass die Ebene zweier entgegengesetzter Steuerstriche mit der durch die beiden Schiffssteven gehenden Ebene (Mittschiffsebene) parallel ist. Mit dem, dem Vordersteven des Schiffes zugekehrten Steuerstriche hat der Mann am Ruder den ihm aufgegebenen Strich der Windrose beständig in einer und derselben Linie zu halten. Der Bogen der Windrose zwischen dem Nord- oder Südstriche derselben und dem Steuerstriche, ist Maass von dem Winkel, den die horizontal schwebende Compassnadel mit der Steuerstrichebene bildet, und dieser Winkel ist der gesteuerte Curs, oder das Gesteuerte.

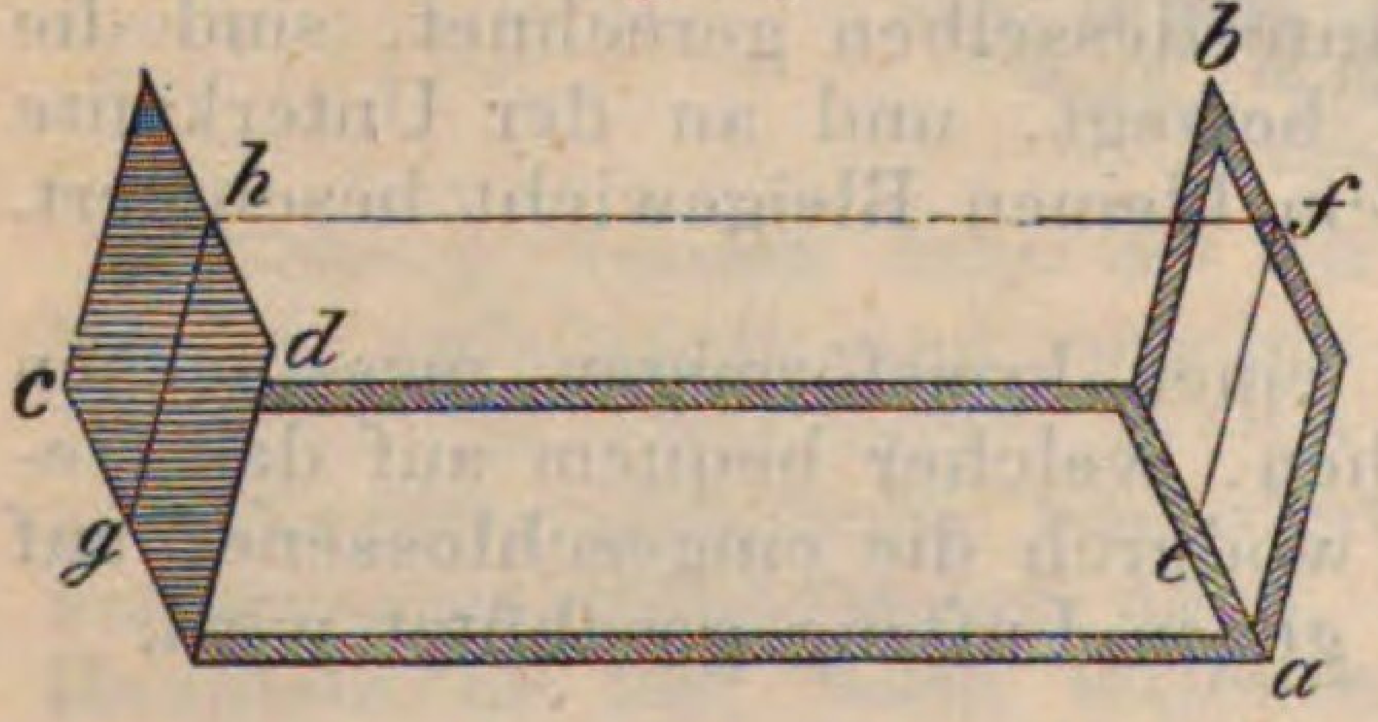
Fig. 12.



g. Die concentrischen messingenen Ringe bewegen sich um die auf einander normal stehenden Axen *ab* und *cd* (Fig. 12.), wovon die letztere auf den Zapfenlagern der Pfeiler *e* und *f* ruht, die unten zusammenhängend, mit dem Zapfen *g* versehen sind, der genau in eine messingene Büchse passt, die in dem Mittelpunkte des Bodens eines den ganzen Compass umgebenden rechtwinkligen hölzernen Kastens angebracht ist, so dass der Compass bequem in horizontaler Richtung gedreht werden kann. Ferner ist in der einen Seitenwand dieses Kastens eine Schraube *m* angebracht, und in dem Pfeiler *f* eine Oeffnung, in welche das ihr zugekehrte Ende der Schraube *m* genau passt, wodurch der Compass in seinem Kasten festgesetzt werden kann. Die Schraube *m* muss aber in der Seitenwand des Kastens so angebracht sein, dass die durch die Axe der Schraube und die einander gegenüberstehenden Steuerstriche gehende Ebene zwei mit einander parallele Seiten des rechtwinkligen Kastens hälftet, und mit seinen andern beiden Seiten parallel läuft. Diese Vorrichtung ist nöthig, um den Compass schnell und sicher so in dem genau gearbeiteten und richtig aufgestellten Nachthause placiren zu können, dass die Steuerstrichebene mit der durch die beiden Schiffssteven gehenden Ebene parallel ist.

h. Diopter.

Fig. 13.



Die Diopter sind zwei messingene Streifen, von etwa 4 Zoll Höhe, wie *ab* und *cd* (Fig. 13.), wovon der letztere mit einer sehr kleinen Oeffung *gh* (Sehspalte oder Schauritze), der erstere mit einer grösseren, in deren Mitte ein feiner Faden *ef* ausgespannt, versehen ist. Beide Diopter sind normal stehend auf dem messingenen Streifen *ac*, der in seiner Mitte ausgeschnitten ist, bei *a* und *c* durch Stifte befestigt. Der Streifen *ac* ist an seinen Unterkanten bei *a* und *c* wieder mit je einem Stifte oder mit zweien versehen, welche in Oeffnungen, auf dem messingenen Rande des Glasdeckels angebracht, genau passen, welche letztere aber so placirt sein müssen, dass, wenn man den ganzen Apparat mit seinen Dioptern auf den Glasdeckel aufgesteckt hat, die durch *fe* und *gh* gehende Ebene mit der durch zwei gegenüberstehende Steuerstriche gedachten Ebene zusammenfällt, oder doch

damit parallel läuft. Wenn das Gehäuse genau gearbeitet ist, so wird seine Axe genau vertical sein, wenn es seiner Suspension (freien Aufhängung) allein überlassen bleibt, also werden auch, der Faden und die kleine Oeffnung in den Diopteru, beide eine verticale Richtung haben, wenn nämlich die Ebene des Glasdeckels normal auf der Axe des Gehäuses steht, was durch ein Loth leicht zu prüfen ist.

i. Stativ.

Das zu einem Peil-Compasse gehörige Stativ besteht aus drei, gewöhnlich 5 Fuss langen hölzernen Stäben, die unten mit messingenen Spitzen versehen und an ihrem oberen Ende an einer messingenen Hülse so befestigt sind, dass sie zusammengeklappt werden können. Hierzu gehört ferner eine hölzerne quadratische Tischplatte, etwas grösser als die Grundebene des Compass-Kastens, an deren Oberkante eine Randleiste rundum angebracht und an ihrer Unterkante im Mittelpunkte mit einem messingenen Zapfen versehen ist, welcher genau in die Hülse des Stativs passt und darin leicht gedreht werden kann.

k. Das Peilen vermittelst des Peil- und Steuer-Compasses.

Nachdem man den Peil-Compass auf die Tischplatte des Stativs gesetzt, die Diopter gehörig angebracht hat, hält man das Auge vor das Diopter mit der Sehspalte und dreht den Compass so lange, bis der Faden des andern Diopters den Gegenstand, welchen man peilen will, deckt; gleichzeitig liest man den Grad oder Strich der Windrose ab, auf den derjenige Steuerstrich, der dem gepeilten Gegenstande zugekehrt ist, zeigt, welcher die Richtung des Gegenstandes vom Beobachtungsorte angiebt. Ist der zu peilende Gegenstand die Sonne, so kann man den Schatten des Fadens, der sich in dem der Sonne zugekehrten Diopter befindet, auf die Oeffnung in dem anderen Diopter, oder auch auf das Centrum der Windrose fallen lassen und nun wie vorhin ablesen, so hat man auch die Peilung der Sonne. Mit dem Steuer-Compasse peilt man auch genau genug, wenn man sich der Seitenflächen des Compass-Kastens statt der Diopter bedient.

l. Stärke der magnetischen Kraft des Steuer- und Peil-Compasses.

Die Magnetnadel eines Steuer-Compasses muss wenigstens so viel magnetische Kraft besitzen, dass sie durch Eisen oder Stahl etwa 6 Strich aus ihrer gewöhnlichen Lage (dem magnetischen Meridian) gebracht, sechs Doppelschwingungen macht, bevor sie wieder zur Ruhe kommt. Die magnetische Kraft eines Peil- und Azimuthal-Compasses muss noch grösser sein; die Nadel eines solchen Compasses muss fast doppelt so viele Schwingungen machen, als die eines Steuer-Compasses. Macht eine Compass-Nadel nicht so viele Schwingungen, so kann dies in dem Mangel an Magnetismus der Nadel, oder auch in der Reibung des Achathütchens auf der Spitze der Pinne seinen Grund haben. Diese Reibung wird entweder dadurch bewirkt, dass die Spitze der Pinne keinen Punkt mehr bildet, also stumpf ist, oder dadurch, dass das Innere des Hütchens zerkratzt ist, welches gewöhnlich nur bei den Kupfer- oder Messinghütchen der Fall sein wird. Diesen Mängeln muss immer, wenn es irgend angeht, abgeholfen werden.

m. Die Aufstellung des Steuer-Compasses in oder mit dem Nachthause.

In jedem gut gebauten Nachthause sind die äusseren und inneren Seitenwände desselben normalstehend auf seiner Vorder- und Hinter-

wand. Dieses Nachthaus muss so auf dem Deck befestigt sein, dass seine Seitenwände mit der durch die beiden Schiffssteven gedachten Ebene parallel laufen.

Der Steuer-Compass in seinem Kasten wird dann so in das Nachthaus gesetzt, dass die Seitenwände des Kastens sich genau an eine oder zwei der inneren Wände des Nachthauses anschliessen, und in dieser Lage wird er mit Werg gehörig festgepackt. Alsdann muss, wenn der Compass vier Steuerstriche hat, die Ebene durch zwei gegenüberstehende Steuerstriche parallel sein mit der durch die beiden Schiffssteven gehenden Ebene. Ist das Nachthaus ein transportables (verfahrbares), und nur für einen Compass eingerichtet, so hat man zuerst den Compass darin gehörig festzustellen, dann das Nachthaus an seinem Orte so zu befestigen, dass die durch zwei diametrale Steuerstriche gehende Ebene in die durch die beiden Schiffssteven gehende Ebene fällt, oder doch damit parallel läuft.

Der Mann am Ruder soll streng genommen stets mit seinem Auge in der Steuerstrich-Ebene, die in der Richtung des Schiffes liegt, sein; ist er dies nicht, so wird er einen anderen, als den ihm aufgegebenen Curs steuern, denn der äussere Rand der Windrose steht immer eine Linie oder mehr ab von dem Steuerstriche, und somit findet Parallaxe statt, welche um so grösser wird, je mehr das Auge des Steuerers (Rudermannes) sich seitwärts von der Steuerstrich-Ebene befindet.

n. Berichtigung des Compasses.

Da nicht vorausgesetzt werden kann, dass jeder Compass so genau ausgeführt ist, wie der in diesem Paragraphen beschriebene, so wird es nöthig, jeden Compass vor seiner Benutzung einer Prüfung zu unterwerfen, die der Seemann ohne besondere Hülfsmittel an Bord vornehmen kann. Dies wird in Folgendem gezeigt werden.

Hierbei werden Compasse mit wenigstens zwei gegenüberstehenden Steuerstrichen vorausgesetzt.

1. Die Theilung der Windrose, sowohl die Grad- als Strichtheilung, muss genau ausgeführt sein.

Dieses kann Jeder vermittelst eines Zirkels durch Nachmessung prüfen.

2. Die magnetische Axe der Compassnadel muss entweder mit der Nord-Südlinie der Windrose parallel sein oder doch in einer Ebene liegen, die so normal auf der Windrose steht, dass die Durchschnittslinie beider Ebenen mit der Nord-Südlinie der Windrose parallel läuft. Wenn nämlich die magnetische Axe nicht mit der geometrischen der Compassnadel zusammenfällt, oder mit ihr parallel läuft, so wird nur dann der Compass richtig zeigen, wenn eine Ebene durch diese beiden Axen gelegt werden kann, und die Nadel so an der untern Kante der Windrose befestigt ist, dass diese Ebene normal auf der Windrose steht und parallel mit der Nord-Südlinie der letzteren ist, oder mit ihr zusammenfällt. In jedem anderen Falle wird, wenn man die Compassnadel 180° um ihre geometrische Axe dreht, und sie hiernach an der Windrose genau wieder auf ihrer früheren Stelle befestigt, der Compass bei unverändertem Standorte von denselben feststehenden Gegenständen andere Richtungen zeigen. Der halbe Unterschied dieser beiden Richtungen eines Gegenstandes, welche mit dem Compasse in entgegengesetzten Lagen der Compassnadel genommen sind, ist der Collimationsfehler (Fehler der Sehlinie) des Compasses. Von diesem Fehler der Sehlinie oder Gesichtslinie muss entweder der Compass befreit werden, oder derselbe ist bei jeder Peilung oder jedem Curse nach diesem Compasse, in Rech-

nung zu bringen. Am einfachsten ist es immer, ihn wegzuschaffen, welches dadurch geschieht, dass man die geometrische Axe der Nadel an der Windrose um den Collimationsfehler, den richtigen Weg hin, aus ihrer bisherigen Lage bringt, und dieselbe dann wieder an der Windrose befestigt.

Wenn man die Missweisung eines, mit einem Fehler der Sehlinie behafteten Compasses immer durch astronomische Beobachtungen bestimmte, und diese bei der Berichtigung der Curse und Peilungen, damit beobachtet, in Rechnung brächte, so würden die auf diese Weise berichtigten Curse und Peilungen genau richtig werden.

3. Wenn die Spitze der Höhlung des Achathütchens nicht genau über dem Mittelpunkte der Windrose steht, oder die Spitze der Pinne sich nicht genau in der Axe des Gehäuses befindet, so wird der äussere Rand der Windrose nicht überall von der inneren kreisrunden Seitenwand gleichen Abstand haben und die Ablesungen auf der Windrose an den gegenüberstehenden Steuerstrichen werden nicht bei jedem Compassstriche genau übereinstimmen. Das arithmetische Mittel dieser beiden Ablesungen ist dann das Richtige, und die halbe Differenz ist der von der Excentricität des Compasses herrührende Fehler für diesen Strich der Windrose, oder was dasselbe ist, für diesen Compassstrich.

Zur Prüfung der Cylinderförmigkeit des Gehäuses, der Kreisförmigkeit der Windrose, ob die Spitze der Pinne in der Axe des Gehäuses sich befindet und ob die Steuerstriche richtig stehen, ist eine aus steifer Pappe geschnittene Kreisscheibe mit zwei auf einander normal stehenden Durchmessern versehen, deren Durchmesser nahe gleich dem inneren Durchmesser des Gehäuses sein muss, vorzüglich geeignet.

In das Centrum dieser Scheibe mache man eine feine Oeffnung, zu beiden Seiten derselben je eine grössere zum Durchfassen mit den Fingern, demnächst führe man sie in das Gehäuse parallel mit dessen Grundebene und stets den Endpunkt des einen Durchmessers auf denselben Steuerstrich haltend, so müssen die andern drei Endpunkte der Durchmesser die übrigen Steuerstriche decken, das Centrum der Scheibe die Spitze der Pinne treffen, und die Scheibe selbst in dem Gehäuse auf und nieder bewegt werden können, wenn letzteres genau richtig gearbeitet und die Pinne sowie die Steuerstriche richtig darin angebracht sind.

4. Die Diopter, d. h. der Faden in dem einen und die Sehspalte in dem anderen Diopter müssen, wenn auf dem Compasse gehörig befestigt, genau in einer Verticalebene liegen. Diese Untersuchung erfordert einen festen Standort, sie kann also nur an Bord, wenn das Schiff ganz still liegt, oder am Lande vorgenommen werden, und zwar auf folgende Weise.

Man befestigt, nicht weit vom Compasse entfernt, ein Loth und bringt den Faden des Diopters, das Auge vor der Sehspalte des anderen Diopters haltend, auf den des Lothes; decken diese beiden Fäden sich genau, so liegt der Faden des Diopters in einer Verticalebene, andernfalls nicht. Dieselbe Prüfung ist mit der kleinen Oeffnung des andern Diopters vorzunehmen. Statt des Lothes kann auch die verticale Kante eines irdischen Gegenstandes benutzt werden. Wenn die Diopter des Peil-Compasses nicht vertical stehen, so werden die damit genommenen Peilungen um so fehlerhafter werden, je grösser die Höhe des zu peilenden Gegenstandes ist. Bei Gegenständen, die im Horizonte liegen, müssen auch die mit nicht vertical stehenden Diopteru genommenen Peilungen richtig werden.

5. Die Gesichtslinie des Peil-Compasses, d. h. die Verbindungslinie zwischen dem Faden des einen, und der Sehspalte des anderen Diopters,

muss mit der Steuerstrichebene desselben zusammenfallen, oder mit derselben parallel laufen. Um dies zu untersuchen, peile man einen entfernten irdischen Gegenstand, drehe hiernach den Compass um 180°, und peile denselben Gegenstand auch in dieser Lage des Compasses. Stimmen diese Peilungen nicht überein, so geht daraus hervor, dass weder das Eine noch das Andere in Betreff der Diopter der Fall ist; stimmen sie aber überein, so ist dadurch noch nicht erwiesen, dass die Gesichtslinie mit der Steuerstrichebene zusammenfällt, oder mit dieser parallel läuft, sondern diese beiden können sich in einem Punkte schneiden, welcher genau in der Verticallinie des Centrums der Windrose liegt. Beide Peilungen werden dann um diesen Winkel fehlerhaft. Man wird daher den Faden und die Sehspalte der Diopter mit dem Steuerstriche und dem Centrum der Windrose in ein und dieselbe Verticalebene zu bringen haben.

6. Da das auf See befindliche Schiff fortwährend in Bewegung ist, so wird die Windrose des auf demselben aufgestellten Compasses stets eine hin- und herschwingende Bewegung haben; jene nun zu stoppen, wenn auch eine Vorrichtung dazu vorhanden wäre, würde nicht anzurathen sein, weil dadurch nicht allein die Spitze der Pinne stumpf gemacht, sondern auch das Hütchen leicht zerkratzt, also der Compass träge gemacht werden kann. Daher werden die Endpunkte eines Schwingungsbogens auf der Windrose zu beobachten, und das Mittel derselben als Peilung oder Curs zu betrachten sein, welche, oder welchen man erhalten haben würde, wenn die Windrose in Ruhe gewesen wäre. Das arithmetische Mittel aus mehreren solchen Mitteln, die kurz nach einander genommen sind, wird als die wahrscheinliche Peilung, oder als der wahrscheinliche Curs betrachtet werden können.

o. Berichtigung der Curse oder Peilungen für Missweisung.

Um die mit dem Compasse gemachten Peilungen, oder die Curse, welche derselbe angiebt, für Missweisung zu verbessern, oder was dasselbe heisst, sie rechtweisend zu machen, denke man sich zwei gewöhnliche Windrosen, die eine etwas grösser als die andere, mit ihren Mittelpunkten auf einander befestigt und um dieselben beweglich.

Die kleine obere betrachte man als die Windrose des Compasses, und die untere grössere als die Windrose des rechtweisenden Compasses. Den Nordpunkt der oberen Windrose drehe man nun so viel Grade oder Striche nach Osten oder Westen von dem Nordpunkte der unteren Windrose, als die Missweisung östlich oder westlich ist, so zeigt die untere Windrose die rechtweisenden Curse oder Peilungen, welche den magnetischen auf der oberen Windrose entsprechen; z. B. die Missweisung sei 2 Strich westlich, so bringe man den Nordpunkt der oberen Windrose 2 Strich nach Westen von dem der unteren Windrose, also auf den *NNW*-Strich der letzteren, alsdann entspricht dem magnetischen Nordstrich der rechtweisende *NNW*-Strich, dem magnetischen Südstrich der rechtweisende *SSO*-Strich, dem magnetischen *NO*-Strich der rechtweisende *NNO*-Strich u. s. w. Hieraus ergiebt sich nun folgende Regel zur Verwandelung der missweisenden Curse und Peilungen in rechtweisende, und umgekehrt.

Wenn die Missweisung westlich ist, so gehe man um so viel von dem zu verwandelnden magnetischen Compass-Strich nach der Linken, und wenn sie östlich ist, so viel von diesem nach der Rechten — von dem Centrum der Windrose aus gesehen — als die Missweisung beträgt, so hat man den entsprechenden rechtweisenden Compass-Strich.

Um dagegen einen rechtweisenden Compass-Strich in den ihm entsprechenden misweisenden zu verwandeln, verfährt man auf die entgegengesetzte Weise.

§. 31.

Von der Localdeviation (örtlichen Ablenkung) des Schiffs-Compasses.

I. Da das in der Nähe des Compasses befindliche Eisen auf die Richtung seiner Nadel Einfluss hat, so wird auch das in einem aus Holz gebauten Schiffe befindliche Eisen, als: Nägel, Bolzen, Anker, Ankerketten, die Welle und die Kette des Ruders u. s. w., und besonders, wenn die Ladung aus Eisenstücken besteht, diese einen bedeutenden Einfluss auf die Richtung der Compassnadel haben. Auf Kauffahrteischiffen wird die Einwirkung des darin befindlichen Eisens auf den Steuer-Compass nicht bedeutend sein, wenn aus der Nähe des Nachthauses alles Eisen möglichst entfernt ist, und die Ladung des Schiffes nicht aus Eisenstücken besteht. Je älter aber ein Schiff wird, desto mehr Eisen wird gewöhnlich darin angebracht, um es stärker zu machen, und deshalb wird in einem alten Schiffe die Wirkung des Eisens auf den Steuer-Compass grösser sein, als sie es früher auf demselben gewesen ist.

Auf Kriegsschiffen wird das Geschütz und auf Dampfschiffen die Maschine, besonders der Schornstein, eine grössere Wirkung auf den Steuer-Compass ausüben, als auf anderen Schiffen. Auf eisernen Schiffen ist der Steuer-Compass, wie gewöhnlich aufgestellt, nicht zu gebrauchen. Wie dennoch darauf der Steuer-Compass benutzt werden kann, ist im Abschnitte III. dieses Paragraphen angegeben.

Im Allgemeinen scheint die Wirkung des im Schiffe befindlichen Eisens auf die Compassnadel auf den Pol derselben gerichtet zu sein, welcher gegen den Horizont geneigt ist, d. h. in magnetischer Nordbreite scheint das Nordende der Nadel, und in magnetischer Südbreite das Südende der Nadel angezogen zu werden, und zwar um so mehr, je grösser die magnetische Breite ist, in der sich das Schiff befindet; unter dem magnetischen Aequator ist diese Anziehung nahe Null. Die Richtigkeit dieser Erscheinung ergiebt sich aus Folgendem. Da die Erde im Norden einen Südpol, im Süden einen Nordpol hat und der Pol eines Magnets in nahem weichen Eisen an der ihm zugekehrten Stelle ungleichnamigen und in der ihm abgekehrten gleichnamigen Magnetismus hervorruft, so muss auch das im Schiffe befindliche Eisen durch den Erdmagnetismus selbst magnetisch werden, und es müssen sonach in magnetischer Nordbreite die oberen Theile des im Schiffe befindlichen Eisens südpolarisch und die unteren nordpolarisch werden; auf südlicher magnetischer Breite findet das Entgegengesetzte statt, und auf dem magnetischen Aequator wird es die magnetische Kraft fast ganz verlieren, weil der Nord- und Südmagnetismus der Erde sich hier das Gleichgewicht halten.

Die Wirkung des in einem Schiffe befindlichen magnetischen Eisens auf die Compassnadel heisst Localattraction (örtliche Anziehung) und die dadurch entstehende Ablenkung der horizontal schwebenden Nadel von der magnetischen Meridianebene wird Localdeviation (örtliche Ablenkung) genannt. Diese örtliche Ablenkung ist es, womit der Seemann es eigentlich zu thun hat, und die so oft wie möglich bestimmt werden sollte. Dieselbe wird ebenso benannt wie die Missweisung, nämlich westlich, wenn das Nordende der Nadel nach Westen von dem magnetischen Meridian abweicht, und östlich, wenn es nach Osten zu von der magnetischen Meridianebene liegt. Diesem zufolge kann die örtliche

Ablenkung des Compasses auch als eine Missweisung der Missweisung angesehen werden.

Da Nägel, Bolzen u. s. w. in einem Schiffe als in demselben gleichmässig vertheilt anzusehen sind, so wird das Centrum der Gesammtwirkung dieses Eisens, bezw. dieses Systems von Magneten auf die Compassnadel sehr nahe mittschiffs (in der Ebene der beiden Schiffssteven) liegen, und deshalb muss die Ablenkung des Steuer-Compasses, der gewöhnlich in der Nähe des Ruders mittschiffs aufgestellt ist, wenn das Schiff nach dem Compass Nord oder Süd anliegt, nahe Null sein, weil die örtliche Anziehung und der Erdmagnetismus in diesem Falle in einer und derselben Verticalebene wirken. Ferner wird in diesem Falle, wenn das Schiff nach dem Compass Ost oder West anliegt, die örtliche Ablenkung im Allgemeinen am grössten sein.

Der vorhergehenden Annahme nach wird der Punkt, welcher die Ablenkung der Compassnadel bewirkt, vor dem Steuer-Compasse liegen; wenn aber die Welle des Steuerrades, ausserdem noch wie jetzt schon häufig auch die Ruderpinne von Eisen ist, so kann der anziehende Punkt hinter dem Steuer-Compasse liegen. Wenn ferner die eiserne Ruderpinne nicht etwa 10 Fuss von dem Steuer-Compasse entfernt ist, in welcher Entfernung ihre Einwirkung auf den Steuer-Compass gleich Null gesetzt werden kann, so wird der anziehende Punkt hinter dem Compasse ein beweglicher sein. Die Ablenkung desselben wird in diesem Falle gar nicht bestimmt werden können, und es bleibt daher nichts weiter übrig, als die eiserne Ruderpinne durch eine hölzerne oder andere metallene zu ersetzen.

Ist das in der Nähe des Nachthauses befindliche Eisen nicht an beiden Seiten des Schiffes gleichmässig vertheilt, so wird der anziehende Punkt nicht mehr in der durch die beiden Schiffssteven gehenden Ebene liegen, sondern seitwärts derselben, und dem zufolge kann dann auch die örtliche Ablenkung des Steuer-Compasses nicht Null sein, wenn das Schiff Nord oder Süd nach dem Compasse anliegt.

Da ferner die Wirkungen zweier gewöhnlicher Eisenstücke von gleichen Massen und Oberflächen auf eine in ihrem Wirkungskreise befindliche Magnetnadel sich umgekehrt zu einander verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen der Eisenstücke von der Magnetnadel, so wird eine kleine Ortsveränderung in der Masse des dem Compasse nahen Eisens eine grössere Veränderung in der örtlichen Ablenkung des Compasses bewirken, als eine gleiche Ortsveränderung in der entfernter liegenden Eisenmasse.

Es ist schon früher bemerkt worden, dass Eisen, wenn es sich längere Zeit in einer gewissen Lage befindet, durch den Erdmagnetismus magnetisch gemacht wird, und zwar so, dass auf nördlicher magnetischer Breite das untere Ende desselben der Nordpol, und das obere Ende der Südpol wird, auf südlicher magnetischer Breite das Umgekehrte stattfindet, und unter dem magnetischen Aequator der Erde durch den Erdmagnetismus in unmagnetischem Eisen wohl kein Magnetismus hervorgebracht werden kann, weil hier beide Erdmagnetismen sich das Gleichgewicht halten.

Diesem zufolge muss denn auch das im Schiffe befindliche Eisen auf höhern Breiten mit der Zeit magnetisch werden, wenn auch nur in geringem Grade, und somit auf die Richtung der Compassnadel so einwirken, wie ein Magnet auf einen andern in seinem Wirkungskreise befindlichen, was besonders von der Lage ihrer befreundeten oder feindlichen Pole gegeneinander abhängig sein wird.

So lange nun also ein Schiff in derselben magnetischen Breite bleibt, und keine Veränderung mit der Masse oder Lage des in demselben befindlichen Eisens, besonders desjenigen, welches dem Steuer-Compasse

nahe ist, vorgenommen wird, bleibt auch die Ablenkung dieselbe, wenn inzwischen das Eisen seine magnetische Kraft nicht verändert hat. Wenn das Schiff aber in magnetischer Breite bedeutend verändert, so wird auch die Ablenkung seines Steuer-Compasses eine Veränderung erleiden, und wenn es auf entgegengesetzte magnetische Breite gelangt, so wird allmälig die Ablenkung in die entgegengesetzte übergehen, weil der Erdmagnetismus die Lage der magnetischen Pole des im Schiffe befindlichen Eisens im ersten Falle bedeutend verändern und im letzten umkehren wird.

Da man nicht weiss, in welcher Zeit ein in einer gegebenen Lage befindliches Stück Eisen eine bestimmte magnetische Kraft annimmt, so ist es nicht möglich, die Veränderungen des Magnetismus in dem Eisen des Schiffes, welche durch die Ortsveränderungen desselben auf der Oberfläche der Erde entstehen, mit Sicherheit bestimmen zu können. Es bleibt daher dem Seemanne kein anderes Mittel zur Bestimmung der örtlichen Ablenkung, als sie von Zeit zu Zeit immer von Neuem durch Beobachtungen zu ermitteln, und diese Beobachtungen in kurzen Zwischenräumen zu wiederholen, wenn das Schiff in magnetischer Breite bedeutend verändert.

Eine Veränderung in der Hinterlastigkeit des Schiffes oder ein Schiefliegen (Krengen) desselben bewirkt ebenfalls eine Veränderung in der Ablenkung, weil in beiden Fällen die Entfernung zwischen dem anziehenden Punkte und dem gegen den Horizont geneigten Pol der Compassnadel verändert wird. Die Veränderung in der Ablenkung durch das Schiefliegen des Schiffes, wenn es beim Winde segelt, wird bei gleichem Schiefliegen desselben Schiffes um so bedeutender sein, je grösser die Ablenkung selbst ist.

II. Die Ablenkung des Compasses an Bord eines Schiffes kann auf folgende vier Arten bestimmt werden.

a. Wenn ein Schiff bei ruhigem oder windstillem Wetter in der Nähe der Küste vor Anker liegt, so schwaje man es um seinen Anker und peile bei jedem Compassstriche, den das Schiff nach dem Steuer-Compasse anliegt, einen entfernten irdischen Gegenstand mit demselben und notire die Peilungen. Der irdische Gegenstand muss aber so weit — 6 bis 8 Seemeilen — entfernt sein, dass die Ortsveränderung des Schiffes während des Schwajens um seinen Anker als verschwindend dagegen anzunehmen ist. Gestattet die Aufstellung des Steuer-Compasses das Peilen mit demselben nicht, so muss statt seiner mit dem Peil-Compasse der irdische Gegenstand gepeilt und gleichzeitig untersucht werden, was das Schiff nach beiden Compassen anliegt.

Hieraus lassen sich die gleichzeitigen Peilungen desselben Gegenstandes nach dem Steuer-Compasse ermitteln. Darauf bestimme man die magnetische Richtung des gepeilten Gegenstandes. Am einfachsten und genau genug wird diese erhalten, wenn man ein Boot mit dem Peil-Compasse in der Richtung dieses Gegenstandes an den Strand sendet, was mittelst Winkens ganz genau geschehen kann, dort diesen Compass aufstellen und damit den Ort des Steuer-Compasses an Bord peilen lässt, einige Male mindestens, so ist das arithmetische Mittel dieser Peilungen entgegengesetzt genommen, die verlangte magnetische Richtung des gepeilten Gegenstandes. Ist diese Landung des Bootes an der betreffenden Stelle nicht thunlich, so muss auf folgende Weise verfahren werden. Man bestimme zunächst durch Winkelmessungen den Ort des Schiffes in der Karte und messe das wahre Azimuth des gepeilten Gegenstandes, oder man bestimme dasselbe durch astronomische Beobachtungen. Sodann begebe man sich mit dem Steuer- und Peil-Compasse an's Land, vergleiche daselbst beide und bestimme ebenfalls durch astronomische

Beobachtungen die Missweisung des einen, so lässt sich auch die des anderen vermittelst ihrer Vergleichungen am Lande ermitteln. Aus der so gefundenen Missweisung des Steuer-Compasses — oder der aus der Karte entnommenen, wenn man die angegebene Azimuth-Beobachtung nicht hat machen können — und dem wahren Azimuth des vom Schiffe aus gepeilten Gegenstandes ergiebt sich das magnetische Azimuth desselben, und mit diesem die Peilungen desselben Gegenstandes, die mit dem Steuer-Compasse vom Schiffe aus genommen sind, verglichen, geben die Ablenkung des Steuer-Compasses für jeden Strich, den das Schiff nach diesem angelegen hat. Auf ähnliche Weise kann die Ablenkung des Peil-Compasses bestimmt werden, welche Bestimmung um so wünschenswerther sein wird, wenn immer nur mit dem Peil-Compasse gepeilt werden kann, weil dann sofort jede Peilung von der Ablenkung des Peil-Compasses leicht zu befreien ist. Hierdurch wird die Berichtigung einer jeden mit dem Peil-Compasse genommenen Peilung auf den Steuer-Compass überflüssig, welche durchaus erforderlich sein würde, wenn nur die Ablenkung des Steuer-Compasses allein untersucht wäre. Dieser Berichtigung muss immer eine Vergleichung der beiden Compasse vorausgehen, welche mit Schwierigkeiten verbunden und im Dunkeln fast gar nicht auszuführen ist. Es ist nur noch zu bemerken, dass der Peil-Compass immer genau wieder auf derselben Stelle aufgestellt werden muss, von welcher aus seine Ablenkung bestimmt worden ist.

b. Wenn kein genugsam entfernter irdischer Gegenstand da ist, und wieder mit dem Steuer-Compasse nicht gepeilt werden kann, so begebe man sich zuerst mit zwei Peil-Compassen an's Land, vergleiche dieselben dort sorgfältig, lasse den einen am Lande und nehme den andern wieder an Bord. Hier stelle man diesen auf, lasse das Schiff schwajen, peile gleichzeitig bei jedem vollen Strich, den das Schiff nach dem Steuer-Compasse anliegt, den Compass am Lande, und gleichzeitig, in Folge eines der Abrede gemäss gegebenen Signals, peile der mit dem Compasse am Lande den Peil-Compass an Bord. Bei jedem zwischen je zwei ganzen Strichen liegenden halben Striche, den das Schiff nach dem Steuer-Compasse anliegt, vergleiche man diesen mit dem Peil-Compasse an Bord, d. h. man untersuche, was das Schiff nach beiden gleichzeitig anliegt, und nehme das Mittel aus je zwei aufeinander folgenden Vergleichungen eines und desselben Compasses. Jedes Mittel entspricht dann der zwischen den beiden Vergleichungen angestellten Peilung. Vergleicht man ferner die an Bord gemachten Peilungen mit den entgegengesetzten, gleichzeitig am Lande bewirkten, — die Vergleichung der beiden Peil-Compasse hierbei berücksichtigend, — so wird man für jeden Strich, den das Schiff nach dem Steuer-Compasse anliegt, die Ablenkung des Peil-Compasses an Bord haben, und wenn auf diese Ablenkung die respektiven Vergleichungen des Peil- und Steuer-Compasses an Bord richtig angewandt werden, so hat man die verlangte Ablenkung des Steuer-Compasses.

c. Wenn man bei windstillem, hellem Wetter auf hohem Meere oder in der Nähe der Küste unter Segel ist, so lasse man das Schiff allmälig umgehen, peile mit dem Steuer-Compasse nach einer guten Uhr, deren Stand gegen wahre Zeit entweder bereits gegeben ist oder kurz nach der Peilung bestimmt werden muss, die Sonne bei jedem vollen Strich, den das Schiff nach dem Steuer-Compasse anliegt, berechne nun aus jedem Stundenwinkel der Sonne, ihrer Declination und aus der geographischen Breite des Beobachtungsortes die wahren Azimuthe der Sonne und vergleiche mit diesen die ihnen entsprechenden, mittelst des Steuer-Compasses erhaltenen, so hat man die Missweisung des Steuer-Compasses für jeden ganzen Strich, den das Schiff nach diesem Compasse anliegt. Das arithmetische Mittel aus allen diesen Missweisungen wird

nahe die Missweisung des Beobachtungsortes sein und nicht viel von der in einer guten neuen Seekarte angegebenen abweichen, wenn die Ablenkung in dem einen Halbkreise der Windrose ebenso viel östlich als in dem anderen westlich ist, eine Voraussetzung, die nur auf Kauffahrteischiffen von Holz gebaut, zutreffend sein wird. Mit dieser Missweisung oder der aus der Karte genommenen — wenn man diese für genauer als jene hält — vergleiche man nun die Missweisung des Steuer-Compasses für jeden ganzen Strich der Windrose, so hat man die Ablenkung desselben für jeden ganzen Strich derselben. Diese Methode, die Ablenkung zu bestimmen, ist, wenn auch nicht die genaueste, so doch die für den Seemann am leichtesten ausführbare und für nautische Zwecke genau genug, besonders auf Segelschiffen aus Holz gebaut. Die Gelegenheit, nach dieser Methode die Ablenkung zu bestimmen, bietet sich dem Seemann sehr oft dar, weshalb sie ihm besonders zu empfehlen ist. Die Hauptarbeit dabei besteht im Berechnen der wahren Azimuthe und der Bestimmung des Standes der Uhr; das Uebrige ist leicht.

d. Wenn das Schiff bei ruhigem Wetter und keiner oder nicht bedeutender Strömung vor Anker liegt oder sich unter Segel befindet, schiebe man zwei lange Spieren nach hinten über das Heck und befestige am hintersten Ende derselben, ohne Eisen dazu zu verwenden, eine Stellung, 8 bis 10 Fuss vom Heck entfernt, auf welcher ein Compass placirt werden und ausserdem ein Beobachter sitzen kann. Dieser Compass muss dergestalt aufgestellt werden, dass die Ebene durch die beiden gegenüberstehenden Steuerstriche in der Verticalebene, welche durch die Mitte der beiden Schiffssteven geht, liegt, oder mit derselben parallel läuft. Dazu ist ausreichend, den Compass auf der Stellung so zu stellen, dass man durch die Sehspalte nach dem Faden im andern Diopter sehend, diesen und die Steuerbord- oder Backbordseiten von Gross- und Fockmast in Linie, also deckend hat. Ein auf solcher Stellung befindlicher Compass wird von den grösseren Eisenmassen, die sich gewöhnlich in der Mitte des Schiffes befinden, genugsam entfernt sein, um als nicht von dem im Schiffe befindlichen Eisen angezogen angesehen werden zu können. Will man hierüber Gewissheit haben, so peile man mit diesem Compasse ein genugsam entferntes Object bei drei beliebigen, jedoch 8 Striche verschiedenen Cursen, und geben diese Peilungen so gut wie dieselbe Richtung, dann hat dieser Compass keine Ablenkung. Wenn nun ein Beobachter bei dem auf der Stellung befindlichen Compasse seinen Platz einnimmt, ein zweiter den im Nachthause richtig aufgestellten Compass beobachtet — wenn das Schiff mittelst Warpen langsam herumgezogen oder auch durch ein Boot herumbugsirt wird — und jeden vollen Strich notirt, den das Schiff nach dem Steuer-Compass anliegt, während er in demselben Moment dem Beobachter auf der Stellung dieses durch ein Zeichen zu erkennen giebt, der dann gleichzeitig aufschreibt, wie das Schiff nach dem sich auf der Stellung befindenden Compasse gegen dessen Steuerstrich zeigt, so ergiebt sich leicht aus je zwei gleichzeitig gemachten Beobachtungen, ob und welche Ablenkung der Steuer-Compass hat. Wiederholt man die Beobachtung, indem man das Schiff den entgegengesetzten Weg herumgehen lässt, so können die Mittel der beiden Resultate als vom Einflusse der Trägheit der Compasse befreit, angesehen werden.

Nach den Methoden c. und b. ist die Ablenkung auf der Uebungs-Corvette „Amazone" in den Jahren 1845 und 1844 bestimmt worden. Die diesfälligen Beobachtungen und Resultate sind in den folgenden Tabellen enthalten.

Die Ablenkung des Steuer-Compasses der Corvette „Amazone" wurde am 10. September 1845, als das genannte Schiff auf der Rhede von Funchal vor Anker lag, durch folgende Beobachtungen untersucht und bestimmt:

Das Schiff liegt an nach dem Steuer-Compasse in Strichen.	Das Schiff liegt an nach dem Steuer-Compasse in Graden.	Das Schiff liegt an nach dem Peil-Compasse.	Mit dem Peil-Compasse an Bord ist der am Lande stationirte gepeilt	Mit dem am Lande stationirten Peil-Compasse ist der an Bord gepeilt.	Local-deviation des Peil-Compasses an Bord.	Unterschied der Localdeviation des Peil-Compas. von der des Steuer-Comp. an Bord.	Local-deviation des Steuer-Compasses.
S ½ O	S 5,6° O	S 5,5° O					
Süd	Süd	S 0,7 W	N 23,5° W	S 20,6° O	2,9° Ost	0,7° Ost	3,6° Ost
S ½ W	S 5.6 W	S 7,0 W					
S z W	S 11.3 W	S 13,5 W	N 24,0 W	S 21,0 O	3,0 »	2,2 »	5,2 »
S z W ½ W	S 16,9 W	S 20,0 W					
SSW	S 22,5 W	S 26,8 W	N 23,7 W	S 21,0 O	2,7 »	4,3 »	7,0 »
SSW ½ W	S 28,1 W	S 33,5 W					
SW z S	S 33,8 W	S 39,1 W	N 22,7 W	S 21,6 O	1,1 »	5,3 »	6,4 »
SW ½ S	S 39,4 W	S 44,7 W					
SW	S 45,0 W	S 50,9 W	N 24,0 W	S 21,7 O	2,3 »	5,9 »	8,2 »
SW ½ W	S 50,6 W	S 57,0 W					
SW z W	S 56.3 W	S 62,9 W	N 24,0 W	S 22,0 O	2,0 »	6,6 »	8,6 »
SW z W ½ W	S 61,9 W	S 68,9 W					
WSW	S 67,5 W	S 73,3 W	N 24,3 W	S 23,0 O	1,3 »	5,8 »	7,1 »
WSW ½ W	S 73,1 W	S 78,6 W					
W z S	S 78,8 W	S 84,3 W	N 23,5 W	S 22,5 O	1,0 »	5,5 »	6,5 »
W ½ S	S 84,4 W	S 90,0 W					
West	S 90,0 W	N 85,0 W	N 23,7 W	S 22,6 O	1,1 »	5,0 »	6,1 »
W ½ N	N 84,4 W	N 80,0 W					
W z N	N 78,8 W	N 74,2 W	N 23,0 W	S 22,7 O	0,3 »	4,6 »	4,9 »
WNW ½ W	N 73,1 W	N 68,3 W					
WNW	N 67.5 W	N 63,3 W	N 22,7 W	S 22,5 O	0,2 »	4,2 »	4,4 »
NW z W ½ W	N 61,9 W	N 58,3 W					
NW z W	N 56,3 W	N 52,9 W	N 22,5 W	S 22,0 O	0,5 »	3,4 »	3,9 »
NW ½ W	N 50,6 W	N 47,5 W					
NW	N 45,0 W	N 42,4 W	N 21,8 W	S 21,6 O	0,2 »	2,6 »	2,8 »
NW ½ N	N 39,4 W	N 37,2 W					
NW z N	N 33.8 W	N 32,1 W	N 22,0 W	S 21,0 O	1,0 »	1,7 »	2,7 »
NNW ½ W	N 28,1 W	N 27,0 W					
NNW	N 22,5 W	N 22,0 W	N 22,5 W	S 21,0 O	1,5 »	0,5 »	2,0 »
N z W ½ W	N 16,9 W	N 17,0 W					
N z W	N 11,3 W	N 11,4 W	N 22,5 W	S 20,6 O	1,9 »	0,1 West	1,8 »
N ½ W	N 5.6 W	N 5,8 W					
Nord	Nord	N 0,5 W	N 22,5 W	S 20,5 O	2,0 »	0,5 »	1,5 »
N ½ O	N 5,6 O	N 4,8 O					
N z O	N 11,3 O	N 9,9 O	N 22,5 W	S 20,5 O	2,0 »	1,4 »	0,6 »
N z O ½ O	N 16,9 O	N 15,0 O					
NNO	N 22,5 O	N 19,8 O	N 21,8 W	S 20,3 O	1,5 »	2,7 »	1,2 West
NNO ½ O	N 28,1 O	N 24,5 O					
NO z N	N 33,8 O	N 30,0 O	N 22,0 W	S 20,3 O	1,7 »	3,8 »	2,1 »
NO ½ N	N 39,4 O	N 35,5 O					
NO	N 45,0 O	N 40,8 O	N 22,0 W	S 19,5 O	2,5 »	4,2 »	1,7 »
NO ½ O	N 50,6 O	N 46,0 O					
NO z O	N 56,3 O	N 51,0 O	N 21,5 W	S 18,7 O	2,8 »	5,3 »	2,5 »
NO z O ½ O	N 61,9 O	N 56,0 O					
ONO	N 67,5 O	N 62,0 O	N 21,0 W	S 18,5 O	2,5 »	5,5 »	3,0 »
ONO ½ O	N 73,1 O	N 68,0 O					
O z N	N 78,8 O	N 73,7 O	N 20,0 W	S 17,7 O	2,3 »	5,1 »	2,8 »
O ½ N	N 84,4 O	N 79,4 O					
Ost	N 90,0 O	N 84,5 O	N 19,0 W	S 16,7 O	2,3 »	5,5 »	3,2 »
O ½ S	S 84,4 O	S 89,5 O					
O z S	S 78,8 O	S 84,4 O	N 20,0 W	S 16,3 O	3,7 »	5.6 »	1,9 »
OSO ½ O	S 73,1 O	S 78,3 O					
OSO	S 67,5 O	S 72,7 O	N 20,0 W	S 16,3 O	3,7 »	5,2 »	1,5 »
SO z O ½ O	S 61,9 O	S 67,0 O					
SO z O	S 56,3 O	S 61,2 O	N 21,3 W	S 18,5 O	2,8 »	4,9 »	2,1 »
SO ½ O	S 50,6 O	S 55,3 O					
SO	S 45,0 O	S 49,3 O	N 22,5 W	S 19,5 O	3,0 »	4,3 »	1,3 »
SO ½ S	S 39,4 O	S 43,2 O					
SO z S	S 33,8 O	S 38,1 O	N 23,7 W	S 20,5 O	3,2 »	4,3 »	1,1 »
SSO ½ O	S 28,1 O	S 33,0 O					
SSO	S 22,5 O	S 25,8 O	N 24,3 W	S 20,0 O	4,3 »	3,3 »	1,0 Ost
S z O ½ O	S 16,9 O	S 18,6 O					
S z O	S 11,3 O	S 12,1 O	N 24,5 W	S 21,0 O	3,5 »	0,8 »	2,7 »
S ½ O	S 5,6 O	S 5,5 O					

1844 den 11. Juni Morgens wurden mit dem Steuer-Compasse der Corvette „Amazone", während sie sich in $49^\circ\ 54'$ N. Br. und $2^\circ\ 29'$ W. L. von Greenwich unter Segel befand und auf die in der nachstehenden Tabelle genannten Striche des Steuer-Compasses anlag, folgende Peilungen der Sonne gemacht, um die Localdeviation des bezeichneten Compasses zu bestimmen. Nach einer neuen Karte war die Missweisung in der angegebenen Länge und Breite $= 25^\circ$ West und der Stand der Beobachtungs-Uhr $= -1^h\ 4'\ 59''$ gegen wahre Zeit.

Das Schiff liegt an nach dem Steuer-Compasse.	Die Beobachtungs-Uhr zeigte.	Die Sonne ist gleichzeitig mit dem Steuer-Compasse gepeilt.	Das gleichzeitige wahre Azimuth der Sonne.	Die Missweisung des Steuer-Compasses.	Missweisung am Orte.	Localdeviation des Steuer-Compasses.
S 26° W	7h 15′ 48,″5	N 92,7° O	N 76,6° O	16,1° West	25° West	8,9° Ost
S 11 W	7 18 15	N 95,0 O	N 77,0 O	18,0 »	»	7,0 »
S 1 W	7 21 31	N 97,5 O	N 77,6 O	19,9 »	»	5,1 »
S 10 O	7 22 28	N 98,8 O	N 77,7 O	21,1 »	»	3,9 »
S 34 O	7 23 45	N 103,4 O	N 78,0 O	25,4 »	»	0,4 West
S 49 O	7 24 50	N 105,9 O	N 78,2 O	27,7 »	»	2,7 »
S 56 O	7 25 20	N 105,7 O	N 78,3 O	27,4 »	»	2,4 »
S 72 O	7 26 7	N 107,2 O	N 78,4 O	28,8 »	»	3,8 »
N 83 O	7 27 5	N 107,5 O	N 78,6 O	28,9 »	»	3,9 »
N 69 O	7 27 56	N 107,7 O	N 78,7 O	29,0 »	»	4,0 »
N 41 O	7 29 2	N 108,1 O	N 78,9 O	29,2 »	»	4,2 »
N 29 O	7 29 51	N 108,0 O	N 79,1 O	28,9 »	»	3,9 »
N 9 O	7 31 12	N 107,2 O	N 79,3 O	27,9 »	»	2,9 »
N 5 W	7 32 33	N 107,3 O	N 79,5 O	27,8 »	»	2,8 »
S 40 W	8 4 36	N 101,4 O	N 85,4 O	16,0 »	»	9,0 Ost
S 60 W	8 2 0	N 100,7 O	N 84,9 O	15,8 »	»	9,2 »
S 74 W	8 13 24	N 103,8 O	N 87,0 O	16,8 »	»	8,2 »
S 88 W	8 15 54	N 105,4 O	N 87,5 O	17,9 »	»	7,1 »

Am folgenden Tage 1844 den 12. Juni Morgens, wurden diese Beobachtungen Behufs Ermittelung der Localdeviation des bezeichneten Steuer-Compasses an Bord der Corvette „Amazone" unter Segel in 50° 13′ N. Br. und 2° 55′ W. L. von Greenwich fortgesetzt, wie hier folgt. Der Stand der Beobachtungs-Uhr war zu der Zeit = — 1^h^ 6′ 50″ gegen wahre Zeit.

Das Schiff liegt an nach dem Steuer-Compasse.	Die Beobachtungs-Uhr zeigte.	Die Sonne ist gleichzeitig mit dem Steuer-Compasse gepeilt.	Das gleichzeitige wahre Azimuth der Sonne.	Die Missweisung des Steuer-Compasses.	Missweisung am Orte.	Localdeviation des Steuer-Compasses.
Nord	8h 4′ 32″	S 66,6° O	N 85,1° O	28,3° West	25° West	3,3° West
N 12° W	8 15 3	S 65,3 O	N 87,1 O	27,6 »	»	2,6 »
N 25 W	8 18 25	S 66,0 O	N 87,7 O	26,3 »	»	1,3 »
N 42 W	8 24 29	S 67,1 O	N 88,9 O	24,0 »	»	1,0 Ost
N 57 W	8 27 52	S 67,3 O	N 89,5 O	23,2 »	»	1,8 »
N 68 W	8 30 51	S 68,8 O	N 90,1 O	21,1 »	»	3,9 »
N 80 W	8 32 51	S 69,8 O	N 90,5 O	19,7 »	»	5,3 »
S 88 W	8 37 41	S 71,0 O	N 91,4 O	17,6 »	»	7,4 »
N 78 W	8 38 28	S 68,5 O	N 91,6 O	19,9 »	»	5,1 »
N 57 W	8 43 27	S 64,1 O	N 92,6 O	23,3 »	»	1,7 »
N 42 W	8 45 50	S 62,1 O	N 93,0 O	24,9 »	»	0,1 »
N 31 W	8 48 37	S 60,2 O	N 93,6 O	26,2 »	»	1,2 West
N 8 W	8 51 27	S 59,6 O	N 94,1 O	26,3 »	»	1,3 »
N 8 O	8 53 36	S 57,3 O	N 94,6 O	28,1 »	»	3,1 »
N 33 O	8 56 10	S 56,2 O	N 95,1 O	28,7 »	»	3,7 »
N 51 O	8 58 11	S 55,4 O	N 95,5 O	29,1 »	»	4,1 »
N 74 O	9 0 0	S 54,9 O	N 95,8 O	29,3 »	»	4,3 »

Bemerkung. Sind zwei Steuer-Compasse in einem Nachthause richtig aufgestellt und nicht 3 bis 4 Fuss von einander entfernt, so werden, dem magnetischen Gesetze zufolge, die ungleichnamigen Pole dieser Compassnadeln sich gegenseitig anziehen und die gleichnamigen abstossen. Liegt das Schiff nun nach diesen Compassen, die ihrer geringen Entfernung wegen auf einander einwirken, N oder S an, und befindet sich der anziehende Punkt im Schiffe genau mittschiffs, so werden beide Compasse nahe übereinstimmen; dreht das Schiff sich aber nach Osten, so wird die Nadel des Compasses auf Steuerbordseite mehr als die des Compasses auf Backbordseite abgelenkt, und zwar nach dem Gesetze, dass die magnetischen Anziehungen sich zu einander verhalten, umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen; wenn dagegen das Schiff nahe West anliegt, so muss der backbordsche Compass mehr als der steuerbordsche abgelenkt werden. Es wird also von jedem dieser beiden Compasse die örtliche Ablenkung zu bestimmen und demnächst bei den Cursen in Rechnung zu bringen sein.

III. Von den Englischen Gelehrten Barlow und Airy sind Mittel angegeben, die Ablenkung der Steuer-Compasse an Bord der Schiffe aufzuheben. Der Erstere hat zu diesem Behuf eine eiserne Kreisplatte, um eine messingene Axe drehbar, der Letztere zwei grosse, kraftvolle Magnete, die in der Nähe des Steuer-Compasses auf oder unter dem Deck nach vorgeschriebenen Anweisungen zu befestigen sind, vorgeschlagen.

Barlow's Platte besteht aus zwei gleich grossen eisernen Kreisscheiben von 12 bis 16 Zoll Durchmesser und $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{4}$ Zoll Dicke, welche durch eine Holzscheibe von $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke getrennt und mittelst vier Schrauben von Messing — nahe den Rändern gleichmässig placirt — zusammengeschraubt werden. Sind diese eisernen Platten magnetisch, so müssen sie vor dem Gebrauche so zusammengeschraubt werden, dass ihre ungleichnamigen Pole über einander zu liegen kommen, damit die magnetischen Kräfte derselben sich gegenseitig aufheben. In der Mitte ist diese zusammengesetzte Platte mit einer messingenen Hülse versehen, die genau auf eine 16 Zoll lange messingene Axe passt, auf der sie gedreht, hin und her gerückt und fest geschraubt werden kann. An dem einen Ende dieser Axe befindet sich eine Kreisplatte, durch welche drei Schrauben gehen zum Befestigen der Axe an einem auf Deck winkelrecht stehenden Gegenstande.

Will man nun die Platte zur Beseitigung der Ablenkung des Steuer-Compasses anbringen, so muss diese für alle Striche des Compasses und sonach auch die Anziehungslinie (die Linie durch das Centrum des Steuer-Compasses und den diesen anziehenden Punkt im Schiffe) ermittelt sein, und die Lage der letzteren durch eine Verticallinie an der Aussenseite des Nachthauses bezeichnet werden. In dieser Anziehungslinie wird dann in der Nähe des Nachthauses ein Stab mit einem Schieber daran, vertical auf dem Deck stehend, befestigt, an den Schieber der Fuss der Axe so festgeschraubt, dass diese horizontal und gegen das Nachthaus gekehrt ist, die Platte darauf also eine verticale Lage hat. Die so placirte Barlow'sche Platte wird nun durch Näherbringen oder Entfernen sowohl in Bezug auf das Deck als den Steuer-Compass in eine solche Lage gebracht werden können, dass sie die örtliche Ablenkung dieses Compasses entweder vergrössert oder vermindert, selbstfolglich auch aufhebt.

Die richtige Placirung der Barlow'schen Platte ist sonach nicht leicht; ist dieselbe aber gelungen, so wird diese die Localdeviation des Steuer-Compasses nahe und so lange aufheben, als das im Schiffe befindliche Eisen seine magnetische Kraft unverändert behält; erleidet letztere eine Veränderung, so würde auch die Platte von Neuem zu berichtigen sein. Diese Platte hat fast gar keine Anwendung gefunden.

Die beiden erwähnten Airy'schen Magnete sind etwa 20 bis 24 Zoll lang. Gewöhnlich wird jeder mit Talg gehörig bestrichen und in ein passendes Holzkästchen, aus dünnen Bretterchen zusammengesetzt, eingeschlossen. Zur Placirung dieser Magnete Behufs Beseitigung der Localdeviation des in seinem Nachthause richtig aufgestellten Steuer-Compasses sind auf dem Deck von dem Punkte vertical unter dem Centrum der Windrose dieses Compasses, zwei Linien, die eine genau querschiffs, die andere längsschiffs, zu ziehen, das Schiff demnächst in einer Gegend, die frei von Eisenmassen ist, so festzulegen, dass es magnetisch Nord anliegt — was nach einem guten, am Lande aufgestellten Compasse geschehen kann —; liegt nun das Schiff nach dem Steuer-Compasse nicht genau Nord an, so lege man den einen der gedachten Magnete mit seiner Mitte auf die Längsschiffslinie genau querschiffs vor oder hinter das Nachthaus, rücke ihn in dieser Lage auf dem Deck oder in einiger Entfernung davon, so lange in der Richtung der Längsschiffslinie, bis das

Schiff nach dem Steuer-Compasse auch genau Nord anliegt, und befestige diesen Magnet vorläufig an dieser Stelle. Hiernach lege man das Schiff nach dem Compasse am Lande genau magnetisch-Süd an, so wird es auch nach dem Steuer-Compasse vielleicht genau Süd anliegen, wenn nicht, so verrücke man den Magnet ein wenig, bis dies der Fall ist. Man kann nun diesen Magnet auf dem Deck festschrauben; zweckmässig wird es indess sein, zuvor das Schiff wieder magnetisch Nord anzulegen und nachzusehen, ob es auch nach dem Steuer-Compasse Nord anliegt, was fast immer nahe der Fall und sonach die Localdeviation bei Nord- und Süd-Curs gleich Null zu betrachten sein wird.

Demnächst lege man das Schiff magnetisch Ost; liegt es nun nach dem Steuer-Compasse nicht auch Ost an, so lege man den zweiten Magnet längsschiffs, mit seiner Mitte auf die Querschiffslinie nach Steuer- oder Backbord vom Nachthause, rücke ihn auf dieser Linie oder parallel damit so lange, bis der Curs nach dem Steuer-Compasse Ost ist. Dieser Magnet wird nun vorläufig befestigt, dann das Schiff magnetisch West gelegt und nachgesehen, ob es auch nach dem Steuer-Compasse genau oder nahe West anliegt; wäre letzteres der Fall, so würde der in Rede stehende Magnet noch ein wenig zu rücken sein, bis der Fehler beseitigt ist, und nun erst an seiner Stelle befestigt werden können. Der Sicherheit wegen wird jedoch vor dem Festmachen dieses zweiten Magnets das Schiff wieder magnetisch Ost gelegt, dann soll es nach dem Steuer-Compasse genau oder doch nahe Ost anliegen. Die Localdeviation des Steuer-Compasses ist hiernach gleich Null anzusehen bei Nord-, Süd-, Ost- und West-Curs. Bei den übrigen Cursen muss sie untersucht werden, besonders für die dazwischen liegenden Curse: NW, SO, NO und SW.

Durch das vorhin angeführte Verfahren wird die Ablenkung des Steuer-Compasses nicht bei allen Cursen als aufgehoben zu betrachten sein, weshalb sie nach einer der früher angegebenen Methoden sogleich bestimmt werden sollte.

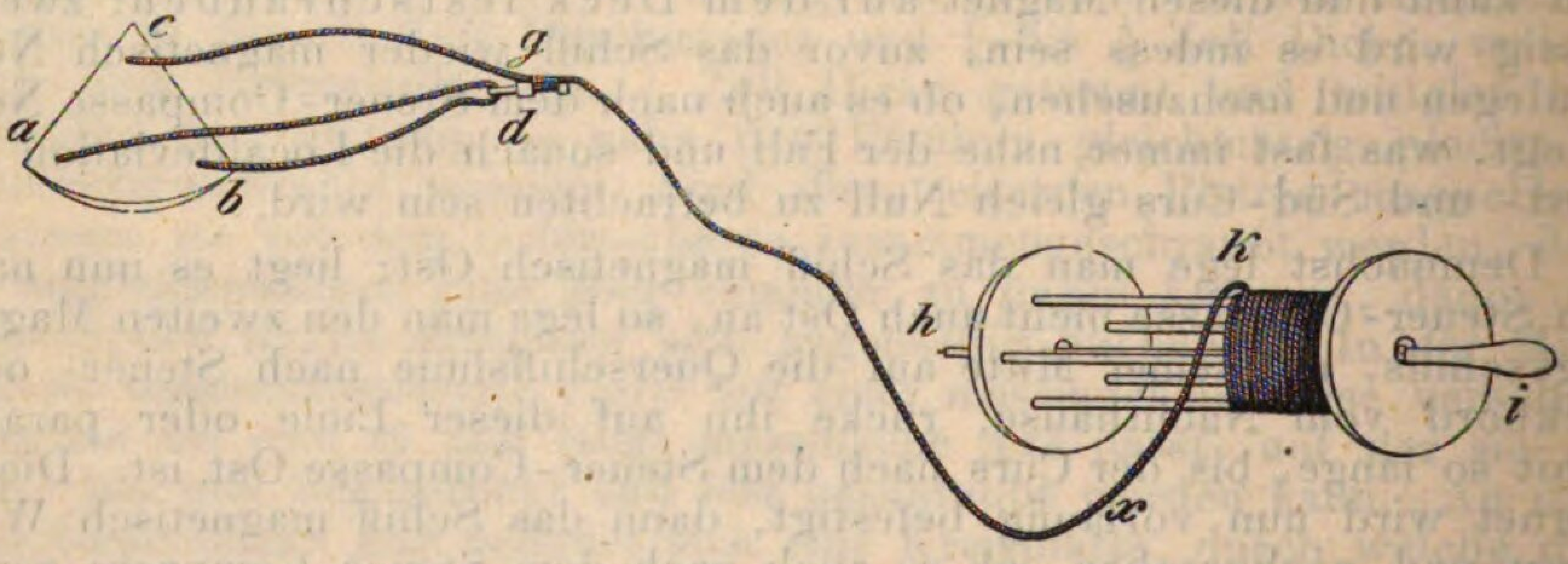
Da das Eisen im Schiffe seine magnetische Kraft durch die ununterbrochene Einwirkung des Erdmagnetismus stets verändert, so dienen Barlow's Platte und Airy's Magnete nur dazu, die Localdeviation des Steuer-Compasses zu verkleinern, nicht aber sie ganz, und am wenigsten für immer aufzuheben. Am besten ist es, auf eisernen Schiffen einen Compass, der als Normal- oder Regel-Compass (Standard-Compass) dienen kann, 3 bis 4 Meter über dem Deck auf dem Roof in der Längsschiffslinie an einem geeigneten Orte fest aufzustellen, von diesem die Ablenkung zu bestimmen — wenn man solche wahrnimmt — und die übrigen an Bord aufgestellten Compasse, wenn sie zum Steuern oder Peilen benutzt werden, damit zu vergleichen, um so die Curse und Peilungen nach diesen auf jenen Normal-Compass übertragen zu können. Vom Schornstein wird dieser Normal-Compass auch 3 bis 4 Meter entfernt gehalten werden müssen. Auf sehr grossen eisernen Schiffen würd die passendste Stelle für diesen Normal-Compass noch weiter vom Deck entfernt, zu suchen sein. Zu hoch darf man aber auch nicht gehen, weil dann die Schwankungen des Schiffes zu nachtheilig auf den Compass einwirken, so dass er bei stürmischem Wetter nicht zur Ruhe kommen würde.

Das Werk von Dr. F. Schaub „über die Deviationen des Compasses, welche durch das Eisen eines Schiffes verursacht werden", 1864 erschienen, wird denjenigen willkommen sein, die sich mit der Theorie dieses Gegenstandes mehr vertraut machen wollen, weshalb hier darauf verwiesen wird.

§. 32.

Das gewöhnliche Logg.

Fig. 14.



Dieses Logg besteht aus dem hölzernen Sector (Kreisausschnitt) *abc* (Fig. 14.), der Rolle *hi* und der mit ihren Enden an diese beiden Gegenstände befestigten Leine, welche letztere von dem Punkte *x* an, der etwa 30 bis 35 Meter von dem Sector entfernt ist, nach *k* zu in gleiche Theile getheilt wird, deren Länge von einem angenommenen Zeitintervall (Zeittheil) abhängig ist. Dieses Zeitintervall ist sehr nahe eine viertel, selten eine halbe Zeitminute, und wird gewöhnlich durch eine Sanduhr (Sandglas, Logglas) bestimmt. Der Erfinder dieses für die Schifffahrt so wichtigen einfachen Instrumentes, welches bisjetzt noch durch kein anderes verdrängt worden ist, scheint nicht bekannt, und die Erfindung selbst nicht früh erfolgt zu sein.

Mit diesem Instrumente wird die Fahrt des Schiffes gemessen. Unter Fahrt des Schiffes ist die Anzahl Seemeilen zu verstehen, welche dasselbe in einer Stunde zurücklegt. Das Messen der Fahrt des Schiffes mit dem Logge wird Loggen genannt, welches an Bord ordentlich gelernt werden muss.

Die Idee, welche diesem Instrumente zum Grunde liegt, ist folgende. Von dem segelnden Schiffe aus wird ein schwimmender Körper, an einer langen dünnen Leine befestigt, über Bord geworfen, und dieser dann als ein im Wasser ruhender Punkt betrachtet. Die Länge der während eines bekannten Zeitraumes ausgelaufenen Leine ist der in diesem Zeitraume zurückgelegte Weg des Schiffes, aus dem durch eine einfache Proportion die Anzahl Seemeilen berechnet werden kann, die das Schiff in der Stunde machen wird, wenn es mit derselben Geschwindigkeit fortsegelt.

Der Sector *abc* ist ein Kreisausschnitt, aus Eichenholz angefertigt, von 0,16 bis 0,24 Meter Radius, 0,007 bis 0,009 Meter Dicke, in dessen Bogen *ab* — der aber einem grösseren Radius angehört — ein Streifen Blei eingelassen wird, der so schwer ist, dass, wenn der Sector im Wasser schwimmt, seine Spitze *c* nur sehr wenig aus dem Wasser hervorragt. Dieser Sector, dessen Winkel $acb = 70^\circ$ bis 90° genommen, wird Loggsector, auch Loggschiff genannt. Das eine Ende der langen dünnen Leine (Loggleine) ist an dem Loggsector in *c*, das andere an der Rolle *hi* (Loggrolle) befestigt. Auf der Loggleine in *g*, etwa 0,16 bis 0,24 Meter von *c* entfernt, ist ein ausgehöhlter, mit seiner Oeffnung dem Loggsector zugekehrter kleiner hölzerner Kegel festgemarlt, in welchen der Stöpsel *d* passt, der wieder an die in *a* und *b* befestigten, unter sich und mit *gc* gleich langen Schnüre *ad* und *bd* angebracht ist. Der Theil *xg* der Loggleine, welcher gewöhnlich der Schiffslänge gleich ist, wird Vorlauf genannt. In *x* ist eine kenntliche

Marke von farbigem oder weissem Wollenzeuge angebracht, und von hier ab nach *k* zu wird die Loggleine in gleiche Theile getheilt, deren Länge von der Anzahl Zeitsecunden abhängig ist, die das zum Logge gehörige Sandglas läuft. Die Endpunkte dieser Theile werden mit Marken bezeichnet, wovon die erste einen, die zweite zwei, die dritte drei Knoten hat u. s. w., bis etwa zu 10 oder 13 Knoten. Dieser Bezeichnung zufolge hat man wahrscheinlich die Entfernung zwischen den Knoten auf der Loggleine Knoten oder Knotenlängen genannt. Die Knotenlänge bestimmt man auf folgende Weise. Da die Seemeile (mittlere Meridianminute) = 5900,9 Fuss Rheinl. = 6076,3 Fuss Engl. = 1852.01 Meter ist, so wird die mittlere Meridiantertie = 1,6391 Fuss Rheinl. = 1.6879 Fuss Engl. = 0,51445 Meter sein. Wenn also ein Schiff in einer Stunde eine Seemeile zurücklegt, so wird es in einer Zeitsecunde eine Meridiantertie zurücklegen müssen, folglich in 14 oder 28 Zeitsecunden, 14 oder 28 Meridiantertien, oder allgemein in z Zeitsecunden z Meridiantertien. Diesemnach beträgt die Entfernung zwischen den Knoten auf der Loggleine so viel Meridiantertien, als das zum Logge benutzte Sandglas Zeitsecunden läuft. Deshalb ist zu einem 14 Secundenglase die Knotenlänge = 22.9 Fuss Rheinl. = 23.6 Fuss Engl. = 7.202 Meter. und zu einem 28 Secundenglase = 45.9 Fuss Rheinl. = 47,3 Fuss Engl. = 14.405 Meter. Wenn nun ein Schiff in 14 Zeitsecunden y Mal 23,6 Fuss Engl. oder was dasselbe ist, y Knoten macht, so wird es in einer Stunde y Seemeilen machen, vorausgesetzt, dass es mit unveränderter Geschwindigkeit während der ganzen Stunde segelt. Man giebt daher die Fahrt des Schiffes gewöhnlich in Knoten an, denn so misst man dieselbe.

Mit dem so eingerichteten Logge wird von dem hintern Theil des Schiffes aus an der Leeseite geloggt. Drei Mann scheinen dazu erforderlich zu sein, — zwei und zur Noth auch ein Mann ist ausreichend — wovon der eine die Rolle *hi* in horizontaler Lage und der andere das Sandglas hält, der dritte dagegen den Loggsector, nachdem er den Stöpsel *d* in den hohlen Kegel *g* nicht zu fest gesteckt hat, über Bord wirft, und die Loggleine lose zwischen den Fingern durchgleiten lässt. In dem Augenblicke, da diesem nun die kenntliche (im Punkt *x* angebrachte) Marke durch die Hand schlüpft, ruft er: „Torn", auf welchen Ruf der andere das Sandglas kehrt, dieses stets beobachtet, und wenn es eben ausläuft, „Stopp" ruft. Auf dieses Zeichen hält der dritte die Leine augenblicklich fest und liest die ausgelaufenen Knotenlängen nebst deren Decimaltheilen ab, und zwar die letztern nach Schätzung. Das Schiff wird nun nach Verlauf einer Stunde so viel Seemeilen gemacht haben, als Knotenlängen ausgelaufen sind, wenn seine Geschwindigkeit dieselbe geblieben ist. Durch das plötzliche Festhalten der Loggleine auf den Ruf „Stopp" erfolgt in *g* ein Ruck, der den Stöpsel *d* aus dem hohlen Kegel bei *g* bringt, in Folge dessen der Loggsector flach auf dem Wasser schwimmt, und somit beim Einziehen der Loggleine den geringsten Widerstand leistet.

Das Loggen, wie eben angegeben, beruht auf der Voraussetzung, dass der Loggsector seinen Ort im Wasser nicht verändert. Dies ist jedoch nicht ganz richtig. Der über Bord geworfene Loggsector wird zwar vermittelst seines Bleigewichtes aufrecht schwimmen und dem Zuge, den die Loggleine durch ihre eigene Schwere und die Reibung der Rolle auf ihn ausübt, die grösste Fläche entgegensetzen, aber dennoch nicht als ein ruhender Punkt betrachtet werden können, weil er, wenn auch nur wenig, doch immer etwas dem Segelschiffe nachgezogen wird. Dies nennt man das Mitschleppen des Loggsectors, und nimmt es jetzt zu $\frac{1}{20}$ der Knotenlänge auf Segelschiffen an. Unter Berücksichtigung dieses Mitschleppens des Loggsectors wird die Knotenlänge

zu einem 14 Secundenglase $= 7{,}202 - \frac{7{,}202}{20} = 6{,}842$ Meter,

$= 22{,}9 - \frac{22{,}9}{20} = 21{,}8$ Fuss Rheinl.,

$= 23{,}6 - \frac{23{,}6}{20} = 22{,}45$ Fuss Engl.

Auf Dampfschiffen wird für's Mitschleppen des Loggsectors die Knotenlänge nicht zu verkürzen sein; eine Verlängerung der letztern auf Raddampfschiffen dürfte eher zu machen sein, sie muss aber erst ermittelt werden, was durch Versuche geschehen kann.

Den Vorlauf der Loggleine nimmt man deshalb so gross, — nämlich auf grossen Schiffen gleich der Schiffslänge, auf kleinen etwas mehr, bis zu 1½ Schiffslängen — damit der Loggsector aus dem Bereiche des sogenannten Sog's ist, wenn das eigentliche Loggen beginnt. Alle Fehler, die man beim Loggen begeht, werden, wenn das Logg zum 14 Secundenglase eingerichtet ist, in die dadurch bestimmte Fahrt des Schiffes (stündliche Distanz) 257 Mal vergrössert übergehen. Diese Fahrt des Schiffes ist nur die durch's Wasser, nicht die über den Grund.

Früher hat man angenommen, dass das Rufen der Signale „Torn" und „Stopp" eine Zeitsecunde wegnehme, und deshalb die Knotenlänge zu einem 14 Secundenglase für ein 15 Secundenglas berechnet, weshalb das 14 Secundenglas auch viertel Minutenglas, und das 29 Secundenglas halbe Minutenglas genannt wurde. Man verkürzte zugleich die Knotenlänge um ein Dreissigstel derselben, damit das Besteck (Schiffsort nach Compass und Logg ermittelt) dem Schiffe voraus sein sollte.

Berichtigung der mit einem Logge bestimmten Fahrt des Schiffes, dessen Knotenlänge und Sandglas beide eine Veränderung erlitten haben.

Da die Loggleine abwechselnd nass und trocken wird, so kann eine Veränderung ihrer Knotenlängen nicht ausbleiben, weshalb diese Knotenlängen entweder öfters berichtigt, oder deren Abweichungen in Rechnung gebracht werden müssen. Die an Bord sich entwickelnde Feuchtigkeit wird ebenfalls nicht ohne Einfluss auf das Sandglas bleiben, deshalb wird dieses von Zeit zu Zeit mit einer Uhr, die Secunden zeigt, zu vergleichen sein. Ergiebt sich hierbei, dass das Glas mehr oder weniger Secunden läuft, als es eigentlich laufen sollte, so ist die Knotenlänge der Leine danach zu ändern, oder wenn man dies nicht will, die Abweichung des Sandglases in Rechnung zu bringen. Wie man diese Abweichungen des Sandglases sowohl als der Knotenlänge in Rechnung bringt, wird an einem Beispiele am besten gezeigt werden können.

Beispiel 1. Es sei mit dem Logge, dessen Knotenlänge 20 Fuss Engl. ist, während das dabei gebrauchte Sandglas 16 Secunden läuft, 8,4 Knoten geloggt; was wird die richtige Fahrt des Schiffes sein?

Zur Auflösung dieser Aufgabe ist die Aufstellung zweier Proportionen erforderlich, wobei man zu erwägen hat, ob das Gesuchte grösser oder kleiner als das Gegebene wird. Dies ist nicht schwer zu ermitteln. Die Knotenlänge ist 20 Fuss Engl., und soll 22,5 Fuss Engl. sein, folglich ist das Geloggte zu gross, weshalb die Proportion gestellt werden muss:

$$22{,}5 : 20 = 8{,}4 : w.$$

Ferner läuft das Sandglas 16 Secunden und soll nur 14 Secunden laufen, deshalb wird das Geloggte auch hier zu gross sein, und die betreffende Proportion muss demnach angesetzt werden:

$$16 : 14 = w : y,$$

worin y die richtige Fahrt des Schiffes vorstellt und $= 6{,}5$ Knoten wird.

Man kann diese Aufgabe auch lösen, wenn man erst die Knotenlänge für das gebrauchte 16 Secundenglas berechnet, welche

$$= \left(1{,}6879 - \frac{1.6879}{20}\right) \cdot 16 = 1.6035 \cdot 16 = 25{,}66 \text{ Fuss Engl. ist,}$$

und dann setzt:

die richtige Knotenlänge verhält sich zur fehlerhaften Knotenlänge, wie die geloggte Fahrt zur richtigen, also

$$25.66 : 20 = 8.4 : y, \text{ giebt } y = 6.5.$$

Beispiel 2. Ist die Knotenlänge 7 Meter, läuft das Glas 13 Secunden und sind 7.3 Knoten geloggt, so hat man zu setzen, um die richtige Fahrt y zu erhalten:

6.84 Meter : 7 Meter = 7.3 Knoten : w und
13 Secunden : 14 Secunden = 20 » : y,

wonach $y = 8.04$ Knoten wird, das Schiff mithin 8.04 Seemeilen stündlich macht.

Man kann auch so rechnen:

$\left(0{,}51445 - \frac{0.51445}{20}\right) \times 13 = 6{,}35$ Meter die Knotenlänge zum 13 Secundenglase, also

$$6{,}35 : 7 = 7.3 : y \text{ setzen, giebt } y = 8.04 \text{ Knoten.}$$

Bemerkung. Zur Loggleine benutzt man ungetheerte, aus feinem Hanf verfertigte Leinen von etwa 6 Garn. Bevor eine solche neue Leine zur Loggleine eingerichtet wird, muss man sie gehörig ausrecken und ausdrehen, damit sie das Krappe verliert und später keine Kinken wirft. Zu diesem Behuf ist es am zweckmässigsten, die Leine, das eine Ende derselben mit einem Dreher versehen, das andere an Bord befestigt, an ersterem über Bord laufen und etwa eine Stunde hinter dem segelnden Schiffe, wenn dasselbe eine mässige Fahrt macht, schwimmen zu lassen. Wenn sie demnächst eingeholt und getrocknet ist, können die Knotenlängen darauf abgemessen werden. Dieses Verfahren wird dem Kochen dieser Leinen in Aschlauge vorzuziehen sein.

§. 33.

Das Regelings-Logg.

Das Regelings-Logg ist eine Vorrichtung, auf der Regeling angebracht, welche darin besteht, dass man auf letzterer eine Anzahl Meridiantertien, jedoch nicht unter 16 (die Meridiantertie = 0.51445 Meter = 1,6879 Fuss Engl. = 20¼ Zoll Engl.) abmisst, und die Endpunkte dieser Strecke durch kenntliche Marken bezeichnet. Wie man nun vermittelst dieser Vorrichtung die Fahrt des Schiffes bestimmen kann, wird aus Folgendem hervorgehen. — Wenn ein Schiff in einer Stunde eine Seemeile macht, so wird es in einer Zeitsecunde eine Meridiantertie machen. Ferner, wenn es in einer Zeitsecunde x Meridiantertien durchläuft, so wird es in einer Stunde x Seemeilen durchlaufen, und wenn es in z Zeitsecunden eine Meridiantertie zurücklegt, so wird es in einer Stunde $\frac{1}{z}$ Seemeile zurücklegen; folglich wird es, wenn es in z Zeitsecunden x Meridiantertien macht, in einer Stunde $\frac{x}{z}$ Seemeilen machen. Es kommt also darauf an, die Anzahl Zeitsecunden zu bestimmen, welche das Schiff gebraucht, um die Anzahl der auf der Regeling abgemessenen Meridian-

tertien zurückzulegen. Die Anzahl dieser Zeitsecunden wird auf folgende Weise erhalten: Man stellt sich mit einer Uhr, welche Secunden zeigt, an die dem Hintertheil des Schiffes zunächst gelegene Marke des Regelings-Logges, beordert Jemanden, mit einem kleinen schwimmenden Gegenstande versehen, nach der vorderen Marke der bezeichneten Vorrichtung, um diesen von hier aus nach dem Buge des Schiffes zu über Bord zu werfen und „Null" zu rufen, wenn dieser Gegenstand die vordere Marke passirt, von welchem Augenblicke an man die Secunden zählt, welche dieser schwimmende Gegenstand gebraucht, bis er der hinteren Marke gerade gegenüber angelangt ist. Mit dieser Anzahl Zeitsecunden in die Anzahl der abgemessenen Meridiantertien dividirt, ergiebt einen Quotienten, der die Fahrt des Schiffes angiebt.

Während das Loggen mit dem gewöhnlichen Logge immer an der Leeseite des Schiffes ausgeführt wird, kann das Loggen mit dem Regelings-Logg lee- und luvwärts bewirkt werden, nur muss der über Bord zu werfende schwimmende Gegenstand, wenn er in Lee über Bord geworfen wird, ziemlich weit vom Schiffe ab in's Wasser fallen, weil er sonst leicht an die Seitenplanken der Leeseite des Schiffes treiben kann, und dann von diesen mit fortgerissen werden würde, wodurch das hier zu ermittelnde Zeitintervall stets zu gross gefunden werden müsste. Um nun das Regelings-Logg auf beiden Seiten des Schiffes anwenden zu können, muss sowohl auf der steuerbordschen als backbordschen Regeling eine Vorrichtung der beschriebenen Art angebracht sein.

Bei hohem Seegange, wenn die Fahrt des Schiffes kleiner als 4 Knoten ist, und die auf der Regeling abgemessenen Meridiantertien nicht über 30 sind, oder bei ruhiger See und geringer Fahrt, ist es zweckmässiger, die Fahrt des Schiffes nach dem Regelings-Logg, als nach dem gewöhnlichen Logg zu bestimmen.

Bevor man loggt, sei es mit dem gewöhnlichen oder Regelings-Logg, hat man darauf zu sehen, dass das Schiff, wenn Curs gesteuert wird, richtig anliegt, und wenn beim Winde steuernd, dass die Segel nicht los und nicht zu voll sind.

Beispiel. Auf der Regeling seien 30 Meridiantertien = 1,668 Fuss Engl. × 30 = 50,6 Fuss Engl. abgemessen und gefunden, dass das Schiff 7 Zeitsecunden braucht, um diese Strecke zu durchlaufen, so ist die Fahrt des Schiffes = 30 : 7 = 4,3 Seemeilen stündlich.

§. 34.

Das Grundlogg.

Dieses Logg besteht aus einem Lothe und einer Leine. Zu ersterem wird ein leichtes Handloth und zu letzterer eine gute, nicht zu dünne Leine zu gebrauchen sein. Die Abmessung der Leine zum Grundlogg geschieht dergestalt, dass man von dem Ende, an welchem das Loth befestigt wird, einen Vorlauf von etwa 100 Fuss abmisst, und an dieser Stelle ein auch bei Nacht durch das Gefühl in der Hand, wenn die Leine durch diese gleitet, zu erkennendes Torn-Zeichen durch die Leine steckt, von welchem an, die Knoten = 1,6391 Fuss Rheinl. × der Anzahl Secunden, welche das Loggglas läuft, oder = 1,6879 Fuss Engl. × dieser Anzahl Secunden, oder = 0,51445 Meter × dieser Anzahl Secunden, also für ein 14 Secundenglas = 22,9 Fuss Rheinl. = 23,6 Fuss Engl. = 7,2 Meter abgemessen werden.

Das Loggen mit dem Grundlogg wird ganz ähnlich wie mit dem gewöhnlichen Logg (§. 32.) bewerkstelligt, hat aber den Nachtheil gegen dieses, dass es nur anzuwenden ist, wenn man auf flachem, vielleicht

höchstens 5 Faden tiefem Wasser segelt, und erfordert ausserdem etwas mehr Kraft beim Einholen als das andere; es hat aber gegen das gewöhnliche Logg den grossen Vortheil, dass es nicht, wie dieses, die Fahrt des Schiffes durch's Wasser, sondern über den Grund angiebt, und dass die Peilung der Grundloggleine, entgegengesetzt genommen, die Richtung giebt, in welcher das Schiff während des Loggens über den Grund geht, wogegen die Peilung der gewöhnlichen Loggleine, entgegengesetzt genommen, die Richtung giebt, in welcher das Schiff während des Loggens durch's Wasser gegangen ist.

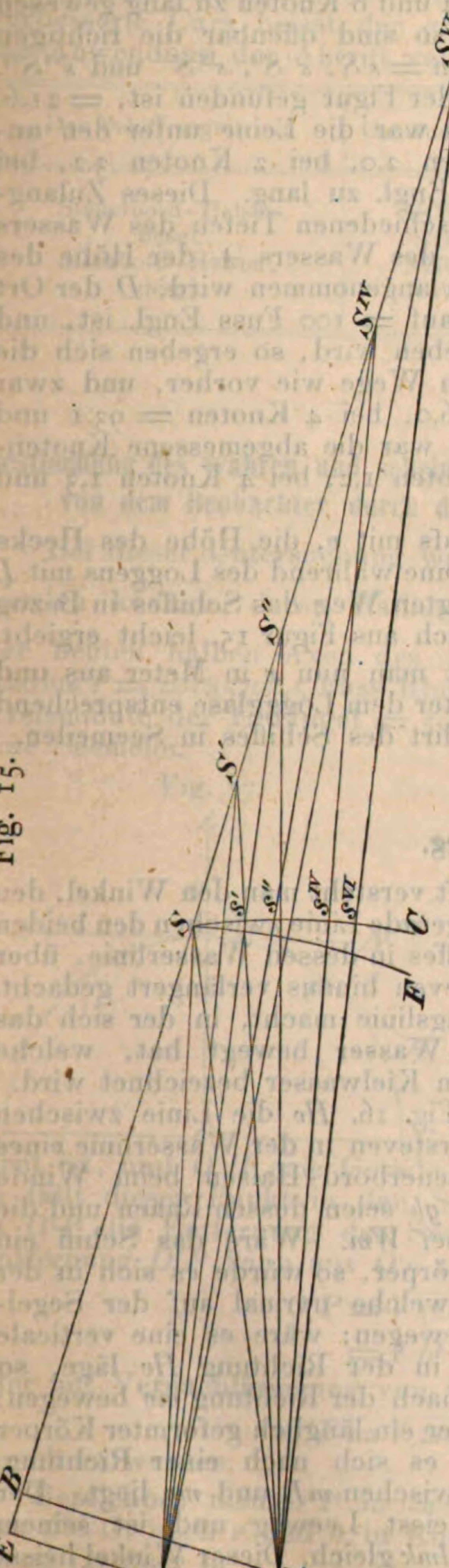


Fig. 15.

Die Richtigkeit des in diesem Paragraphen Gesagten ergiebt sich theils aus §. 32., wie auch daraus, dass das Loth der Grundloggleine auf dem Meeresgrunde festliegend angenommen werden kann, während der Loggsector durch etwa stattfindende Strömung seinen Ort über dem Meeresgrunde verändert. Von der Knotenlänge des Grundlogges ist daher auch nichts von ihrer ganzen Länge für das Mitschleppen abzuziehen, wogegen von dieser Länge dafür, dass während des Loggens die Grundloggleine nicht dieselbe Richtung gegen den Grund behält, die sie hatte, als das Glas gekehrt wurde, von jeder Knotenlänge eigentlich ein Abzug gemacht werden sollte, der indessen nicht für jede Knotenlänge derselben Leine gleich, sondern bei dem ersten Knoten am grössten, und bei den weiter vom Vorlauf entfernten Knoten fortschreitend abnehmend ist. Diese Abnahme der von der Knotenlänge abzuziehenden Grösse hängt aber nicht allein von der grösseren Anzahl der Knoten, sondern auch von der Tiefe des Wassers, auf welchem man loggt, wie auch von der Höhe des Schiffes über dem Wasser ab, wie sich leicht aus folgender Betrachtung ergeben wird.

Es sei nämlich in Fig. 15. ES^{VI} die Linie, in welcher das Heck eines Schiffes sich während des Loggens vorwärts bewegt hat, $AB =$ der Tiefe des Wassers ($=$ 6 Faden) $+$ der Höhe des Hecks über demselben (1 Faden) $= 7$ Faden, A die Stelle, an welcher das Loth des Grundloggs am Grunde liegt, und $AS =$ dem Vorlauf $=$ 100 Fuss Engl., $SS'' = 2$, $SS^{IV} = 4$ und $SS^{VI} = 6$ Knotenlängen, so würde das Loggen mit diesem Logge auch die richtige Fahrt des Schiffes angeben, wenn das Tornzeichen, welches sich in S befand, als das Glas gekehrt

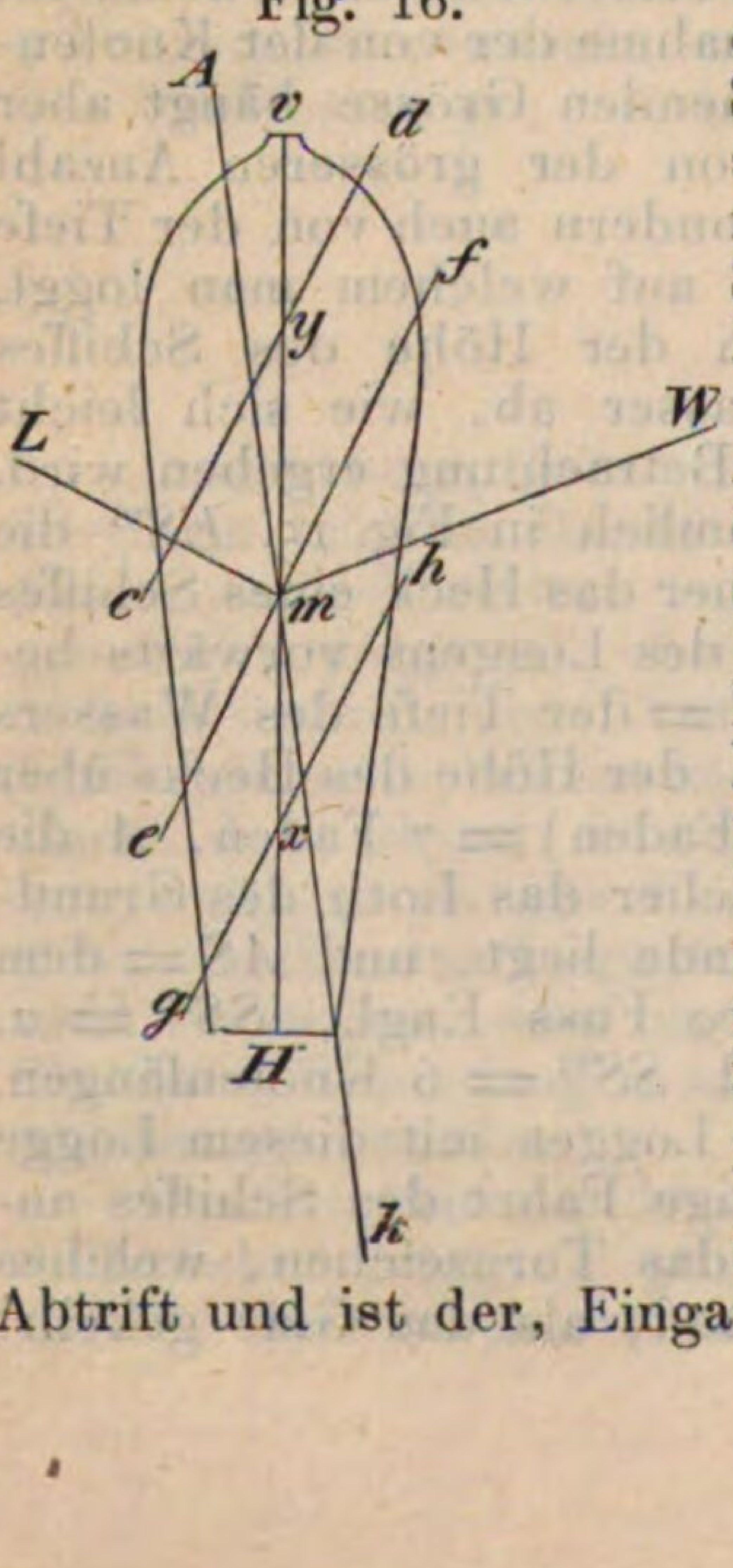
wurde, dieselbe Stelle behalten hätte, und die Leine von dem Punkte bis zum Schiffe eine gerade Linie bildete, welches indessen, wie man leicht einsieht, nicht der Fall ist. Die Leine hat vielmehr bei einem Knoten Fahrt die Richtung AS', bei 2 Knoten AS'', bei 4 Knoten AS^{IV} und bei 6 Knoten die Richtung AS^{VI} angenommen. Beschreibt man ferner, um zu bestimmen, wieviel die Leine bei 1, 2, 4 und 6 Knoten zu lang gewesen ist, aus A mit AS den Kreisbogen SC, so sind offenbar die richtigen Längen der Leine für 1, 2, 4 und 6 Knoten $= s'S'$, $s''S''$, $s^{IV}S^{IV}$ und $s^{VI}S^{VI}$, welche Grössen, wie durch Messung aus der Figur gefunden ist, = 21,6, 44,0, 89,4, 136,0 Fuss Engl. sind. Mithin war die Leine unter den angenommenen Umständen bei einem Knoten 2,0, bei 2 Knoten 3,2, bei 4 Knoten 5,0 und bei 6 Knoten 5,6 Fuss Engl. zu lang. Dieses Zulangsein der Loggleine bleibt indessen bei verschiedenen Tiefen des Wassers nicht gleich; denn wenn DE = der Tiefe des Wassers + der Höhe des Hecks = 3 Faden + 1 Faden = 4 Faden angenommen wird, D der Ort des Lothes am Grunde, DS = dem Vorlauf = 100 Fuss Engl. ist, und von D mit DS der Kreisbogen SF beschrieben wird, so ergeben sich die richtigen Längen der Leine auf ähnlichem Wege wie vorher, und zwar bei 1 Knoten = 22,6, bei 2 Knoten = 46,0, bei 4 Knoten = 93,1 und bei 6 Knoten = 140,0 Fuss Engl., mithin war die abgemessene Knotenlänge bei einem Knoten nur 1,0, bei 2 Knoten 1,2, bei 4 Knoten 1,3 und bei 6 Knoten = 1,6 Fuss Engl. zu lang.

Bezeichnet man die Länge des Vorlaufs mit v, die Höhe des Hecks über dem Grunde mit h, die ausgelaufene Leine während des Loggens mit L und den dieser entsprechenden zurückgelegten Weg des Schiffes in Bezug auf den Meeresboden mit x, so ist, wie sich aus Figur 15. leicht ergiebt, $x = \sqrt{(v + L)^2 - h^2} - \sqrt{v^2 - h^2}$. Drückt man nun x in Meter aus und dividirt diese durch die Knotenlänge in Meter dem Loggglase entsprechend genommen, so hat man die stündliche Fahrt des Schiffes in Seemeilen.

§. 35.

Abtrift, Leeweg.

Fig. 16.



Unter Abtrift versteht man den Winkel, den die horizontale gerade Linie zwischen den beiden Steven des Schiffes in dessen Wasserlinie, über seinen Achtersteven hinaus verlängert gedacht, mit der Richtungslinie macht, in der sich das Schiff durch's Wasser bewegt hat, welche letztere von dem Kielwasser bezeichnet wird.

Es sei in Fig. 16. Hv die Linie zwischen Achter- und Vorsteven in der Wasserlinie eines Schiffes mit Steuerbord-Halsen beim Winde segelnd, cd, ef, gh seien dessen Raaen und die Windrichtung sei Wm. Wäre das Schiff ein kugelförmiger Körper, so würde es sich in der Richtung mL, welche normal auf der Segelfläche steht, bewegen; wäre es eine verticale Ebene, welche in der Richtung Hv läge, so würde es sich nach der Richtung mv bewegen: da das Schiff aber ein länglich geformter Körper ist, so bewegt es sich nach einer Richtung, etwa mA, die zwischen mL und mv liegt. Der Winkel Amv heisst Leeweg und ist seinem Scheitelwinkel Hmk gleich. Dieser Winkel heisst Abtrift und ist der, Eingangs dieses Paragraphen bezeichnete.

Die Abtrift wird von dem Achterdeck des Schiffes aus durch Peilung der Richtung des Kielwassers auf viertel Striche genau bestimmt. Diese Bestimmungsart ist auch genügend, wenn man sich die dazu erforderliche Geschicklichkeit durch Uebung angeeignet hat.

Was die Anwendung der Abtrift anbelangt, so ist sie stets auf den gesteuerten Curs nach der Leeseite hin anzubringen. Der für Abtrift verbesserte Curs heisst der gesegelte. Die folgenden Beispiele werden die Anwendung der Abtrift veranschaulichen.

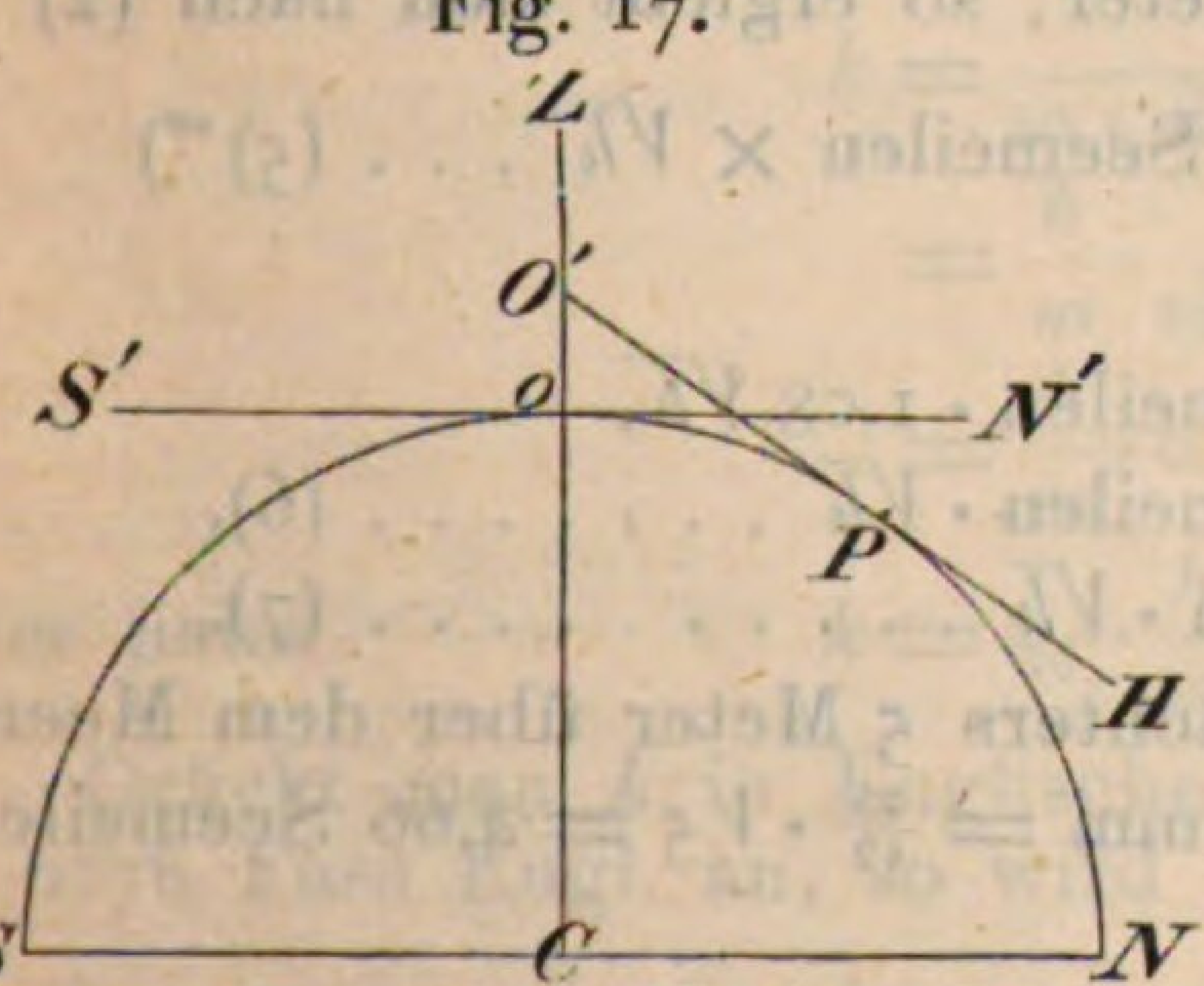
Das Schiff segelt mit	Gesteuerter Curs.	Abtrift.	Gesegelter Curs.
Steuerbord-Halsen,	SSW $\frac{3}{4}$ W.	$1\frac{1}{4}$ Strich.	S z W $\frac{1}{2}$ W.
desgl.	SO $\frac{1}{2}$ O.	2 "	OSO $\frac{1}{2}$ O.
Backbord-Halsen,	NNO $\frac{1}{4}$ O.	$1\frac{3}{4}$ "	NO.
desgl.	NW $\frac{1}{2}$ N.	$1\frac{1}{2}$ "	NNW.

§. 36.

Bestimmung des wahren und scheinbaren Abstandes des Seehorizonts (der Kimm) von dem Beobachter durch dessen Augeshöhe über der Meeresfläche.

Bei dieser Untersuchung wird die Erde wieder als Kugel angesehen werden können, deren Radius $r = \frac{a+b}{2}$ (dem arithmetischen Mittel der beiden halben Axen des Erdsphäroids) ist. Nach §. 8. ist dieser Radius $r = 20285700{,}5$ Fuss Rheinl. $= 6366738{,}06$ Meter, also die grösste Kreisminute der Erdkugel $= 5900{,}87$ Fuss Rheinl. $= 1852{,}01$ Meter, d. i. eine Seemeile.

Fig. 17.



In Fig. 17. sei SoN ein grösster Halbkreis der als Kugel angenommenen Erde, C sei ihr Centrum, und o ein Punkt auf der Oberfläche des Meeres, so ist CZ die Richtung der Schwere dieses Punktes, Z dessen Zenith und $SoNC$ eine Verticalebene desselben. Zieht man in dieser Ebene auf CZ in C und o die Normalen SN und $S'N'$, so fallen diese in den wahren und scheinbaren Horizont des Ortes o. In O' sei ein Beobachter, der um $oO' = h$ von der Meeresfläche entfernt ist, und $O'H$ eine Gerade, welche die Meeresfläche in P berührt, so fällt dieser Punkt in den Seehorizont des Beobachters O', folglich ist $O'P$ die Entfernung des Seehorizontes von dem Beobachter. Diese Entfernung $O'P$ kann aus $O'o$ und oC nach der Gleichung

$$O'P = \sqrt{(O'o + 2 \cdot oC)\, O'o}$$

$$= \sqrt{h^2 + 2rh},$$

oder mit Vernachlässigung von h^2

$$O'P = \sqrt{2rh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

berechnet werden.

Bezeichnet man $O'P$ in Seemeilen ausgedrückt mit k, und behält man die Grössen r und h in Rheinländischen Fussen bei, so geht Gleichung (1) über in

$$k = \frac{\sqrt{2rh}}{5900{,}87} = \frac{\sqrt{2r}}{5900{,}87} \cdot \sqrt{h} = 1{,}07943 \text{ Seemeilen} \cdot \sqrt{h} \quad . \; . \; . \; . \quad (2).^{*})$$

Nach Gleichung (2) wird man also bequem den Abstand des Seehorizontes vom Beobachter in Seemeilen berechnen können, wenn die Höhe des Beobachters über der Meeresfläche in Rheinländischen Fussen gegeben ist. Hierbei ist aber keine Rücksicht auf die irdische Refraction genommen. Diese vergrössert den Abstand k um kn, worin n ein Coefficient ist, mit dem die irdische Refraction bestimmt werden kann, und welchen Delambre im Mittel aus mehreren Beobachtungen $= 0{,}08$ gefunden hat.

Der um kn vergrösserte Abstand k wird der scheinbare genannt und hier mit k' bezeichnet.

Man hat also

$$k' = k + nk = (1 + n)\,k = 1{,}08\,k = 1{,}07943 \text{ Seemeilen} \cdot 1{,}08\,\sqrt{h},$$

d. i. $$k' = 1{,}1658 \text{ Seemeilen} \cdot \sqrt{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

oder ohne einen erheblichen Fehler zu begehen

$$k' = \tfrac{7}{6}\sqrt{h} \quad . \; . \quad (4).$$

Der scheinbare Abstand des Seehorizontes von dem Beobachter wird also nach Gleichung (4) in Seemeilen gefunden, wenn man die Höhe des Beobachters über der Meeresfläche in Rheinländischen Fussen ausdrückt, aus dieser die Quadratwurzel zieht, und letztere mit $\frac{7}{6}$ multiplicirt.

Beispiel 1. Das Auge des Beobachters sei 15 Fuss Rheinländisch über der Meeresfläche, wie gross ist der scheinbare Abstand desselben von seinem Seehorizonte?

Dieser wird $= \frac{7}{6}\sqrt{15} = 4{,}55$ Seemeilen.

Nach Formel (3) ist die nautische Tafel V in den ersten 5 Auflagen berechnet.

Bezeichnet r auch den Erdradius in Meter ausgedrückt, h die Höhe des Gegenstandes über dem Meere in Meter, so ergiebt sich nach (2)

$$k = \frac{\sqrt{2r}}{1852{,}01} \cdot \sqrt{h} = 1{,}92677 \text{ Seemeilen} \times \sqrt{h} \quad . \; . \; . \quad (5)^{**})$$

Ferner wird diesemnach

$$k' = 1{,}08\,k = 1{,}92677 \text{ Seemeilen} \cdot 1{,}08\,\sqrt{h},$$

d. i. $$k' = 2{,}08091 \text{ Seemeilen} \cdot \sqrt{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

$$= \tfrac{25}{12} \text{ Seemeilen} \cdot \sqrt{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Beispiel 2. Ist das Auge des Beobachters 5 Meter über dem Meere, so ist nach (7) sein Abstand von der Kimm $= \frac{25}{12} \cdot \sqrt{5} = 4{,}66$ Seemeilen.

*)

$$\begin{aligned}
\lg 2 &= 0{,}301030 \\
\lg r &= \underline{7{,}307190} \\
& \; 7{,}608220 \\
\lg \sqrt{2r} &= 3{,}804110 \\
\lg 5900{,}87 &= \underline{3{,}770917} \\
& \; 0{,}033193 \\
\frac{\sqrt{2r}}{5900{,}87} &= 1{,}07943.
\end{aligned}$$

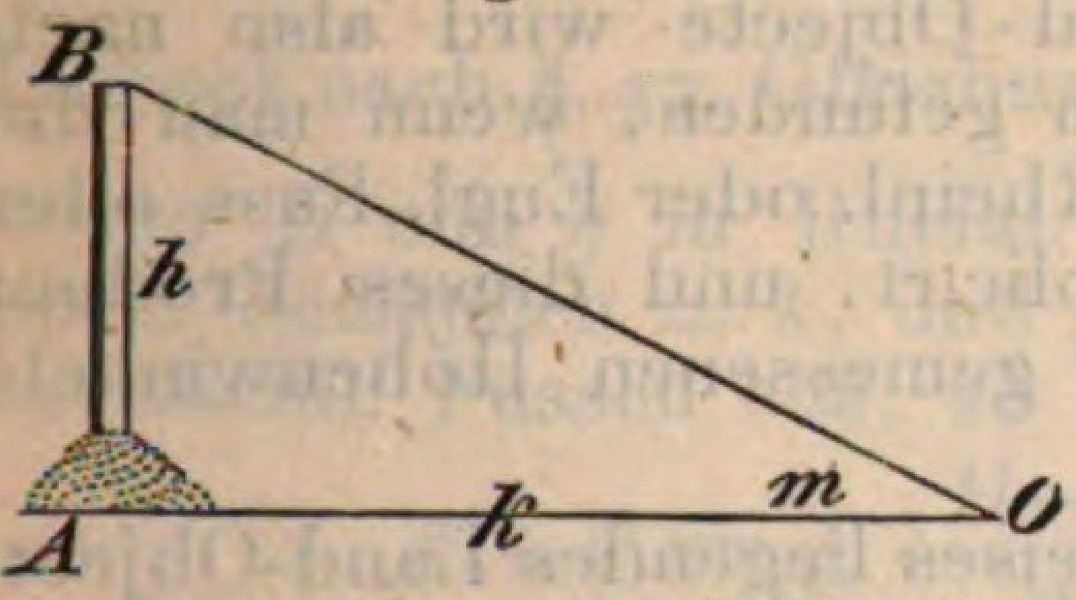
**)

$$\begin{aligned}
\lg 2 &= 0{,}301030 \\
\lg r &= \underline{6{,}803917} \\
& \; \underline{7{,}104947} \\
\lg \sqrt{2r} &= 3{,}552473 \\
\lg 1852{,}01 &= \underline{3{,}267643} \\
1{,}92677 \; \lg &= 0{,}284830
\end{aligned}$$

§. 37.

Den Abstand des Beobachters auf dem Meere von einem innerhalb des Gesichtskreises liegenden Land-Objecte, dessen Höhe über der Meeresfläche bekannt ist, durch Beobachtung seines Höhenwinkels zu bestimmen.

Fig. 81.



Es sei in Fig. 18. AO eine die Oberfläche des Meeres in A berührende gerade Linie, $AB = h$ die Höhe des Land-Objectes über der Meeresfläche, in O der Beobachter, der den Höhenwinkel dieses Objectes $AOB = m$ Minuten misst, so wird das Dreieck AOB ein ebenes, bei A rechtwinkliges sein, wenn A in der Kimm von O liegt; so lange indessen AB sehr klein im Vergleich mit AO ist, wird man immer ohne erheblichen Fehler das gedachte Dreieck bei A rechtwinklig annehmen, und in beiden Fällen den Abstand des Beobachters von dem Objecte

nach der Gleichung $AO = \frac{h}{\text{tang}\, m}$ (1)

berechnen können.

Da nun in der Praxis m in Minuten fast immer kleiner als 100 Minuten sein wird, so kann man, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, $\text{tang}\, m = \sin m = m \cdot \sin 1'$ setzen, und wenn man dies in (1) thut, so hat man:

$$AO = \frac{h}{m \cdot \sin 1'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Bezeichnet man den Abstand in Seemeilen ausgedrückt mit k, und behält die Höhe des Objectes in Rheinländischen Fussen mit h bezeichnet bei, so geht Gleichung (2) über in

$$k = \frac{h}{m \cdot \sin 1' \cdot 5900{,}9},$$

$$= \frac{h}{m} \cdot \frac{1}{\sin 1' \cdot 5900{,}9} \text{ *)},$$

$$= \frac{h}{m} \cdot 0{,}5826 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

oder nahe $k = \frac{7}{12} \cdot \frac{h}{m}$ (4).

Drückt man h in Englischen Fussen aus und nimmt die Seemeile $= 6076$ Fuss Engl. an, so wird

$$k = \frac{h}{m \cdot \sin 1' \cdot 6076},$$

$$= \frac{h}{m} \cdot \frac{1}{\sin 1' \cdot 6076},$$

$$= \frac{h}{m} \cdot 0{,}5658,$$

oder auch nahe $k = \frac{4}{7} \cdot \frac{h}{m}$ (5).

*)
$$\begin{aligned} \lg \sin 1' &= 6{,}463726 - 10 \\ 5900{,}9 \lg &= 3{,}770918 \\ & 0{,}234644 \\ 0{,}5826 \lg &= 9{,}765356 - 10. \end{aligned}$$

Wenn h in Meter ausgedrückt ist, so wird in Seemeilen

$$k = \frac{h}{m} \cdot \frac{1}{1852{,}01 \cdot \sin 1'},$$

$$= \frac{h}{m} \cdot 1{,}85623 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),^{*)}$$

oder nahe
$$= \tfrac{13}{7} \cdot \frac{h}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Der Abstand des Beobachters vom Land-Objecte wird also nach den Gleichungen (4), (5) und (7) in Seemeilen gefunden, wenn man die Höhe des Objectes über der Meeresfläche in Rheinl. oder Engl. Fuss oder Meter angegeben, mit resp. $\tfrac{7}{12}$, $\tfrac{4}{7}$, $\tfrac{13}{7}$ multiplicirt, und dieses Product durch die Minuten und zehntel Minuten des gemessenen Höhenwinkels desselben Objectes dividirt.

Beispiel 1. Ein innerhalb des Gesichtskreises liegendes Land-Object, dessen Höhe über der Meeresfläche 180 Fuss Engl., und dessen Höhenwinkel vom Schiffe aus 16′ 24″ gemessen ist, wird wie weit von dem Beobachter entfernt sein?

Dieser Abstand ist $= \tfrac{4}{7} \cdot \frac{180}{16{,}4} = 180 : 28{,}7 = 6{,}27$ Seemeilen.

Beispiel 2. Die Höhe eines Thurmes über dem Meere innerhalb des Seehorizontes belegen, sei 40 Meter und dessen Höhenwinkel vom Schiffe aus gemessen 15′ 30″, so steht dieses von jenem ab nach (7)

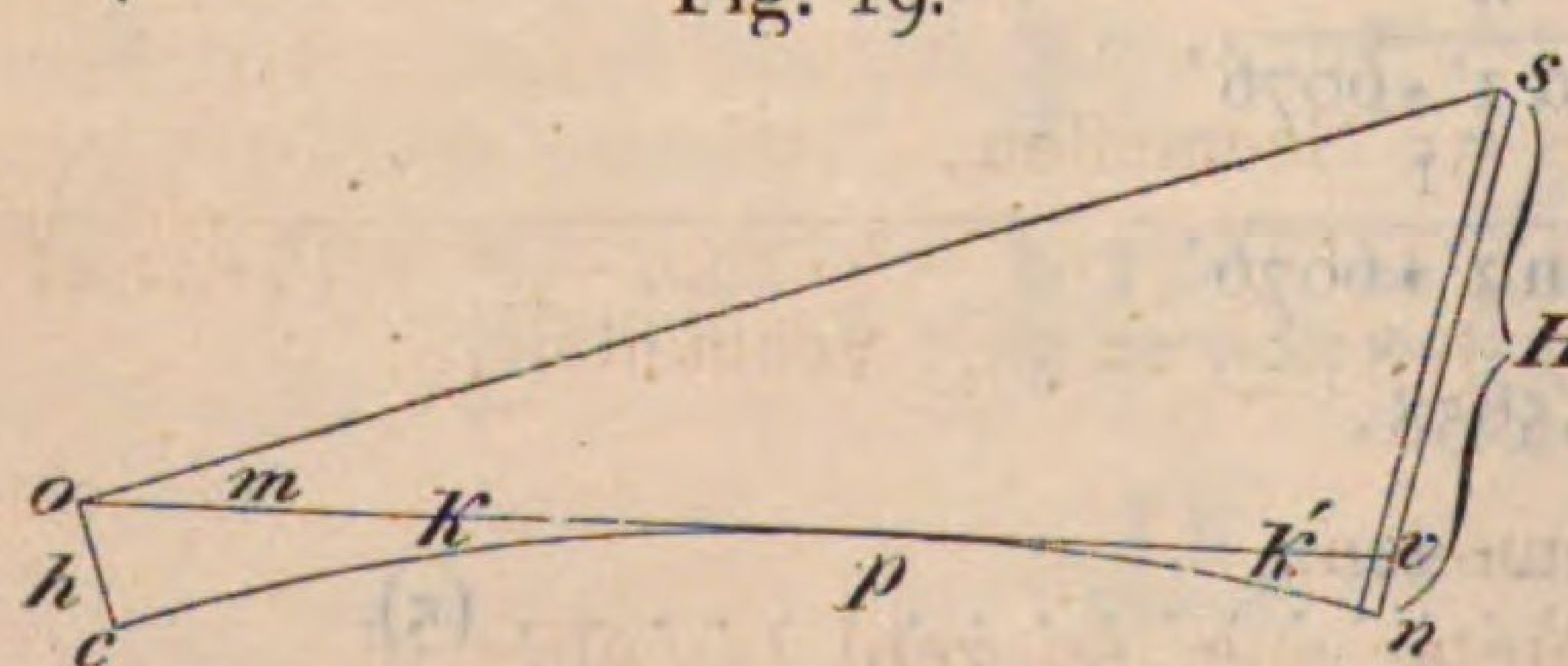
$$\tfrac{13}{7} \cdot \frac{40}{15{,}5} = 4{,}8 \text{ Seemeilen.}$$

Bemerkung. Die Genauigkeit dieser Methode ist abhängig von der Höhenwinkelmessung, ausserdem hat ein gleicher Fehler in dieser bei einem kleinen Winkel einen grösseren Einfluss auf den berechneten Abstand, als bei einem grossen, weshalb die kleinen Winkel mit vieler Genauigkeit gemessen werden müssen. Die irdische Refraction kommt hierbei nicht in Betracht, wenn man annimmt, dass die von A und B nach O gehenden Lichtstrahlen gleichmässig gebrochen werden, weil dann der Winkel AOB in Bezug auf seine Grösse keine Veränderung erleidet.

§. 38.

Den Abstand des Beobachters auf dem Meere von einem nur theilweise sichtbaren Land-Objecte, dessen Höhe über der Meeresfläche bekannt ist, durch Messung seiner über dem Seehorizonte sichtbaren Höhe zu bestimmen.

Fig. 19.



Es sei in Fig. 19. $oc = h$ die Höhe des Beobachters über der Meeresfläche, $sn = H$ die Höhe des Land-Objectes über der Meeresfläche, cpn eine Linie in der Oberfläche des Meeres zwischen dem Orte des Beobachters und dem des Land-Objectes, ov eine Gerade von dem Beobachter in o

*) $\lg \sin 1' = 6{,}463726 - 10$
$\lg 1852{,}01 = 3{,}267643$
$9{,}731360 - 10$
$1{,}85623 \lg = 0{,}268631.$

nach dem Land-Objecte, welche die Oberfläche des Meeres in p berührt, also p ein Punkt im Gesichtskreise, os eine Gerade vom Beobachter in o nach der Spitze s des Objectes, so ist $\angle sov = m$ Minuten die gemessene Höhe des Objectes über dem Seehorizonte des Beobachters, ov der Abstand des Beobachters vom Objecte, und das ebene Dreieck sov wird man als ein bei v nahe rechtwinkliges ansehen können. Bezeichnet man die Höhe des unsichtbaren Theils des Objectes vn mit y, so giebt dieses Dreieck nach §. 37. Gleichung (4) den Abstand ov in Seemeilen $= \frac{7}{12} \cdot \frac{H-y}{m}$, worin H und y in Rheinl. Fussen ausgedrückt sind. Setzt man ferner po in Seemeilen $= k$, und pv in Seemeilen $= k'$, drückt man h ebenfalls in Rheinl. Fussen aus, so hat man

$$k + k' = \tfrac{7}{12} \cdot \frac{H-y}{m} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und nach §. 36. Gleichung (4) wird

$$k = \tfrac{7}{6} \sqrt{h} \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

$$k' = \tfrac{7}{6} \sqrt{y} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

also $y = \frac{36}{49} k'^2$.

Wird dieser Werth für y in (1) gesetzt, so ist

$$k + k' = \tfrac{7}{12} \cdot \frac{H}{m} - \tfrac{3}{7} \cdot \frac{k'^2}{m},$$

woraus folgt

$$\tfrac{3}{7} \cdot \frac{k'^2}{m} + k' = \tfrac{7}{12} \cdot \frac{H}{m} - k,$$

oder $k'^2 + \frac{7}{3} mk' = \frac{49}{36} H - \frac{7}{3} mk$,

eine unvollständige quadratische Gleichung, welche, wenn man auf beiden Seiten $(\frac{7}{6} m)^2$ addirt, in eine vollständige übergeht, und wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht, so ist

$$k' + \tfrac{7}{6} m = \sqrt{\tfrac{49}{36} H - \tfrac{7}{3} mk + (\tfrac{7}{6} m)^2}$$

und $k' = -\frac{7}{6} m + \sqrt{\frac{49}{36} H - \frac{7}{3} mk + (\frac{7}{6} m)^2}$, oder genau genug

$$k' = -\tfrac{7}{6} m + \sqrt{\tfrac{4}{3} H - \tfrac{7}{3} mk + (\tfrac{7}{6} m)^2} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Man berechne daher erst nach Gleichung (2) den Abstand k und nach Gleichung (4) den Abstand k', die Summe beider Abstände ist dann der Abstand des Objectes vom Beobachter in Seemeilen.

Beispiel. Der Berg Monchique, dessen Höhe über der Meeresfläche 3715 Fuss Rheinl. ist, wurde in 9 Fuss Rheinl. über der Meeresfläche mit einem Sextanten 42′ 24″ über dem Seehorizonte gemessen; wie weit war der Beobachter davon entfernt?

Nach Gleichung (2) ist $k = \frac{7}{6} \sqrt{9} = 3{,}5$ Seemeilen,

und nach (4) $k' = -\frac{7}{6} \cdot 42{,}4 + \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 3715 - \frac{7}{3} \cdot 42{,}4 \cdot 3{,}5 + (\frac{7}{6} \cdot 42{,}4)^2}$,
$= -49{,}47 + 83{,}99 = 34{,}5$ Seemeilen,

folglich der gesuchte Abstand

$$k + k' = 38 \text{ Seemeilen.}$$

Drückt man H, y und h in Meter aus, so geht (1) über in

$$k + k' = \tfrac{13}{7} \cdot \frac{H-y}{m} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

und nach (7) in §. 36. wird

$$k = \tfrac{25}{12} \cdot \sqrt{h} \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

$$k' = \tfrac{25}{12} \cdot \sqrt{y} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

woraus sich ergiebt

$$y = \frac{144}{625} \cdot k'^2,$$ und dieser Werth für y in (5) gesetzt,

liefert $$k + k' = \tfrac{13}{7} \cdot \frac{H}{m} - \tfrac{13}{7} \cdot \frac{144}{625} \cdot \frac{k'^2}{m},$$

$$= \tfrac{13}{7} \cdot \frac{H}{m} - \frac{1872}{4375} \cdot \frac{k'^2}{m},$$

woraus nach einer leichten Umformung folgt

$$\frac{1872}{4375} \cdot \frac{k'^2}{m} + k' = \tfrac{13}{7} \cdot \frac{H}{m} - k,$$

d. i. sehr nahe auch

$$\tfrac{3}{7} \cdot \frac{k'^2}{m} + k' = \tfrac{13}{7} \cdot \frac{H}{m} - k,$$ und diese Gleichung mit $\tfrac{7}{3}m$ multiplicirt, giebt

$$k'^2 + \tfrac{7}{3}m \cdot k' = \tfrac{13}{3} \cdot H - \tfrac{7}{3}mk.$$

Addirt man auf beiden Seiten $(\tfrac{7}{6}m)^2$, so hat man

$$k'^2 + \tfrac{7}{3}m \cdot k' + \left(\frac{7\,m}{6}\right)^2 = \tfrac{13}{3} \cdot H - \tfrac{7}{3}mk + \left(\frac{7\,m}{6}\right)^2$$ und hieraus

$$k' = -\tfrac{7}{6}m + \sqrt{\tfrac{13}{3}H - \tfrac{7}{3}mk + \left(\frac{7\,m}{6}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ (8).$$

Wäre nun von einem Berge, 1166 Meter hoch über der Meeresfläche, in 3 Meter Augeshöhe an Bord dessen Höhenwinkel 42′ 24″ über dem Seehorizonte gemessen, so hat man nach (6)

$$k = \tfrac{25}{12}\sqrt{3} = 3{,}61$$ Seemeilen, und nach (8)

$$k' = -\tfrac{7}{6} \cdot 42{,}4 + \sqrt{\tfrac{13}{3} \cdot 1166 - \tfrac{7}{3} \cdot 42{,}4 \cdot 3{,}61 + (\tfrac{7}{6} \cdot 42{,}4)^2},$$

$$= -49{,}47 + 84{,}51 = 35{,}04$$ Seemeilen,

folglich ist der Abstand davon

$$k + k' = 38{,}65$$ Seemeilen.

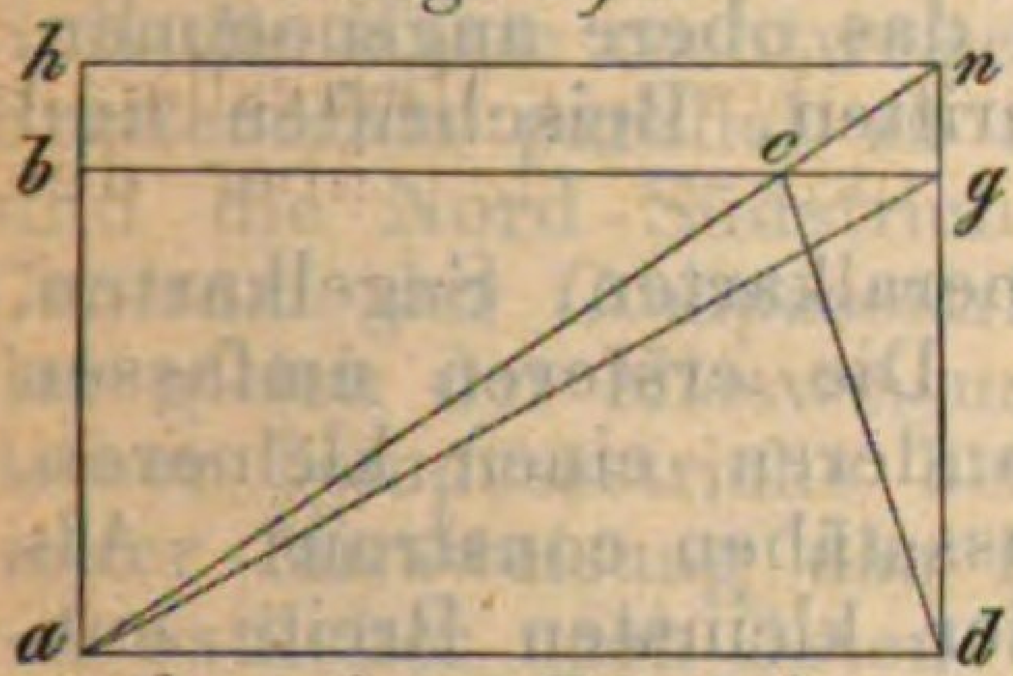
§. 39.

Von Seekarten.

Im Allgemeinen sind Seekarten, die auf einer Ebene nach verkleinertem Maassstabe gemachten Darstellungen von ganzen Meeren oder Theilen derselben, mit den angrenzenden Küsten oder ohne dieselben, je nachdem die Lage des betreffenden Meerestheiles dies erfordert. Die in dieser Art gemachten Darstellungen von Theilen der Erdoberfläche werden gewöhnlich von zwei Meridian- und zwei Breitenparallel-Bögen eingeschlossen. Die älteste, aber auch unvollkommenste Art dieser Darstellung ist diejenige, welche die dieselbe einschliessenden Meridian- und Parallel-Bögen auf der Ebene ein Rechteck bilden lässt. Hiernach werden die Meridian-Bögen in der Karte parallele gerade Linien, und die Breitenparallel-Bögen ebenfalls parallele gerade Linien, überdies letztere einander gleich. Die Länge der ersteren ist ein bestimmter Theil ihrer natürlichen Grösse, die Länge der letzteren derselbe Theil von dem wirklichen Breitenparallel-Bogen zwischen den beiden Meridianen auf der Mittelbreite. Die Meridiane und Breitenparallele der Karte in ihre Grade und Minuten eingetheilt, heissen: erstere Breitenscalen, letztere Längenscalen. Die Minuten der Breitenscalen werden Breiten-, und die der Längenscalen Längen-Minuten genannt. Das Verhältniss zwischen den Breiten- und Längen-Minuten ist ein constantes, nämlich wie der Radius zum Cosinus der Mittelbreite der Karte; auf der Erdoberfläche dagegen ist dieses Verhältniss in jeder Breite ein anderes, und nur für die Mittel-

breite der Karte mit dem in dieser übereinstimmend. Karten, deren Breitenscalen und Längenscalen so construirt werden, wie hier angegeben ist, nennt man platte Karten oder Plankarten. In den platten Karten wird nach Vorstehendem in Nordbreite der nördliche Theil derselben in der Richtung Ost-West ausgedehnt, und der südliche in derselben Richtung zusammengezogen; auf Südbreite findet das Umgekehrte statt. Diese Karten sind als richtig anzusehen, wenn sie sich über einen sehr kleinen Theil der Erdoberfläche erstrecken, oder auch über einen grösseren, der aber nur eine geringe Ausdehnung nach Nord und Süd hat und nicht in hoher Breite liegt. Reicht die platte Karte über einen Theil der Erdoberfläche in der Nähe des Aequators, so ist es nicht nothwendig, dass ihre Ausdehnung nach Nord und Süd sehr klein ist, weil hier die Meridiane fast mit einander parallel laufen. Dadurch, dass in der Seekarte die Meridiane als parallele gerade Linien dargestellt sind, wird es möglich, die in diesen Karten unentbehrlichen loxodromischen Linien, auch Compassstriche genannt, als gerade Linien zu verzeichnen (§. 8.), wodurch der Gebrauch dieser Karten wesentlich erleichtert wird. Die platten Karten haben aber den Nachtheil, dass das Verhältniss zwischen ihren Meridian- und Längen-Minuten mit dem zwischen den entsprechenden Meridian- und Breitenparallel-Minuten auf der Erdoberfläche nicht überall stimmt; auch geben jene Karten die Curse und Distanzen nicht richtig.

Fig. 19a.



Denn, ist in Fig. 19a. Rechteck *abgd* die platte Karte, worin Meridian *ab* # *dg*, Parallel *bg* # *ad*, dann ist von *a* nach *g* der Winkel *bag* der Curs und *ag* die Distanz. Nun sei *bc* die richtige Grösse dieses polwärts von *ad* liegenden Parallels und *dc* der Meridian durch *d* und *c*, so wird Trapez *abcd* die natürlichste und zugleich richtige Karte von diesem Erdtheil sein, in welcher Winkel *bac* der Curs und *ac* die Distanz von *a* nach *c* ist. Die platte Karte *abgd* giebt also Curs und Distanz von *a* nach *c* grösser, als die richtige Karte *abcd*. Verlängert man aber *ac* über *c* hinaus, *dg* über *g* hinaus, bis sich diese Verlängerungen schneiden, bezeichnet den Schnittpunkt mit *n*, zieht *nh* # *da*, theilt *ah* in ebenso viele Minuten als *ab* enthält, misst *an* durch diese Minuten von *ah*: so giebt die Karte *ahnd* den Curs und die Distanz von *a* nach *n* genau so, als die Karte *abcd* Curs und Distanz von *a* nach *c* giebt, folglich sind diese Karten frei von dem Fehler der platten. *ac* und *ag* sind durch die Minuten von *ab* auszumessen. Um nun eine Karte zu construiren, die von dem Fehler der platten frei ist, wird man darin die Breiten-Minuten nach den Polen hin vergrössern müssen, und zwar in demselben Verhältnisse, als die Längen-Minuten grösser gemacht worden sind. Die Breitenparallel-Minuten auf der Erdoberfläche in den verschiedenen Breiten verhalten sich aber zu einander wie die Cosinusse ihrer Breiten, oder umgekehrt wie die Secanten ihrer Breiten (§. 9. und §. 10.), folglich werden in der Karte mit überall gleichen Längen-Minuten die Breiten-Minuten in dem Verhältnisse zu einander stehen müssen wie die Secanten ihrer Breiten.

Die Ermittelung der Grösse der nach diesem Verhältnisse zu vergrössernden Breiten-Minuten der Karte wird durch die Meridionaltheile (§. 11. und §. 13.) sehr erleichtert. Karten dieser Art nennt man wachsende oder auch nach ihrem Erfinder „Merkator", Merkator'sche Karten.

Die platte Karte ist leicht von der wachsenden zu unterscheiden, denn in ersterer sind alle Breiten-Minuten einander gleich, während in letzterer dieselben nach dem Pol zu grösser sein müssen, als die weiter davon entfernten. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man mit dem Zirkel auf dem einen Ende der Breitenscale einen ganzen oder

halben Grad misst, und diesen mit dem auf dem andern Ende vergleicht. Platte Karten macht man heut zu Tage nur über sehr kleine Theile der Erdoberfläche, und dann häufig ohne Längenscale.

Sowohl die platten als wachsenden Karten können rechtweisend oder missweisend sein. Eine Karte ist rechtweisend, wenn der Nord-Südstrich der darin gezeichneten Compassstriche mit den Meridianen, also auch der Breitenscale derselben, parallel läuft; missweisend, wenn dies nicht der Fall ist. Im letzteren Falle macht der Nord-Südstrich mit dem Meridian einen Winkel, der gleich der Missweisung ist. Fast in allen Karten wird das Nordende des Nord-Südstrichs etwa 5 Zoll vom Centrum der Compassstriche, mit einer Lilie bezeichnet, und in rechtweisenden findet man auch die Missweisung an verschiedenen Stellen angegeben. Die Compassstriche werden in allen Karten nur durch Theile derselben gezogen, die Wasser darstellen, und die in letzteren mit arabischen Ziffern gedruckten Zahlen geben die Tiefe des Meeres in Faden bezw. Fuss oder Meter an. Zwischen diesen Zahlen ist auch die Beschaffenheit des Meeresbodens bemerkt. Ferner enthalten die Karten: die Küstenlinien, das Terrain der Küste, so weit es in einiger Entfernung vom Meere aus sichtbar ist, die vom Meere aus sichtbaren, kenntlichen Landobjecte, die Inseln und die Untiefen. Dies alles ist darin zweckmässig bezeichnet. Zur Erleichterung des Gebrauches werden noch in Entfernungen von etwa $\frac{1}{6}$ Meter, Meridiane und Breitenparallele gezogen. Das Nordende der Karte wird in der Regel als das obere angenommen, und dieser Annahme gemäss werden die Inschriften, Beischriften und Zahlen geschrieben.

Die Seekarten theilt man auch ein in: Generalkarten, Segelkarten, Küstenkarten und Special- oder Hafenkarten. Die ersteren umfassen einen grossen Theil der Erdoberfläche, die anderen einen kleineren, ausserdem werden alle nach verschiedenen Maassstäben construirt. Als Maassstab dient in wachsenden Karten der der kleinsten Breite entsprechende Längengrad, in platten ist es dagegen der Meridiangrad. Dieser Maassstab ist: in der Generalkarte $\frac{1}{8000000}$tel der natürlichen Grösse, in der Segelkarte zwischen $\frac{1}{8000000}$ und $\frac{1}{4000000}$tel der natürlichen Grösse, und in der Küstenkarte zwischen $\frac{1}{2000000}$ und $\frac{1}{100000}$tel der natürlichen Grösse. Bei Special- und Hafenkarten ist der Maassstab noch grösser; diese Karten haben aber gewöhnlich weder Breiten- noch Längenscale, sondern nur einen Seemeilen-Maassstab.

§. 40.

Vom Zeichnen der Seekarten.

Aufgabe A. Eine platte Karte von 48° bis 50° NBr. und 16° 0' WL. bis 19° 0' WL. von Greenwich zu zeichnen. Der Maassstab sei $\frac{1}{400000}$tel der natürlichen Grösse.

Lösung. Zuerst berechne man den Breiten- und Längengrad in der Karte. Der Breitengrad auf der Erdoberfläche = 111120,6 Meter (§. 7.), also der in der Karte = 0,2778 Meter. Die Mittelbreite ist 49°. Der Breitengrad verhält sich zum Längengrad in der platten Karte, wie der Radius zum Cosinus der Mittelbreite, folglich $r : \cos 49° = 0{,}2778$ Meter zum Längengrade = 0,1823 Meter. Nun ziehe man am unteren Rande des Papiers eine gerade Linie, errichte auf dieser am rechts befindlichen Rande desselben eine Normale, vom Durchschnittspunkte beider trage man, auf ersterer den Längengrad = 0,1823 Meter drei Mal, und auf letzterer den Breitengrad = 0,2778 Meter zwei Mal ab. Jeden Grad theile man dem-

nächst in 60 gleiche Theile, so ist die Breitenscale in Breiten- und die Längenscale in Längen-Minuten getheilt. Dann errichte man am links befindlichen Rande in dem letzten Theilungspunkte der Längenscale auf dieser eine Normale, am oberen Rande im letzten Theilungspunkte der Breitenscale auf dieser ebenfalls eine Normale, und trage auf ersterer die Breiten- und auf letzterer die Längen-Minuten ab, so hat man zwei gleiche Breiten- und Längenscalen. Bei beiden Scalen bezeichne man die vollen Grade durch Striche und ihre Zahlzeichen, jede zehnte Minute von 0 anfangend, ebenso, jedoch mache man die Zahlzeichen der letzteren etwas kleiner als die der Grade, und die einzelnen Minuten deute man nur durch Punkte an. Was nun weiter gemacht werden muss, ist von der Karte abhängig, nach der gezeichnet wird. Ist diese als genau richtig anzunehmen, so ziehe man mit Blei in beiden Karten durch jede Breiten-Minute einen Breitenparallel, und durch jede zweite Längen-Minute einen Meridian. Dadurch entstehen in beiden Karten kleine ähnliche Rechtecke, die das Uebertragen aller Punkte aus der Vorzeichnung nach Länge und Breite in die neue Karte wesentlich erleichtern, denn man bedarf in diesem Falle keines Zirkels, sondern die Schätzung ist hinreichend genau.

Nachdem auf diese Weise die Küstenlinien, das Terrain der Küste, die Inseln, Untiefen, Meerestiefen u. s. w. in die neue Karte übertragen sind, werden an freien Stellen, die das Meer darstellen, durch Punkte, die etwa 0,5 Meter von einander abstehen, die 32 Compassstriche gezogen. Soll die Karte rechtweisend werden, so ist der Nord-Südstrich mit der Breitenscale parallel zu ziehen, soll sie aber missweisend werden, so sind die Nord-Südstriche so zu legen, dass sie mit dem durch das Centrum der Compassstriche gehenden Meridian einen Winkel bilden, der gleich der Missweisung des Ortes ist, in welchem sich das Centrum dieser Compassstriche befindet. Zu bemerken ist noch, dass bei westlicher Missweisung das Nordende des Nord-Südstriches nach Westen, bei östlicher nach Osten von dem durch das Centrum der dazu gehörigen Compassstriche gehenden Meridian, liegen muss. Durch Zahlen mit römischen Ziffern geschrieben, giebt man die Hafenzeiten an denjenigen Stellen an, für welche sie bekannt sind. Die Richtung der Strömung, — auch der Fluth, — wird gleichfalls darin an denjenigen Stellen, für welche man sie kennt, mit einem Pfeile bezeichnet. Die Leuchtfeuer sind roth zu machen, dabei ihre Höhe über Hochwasser in Meter anzugeben und zu bemerken, ob das Feuer ein festes, auch stehendes genannt, oder ein drehendes (rotirendes) ist. Meridiane, ungefähr $\frac{1}{6}$ Meter von der Breitenscale und von einander entfernt, und Breitenparallele in gleichen Entfernungen, werden in der Karte quer über von einem Rande nach dem anderen gezogen. Hiernach wird die Karte gereinigt, was am besten dadurch bewirkt wird, dass man sie erst mit getrocknetem Weissbrode abreibt, und demnächst die kleinen mit Blei gezogenen Rechtecke fortschafft. Ist die Karte, nach der eine neue gezeichnet werden soll, nicht ganz richtig, d. h. ist die geographische Lage einzelner Punkte später genauer bestimmt worden, als früher bei der trigonometrischen Vermessung der Küstenstrecke hat geschehen können, so werden diese Punkte in der neuen Karte nach der genau bestimmten Länge und Breite niedergelegt, hier je zwei derselben durch eine Gerade verbunden, diese in kleine gleiche Theile getheilt, und über jedem Theile Quadrate errichtet. In der Karte, nach der gezeichnet wird, werden ebenfalls je zwei derselben Punkte durch eine Gerade verbunden, diese in dieselbe Anzahl gleiche Theile getheilt, und über jedem Quadrate errichtet. Die Quadrate in beiden Karten über der Linie zwischen denselben Punkten, machen das Uebertragen aller darin liegender Punkte aus der Vorzeichnung in die Zeichnung sehr leicht, und den Zirkel entbehrlich.

Aufgabe B. Eine wachsende Karte von 60° bis 63° NBr. und 16° bis 19° OL. von Greenwich zu zeichnen. Der Maassstab sei $\frac{1}{500000}$tel der natürlichen Grösse.

Lösung. Zuerst ist der Breitenparallel-Grad der kleinsten Breite entsprechend zu berechnen. Der Meridiangrad = 111120,6 Meter, also der Breitenparallel-Grad in 60° Breite = 111120,6 × cos 60° = 55560,3 Meter, folglich der Längengrad in der Karte = 0,11112 Meter. Man ziehe nun am untern Rande des Papiers eine gerade Linie, trage auf dieser von der Linken nach der Rechten den Längengrad = 0,11112 Meter drei Mal ab, bezeichne die Theilpunkte denselben Weg hin mit: 16°, 17°, 18°, 19°, und theile jeden Grad in Minuten ein. Damit ist die Längenscale fertig. Auf dieser in den Endpunkten (16° und 19°) errichte man Normalen. Demnächst nehme man die Meridional-Differenzen für jeden halben oder drittel Grad der Breite, und trage dieselben auf der Längenscale gemessen, von letzterer an, auf den genannten Normalen ab, so hat man die halben oder drittel Breitengrade, die, in Minuten eingetheilt, die Breitenscale sind. Die Meridional-Differenzen für jeden halben Grad, was hinreichend genau ist, findet man mit Hülfe der Meridionaltheile, die wenigstens auf eine, besser aber wie in der nautischen Tafel III. auf zwei Decimalstellen berechnet sein müssen, auf folgende Weise:

60° 0′	Meridionaltheile	= 4527,4		
			 60,4	Meridional-Differenz.
30′	» »	= 4587,8		
			 61,4	» »
61° 0′	» »	= 4649,2		
			 62,4	» »
30′	» »	= 4711,6		
			 63,4	» »
62° 0′	» »	= 4775,0		
			 64,4	» »
30′	» »	= 4839,4		
			 65,5	» »
63° 0′	» »	= 4904,9		

Man nehme also zuerst 60,4 Minuten auf der Längenscale, trage diese auf beiden Normalen von der Längenscale an ab, und bezeichne diese Endpunkte mit 60° 30′, den in der Längenscale liegenden aber mit 60° 0′. Dann nehme man 61,4 Minuten auf der Längenscale, trage diese von 60° 30′ auf beiden Normalen ab, und bezeichne die Endpunkte mit 61° 0′. Auf dieselbe Weise bestimme man die übrigen halben Breitengrade und theile jeden in 30 gleiche Theile, so sind beide Breitenscalen in Minuten eingetheilt. Durch die nördlichsten Endpunkte beider Breitenscalen ziehe man eine Gerade und trage darauf ab die Grade und Minuten der unteren Längenscale von demselben oder einem anderen Meridian gezählt. Der Längenunterschied der beiden ersten Meridiane ist im letzten Falle gehörig in Anwendung zu bringen. Sollte z. B. die obere Längenscale die Länge von Paris angeben, so wird man in dieser 16° 0′ dahin schreiben müssen, wohin der Meridian der unteren Scale von 18° 20′,2 trifft, denn Greenwich liegt 2° 20′,2 westlich von Paris. In Ermangelung der Meridionaltheile kann die Meridional-Differenz auf folgende Weise genau genug gefunden werden.

Es ist nämlich die Meridional-Differenz zwischen 60° und 60° 30′ Breite = 30′ · sec 60° 15′ = 60,46, zwischen 62° 30′ und 63° 0′ Breite = 30′ · sec 62° 45′ = 65,52, übereinstimmend mit dem Früheren.

In diese Karte sind nun alle Punkte aus der Vorzeichnung nach Länge und Breite zu übertragen, welches, wie bei der Construction der platten Karte gezeigt ist, am leichtesten und genauesten durch kleine Rechtecke zu bewerkstelligen sein wird. Bei der weiteren Ausführung dieser Karte ist überhaupt ganz so zu verfahren, wie bei der platten Karte angegeben.

§. 41.

Ueber den Gebrauch der wachsenden Karte.

Hierbei können vier Fälle vorkommen, die der Reihe nach in Folgendem behandelt sind.

I. Einen, seiner Lage nach gegebenen Punkt in der wachsenden Karte zu bestimmen.

Ein Punkt ist seiner Lage nach als gegeben anzusehen, wenn von ihm bekannt ist:

a. Länge und Breite, b. Richtung und Abstand von einem anderen Punkte in der Karte, und c. Breite und Meridiandistanz von einem anderen Punkte in der Karte.

a. Wenn Länge und Breite eines Punktes gegeben ist.

Man ziehe mit Blei in der Karte in der gegebenen Breite den Breitenparallel, und in der gegebenen Länge den Meridian, bis beide sich schneiden, so ist dieser Schnittpunkt der verlangte Punkt, den man gewöhnlich noch mit einem kleinen Bleikreise umgiebt, um ihn dadurch kenntlicher zu machen.

b. Wenn Richtung und Abstand eines Punktes von einem anderen in der Karte befindlichen Punkte gegeben ist.

Es sei z. B. der erstere NNW missweisend 12 Seemeilen von dem letzteren entfernt. Ist die Karte missweisend (§§. 39. und 40.), so ziehe man von dem bekannten Punkte aus in der Karte eine Bleilinie parallel mit dem nächsten NNW-Striche, nehme erst auf der Breitenscale von der Breite des bekannten Punktes nach der des gesuchten hin die halbe Distanz, also 6 Minuten zwischen die Zirkelspitzen und trage diese ab auf der Bleilinie von dem bekannten Punkte; durch den so erhaltenen Punkt lege man einen Breitenparallel bis zur Breitenscale, messe auf dieser die ganze Distanz von 12 Seemeilen — zu beiden Seiten des eben angeführten Punktes die Hälfte derselben — und trage selbige ab auf der Bleilinie, so ist dadurch der gesuchte Punkt in der Bleilinie bestimmt. Ist die Karte aber rechtweisend (§§. 39. und 40.) und die Missweisung in der Gegend, in welcher diese Punkte liegen, 2 Strich westlich, so ziehe man durch den bekannten Punkt eine Parallele mit dem nächsten NW-Strich — denn NNW missweisend, entspricht bei 2 Strich westlicher Missweisung NW rechtweisend — und verfahre im Uebrigen wie vorhin.

c. Wenn die Breite eines Punktes und seine Meridiandistanz von einem anderen in der Karte liegenden Punkte gegeben ist.

Der gesuchte Punkt liege z. B. in 56° 0′ NBr. und 40 Seemeilen rechtweisend W von dem in der Karte gegebenen. Man ziehe mit Blei durch den gegebenen Punkt den Meridian, und in 56° 0′ Breite den Breitenparallel bis beide sich schneiden. Hiernächst nehme man 40 Minuten auf der Breitenscale — und zwar von 55° 40′ bis 56° 20′ NBr. — und trage diese ab auf dem Breitenparallel von dessen Schnittpunkt nach Westen hin, so erhält man den gesuchten Punkt.

II. Von einem in der Karte befindlichen Punkte anzugeben:

a. Breite und Länge, b. Richtung und Abstand von einem anderen Punkte in der Karte, c. Breite und Meridiandistanz von einem Punkte der Karte.

a. Durch den gegebenen Punkt ziehe man den Breitenparallel und Meridian, so kann man in den Punkten, in welchen diese die Breiten-

und Längenscale treffen, die Grade und Minuten der Breite und Länge des Punktes unmittelbar ablesen.

b. Wenn man z. B. Richtung und Abstand des Leuchtthurms auf der Moole zu Neufahrwasser von Hela Leuchtthurm wissen wollte, so verbinde man beide Punkte durch eine Gerade, und untersuche mit welchem Compassstriche diese parallel läuft. Dieser Compassstrich ist SW $\frac{1}{2}$ S in der missweisenden Karte. Die gerade Linie zwischen den beiden Punkten messe man nun auf dem Theile der Breitenscale, der mit jener in gleicher Breite liegt, und man wird diese Gerade = 12,5 Breiten-Minuten finden. Hiernach liegt also der Leuchtthurm auf der Moole zu Neufahrwasser nach SW $\frac{1}{2}$ S missweisend 12,5 Seemeilen von Hela Leuchtthurm entfernt.

c. Will man z. B. von dem Leuchtthurm auf der Moole zu Neufahrwasser die Breite und dessen Meridiandistanz von Hela Leuchtthurm wissen, so ziehe man durch den Leuchtthurm von Hela den Meridian und verlängere ihn nach Neufahrwasser zu und durch den Leuchtthurm auf der Moole den Breitenparallel, bis derselbe den eben gezogenen Meridian und die Breitenscale trifft. In dem Punkte, in welchem dies letztere geschieht, sind die Grade und Minuten der Breite des Leuchtthurms auf der Moole abzulesen; diese ist 54° 25′ Nord. Der Abstand des Moolenthurms von dem Meridian des Helaer Leuchtthurms auf der Breitenscale gemessen, und zwar die eine Hälfte nordwärts, die andere südwärts von 54° 25′ NBr., giebt die Meridiandistanz an, welche hier 5,4 Seemeilen westlich gefunden wird. Aus diesen in II. abgehandelten Fällen, nämlich: a., b. und c. ergeben sich in Verbindung mit: I. a., I. b. und I. c. ebenso viele Methoden, das Besteck (den Schiffsort) aus einer Karte in die andere zu übertragen.

III. Curs und Distanz in der Karte von einem Punkte nach einem anderen zu bestimmen.

Der erstere Punkt wird der Abgangsort, der letztere der Bestimmungsort genannt. Beide Orte verbinde man durch eine Gerade, messe diese auf der Breitenscale, und zwar auf dem Theile, dessen Mitte in der Mittelbreite der beiden Orte liegt, so sind die Breiten-Minuten die Distanz zwischen den beiden Orten in Seemeilen. Ferner untersuche man, mit welchem Compassstriche der nächsten Compassrose in der Karte die gezogene Gerade parallel läuft, so giebt dieser den Curs von dem Abgangs- nach dem Bestimmungsorte an, der rechtweisend oder missweisend sein wird, je nachdem die Karte rechtweisend oder missweisend ist. Ist der Curs rechtweisend, so ist noch die statthabende Missweisung darauf anzuwenden, um ihn missweisend zu machen. Gesetzt der rechtweisende Curs sei SW $\frac{1}{2}$ W, die Missweisung $1\frac{3}{4}$ Strich westlich, so ist der missweisende Curs WSW $\frac{1}{4}$ W. — Wenn die Entfernung zwischen den beiden Punkten gross ist, so dass man sie mit dem Zirkel mit einem Male nicht fassen kann, alsdann misst man sie auf folgende Weise.

Man sucht die Mittelbreite zwischen dem Abgangs- und Bestimmungsorte auf der Breitenscale, nimmt auf letzterer zu beiden Seiten dieses Punktes eine gleiche Anzahl Breiten-Minuten zwischen die Zirkelspitzen, z. B. 40, und trägt diese von dem Abgangsorte nach dem Bestimmungsorte ab, hier z. B. vier Mal. Nun bleibe aber noch von der letzten Zirkelspitze bis zum Bestimmungsorte ein Stück übrig, dieses Stück messe man auf der Breitenscale und zwar so, dass dessen Hälften zu beiden Seiten der gedachten Mittelbreite liegen, — es sei = 25,5 Breiten-Minuten, — so ist die ganze Distanz $40 \cdot 4 + 25{,}5 = 185{,}5$ Seemeilen. Unter Mittelbreite auf der Breitenscale ist hier der Punkt auf letzterer zu verstehen, in welchem diese von dem durch die Mitte der Verbindungslinie

zwischen dem Abgangs- und Bestimmungsorte gehenden Breitenparallel getroffen wird. Dieser Punkt wird in den meisten Fällen durch Schätzung genau genug bestimmt.

IV. Curs und Distanz von einem gegebenen Punkte in der Karte abzusetzen.

Der gegebene Punkt heisst der Abgangsort, und der durch Curs und Distanz bestimmte der erreichte Ort. Es sei z. B. der Curs NO$\frac{1}{4}$O misseisend, die Distanz 45 Seemeilen, die Karte rechtweisend und die Missweisung $1\frac{1}{2}$ Strich westlich. Hiernach ist NO$\frac{1}{4}$O missweisend = NNO$\frac{3}{4}$O rechtweisend. Man ziehe daher von dem Abgangsorte aus eine Parallele mit dem NNO$\frac{3}{4}$O-Strich der nächsten Compassrose, welche Parallele „Distanzlinie" genannt wird, nehme nun 22,5 Minuten (die halbe Distanz) auf der Breitenscale zwischen der Breite des verlassenen und erreichten Ortes, und trage diese von dem ersteren Orte auf der Distanzlinie ab. Durch den so erhaltenen Punkt lege man einen Breitenparallel, der die Breitenscale trifft. Zu beiden Seiten dieses Schnittpunktes auf der Breitenscale nehme man die halbe Distanz, d. i. 22,5 Minuten, also zwischen die Zirkelspitzen 45 Minuten, und trage diese von dem verlassenen Orte ab auf der Distanzlinie, so hat man den erreichten Ort. Wäre die Karte eine missweisende gewesen, so hätte man mit dem nächsten NO$\frac{1}{4}$O-Striche von dem verlassenen Orte aus eine Parallele ziehen, und hierauf die Distanz, wie eben angegeben ist, abtragen müssen.

§. 42.

Ueber den Gebrauch der platten Karte.

Beim Gebrauch der platten Karte können dieselben Fälle vorkommen, die in dem vorhergehenden Paragraphen bei der wachsenden behandelt sind. Der Gebrauch der mit einer Längenscale versehenen platten Karte ist dem der wachsenden fast ganz gleich; nur darin unterscheiden sich beide, dass man in jener die Distanzen auf jedem beliebigen Theile der Breitenscale messen kann, weil alle Breiten-Minuten darin einander gleich sind, während man in dieser stets den Theil der Breitenscale dazu benutzen muss, der mit der zu messenden oder abzutragenden Distanz sich in gleicher Breite befindet. In der platten Karte ohne Längenscale können aber noch die beiden folgenden Fälle vorkommen.

I. Einen Punkt, dessen Breite und Länge gegeben ist, darin zu bestimmen.

Man ziehe in der gegebenen Breite den Breitenparallel, und durch einen anderen Punkt in der Karte, dessen Länge anderweit bekannt ist, einen Meridian, der diesen Breitenparallel schneidet. Den Unterschied der Längen zwischen diesem und dem gesuchten Punkte verwandle man mit der Mittelbreite der Karte in Abweichung nach der Proportion:

sin 90° : cosin Mittelbreite der Karte = Längenunterschied: Abweichung (§. 9.), oder vermittelst der Gradtafel nach dem ebenen rechtwinkligen Dreieck, welches auf dieser Proportion beruht. Die Abweichung auf der Breitenscale gemessen, trage man auf dem gezogenen Breitenparallel von dem diesen schneidenden Meridian, dessen Länge zur Ermittelung der Abweichung gebraucht ist, nach Osten oder Westen ab, je nachdem der gesuchte Punkt ostwärts oder westwärts von diesem Meridian liegt, so ist dadurch der gesuchte Punkt bestimmt.

II. Breite und Länge eines Punktes in der Karte anzugeben.

Man ziehe durch diesen Punkt einen Breitenparallel; wo derselbe die Breitenscale trifft, ist seine Breite unmittelbar abzulesen. Dann ziehe

man durch einen anderen Punkt, dessen Länge bekannt ist, den Meridian bis an diesen Breitenparallel, messe das Stück des Breitenparallels zwischen diesem Meridian und dem gegebenen Punkte auf der Breitenscale, welches die Abweichung angiebt und verwandle letztere nach der Proportion:

cosin Mittelbreite der Karte : sin 90° = Abweichung : Längenunterschied (§. 9.), in Längenunterschied, und diesen bezeichne man mit Ost oder West, je nachdem der gegebene Ort ostwärts oder westwärts von dem Meridian, dessen Länge bekannt ist, liegt, und wende den Längenunterschied richtig auf die Länge dieses Meridians an, so hat man die Länge des gegebenen Punktes in der Karte.

§. 43.

Ueber die Ortsbestimmung des Schiffes, wenn von diesem aus Landobjecte gepeilt, oder zwischen denselben Winkel gemessen sind und die Lage dieser Objecte in der Karte genau angegeben ist.

Wenn ein Schiff unter Segel geht, sei es aus einem Hafen oder von einer Rhede, oder von irgend einem anderen Ankerplatze in der Nähe der Küste, und seinem Bestimmungsorte zusteuert, so muss der Ort des Schiffes, bevor von diesem aus, die in der Karte niedergelegten kenntlichen Landobjecte verschwinden, bestimmt werden. Diese Bestimmung kann auf verschiedene Arten geschehen. Im Folgenden sind diejenigen Bestimmungen, welche in der Praxis Werth haben, ausführlich abgehandelt.

Aufgabe. I. Die einfachste und älteste Bestimmung dieser Art ist die, dass man vom Schiffe aus das in der Karte niedergelegte Landobject mit dem Compasse peilt, und gleichzeitig den Abstand des Schiffes von diesem Objecte nach Seemeilen schätzt.

Lösung. Zur richtigen Schätzung dieses Abstandes gehört aber viel Uebung, und selbst wenn man sich diese erworben hat, wird der Zustand der Atmosphäre jene oft ungenau machen. Man kann sich hiebei des Abstandes der Kimm, in Seemeilen ausgedrückt, bedienen. Dieser ist bekanntlich $= \frac{7}{6}\sqrt{h}$, worin h die Augeshöhe in Rheinl. Fuss vorstellt. Der Ort des Schiffes in der Karte kann nun vermittelst dieser Peilung und des Abstandes bestimmt werden, wie in §. 41. I. b. gezeigt ist.

Aufgabe. II. Es sei vom Schiffe aus ein in der Karte niedergelegter Thurm oder Berg, dessen Höhe über der Meeresfläche bekannt ist, sichtbar; von diesem Richtung und Abstand des Schiffes zu bestimmen.

Lösung. Man peile vom Schiffe aus mit dem Compasse den Gegenstand und messe gleichzeitig mit einem Spiegelsextanten dessen Höhenwinkel über dem Seehorizonte. Der Abstand des Schiffes von diesem Gegenstande kann nun nach Gleichung (4) oder (5) oder (7) in §. 37., oder nach Gleichung (2) und (4) bezw. (6) und (8) in §. 38. berechnet werden, je nachdem der Gegenstand innerhalb oder ausserhalb des Seehorizontes des Beobachters sich befindet. Den Beobachter wird hierüber die blosse Anschauung in den meisten Fällen nicht in Ungewissheit lassen; sollte er es dennoch sein, so berechne er nach Gleichung (4) oder (7) in §. 37. den Abstand des Schiffes von dem beobachteten Gegenstande, und nach Gleichung (4) oder (7) in §. 36. den Abstand des Schiffes von seinem Seehorizonte aus seiner Augeshöhe über der Meeresfläche. Ist dieser letztere Abstand gleich dem ersteren, oder grösser als der erstere, so

liegt der Gegenstand in dem Seehorizonte oder innerhalb desselben, und der nach Gleichung (4) oder (7) in §. 37. berechnete Abstand ist der richtige; ist aber der nach Gleichung (4) oder (7) in §. 36. gefundene Abstand kleiner als der nach Gleichung (4) oder (7) in §. 37. berechnete, so liegt der Seehorizont zwischen dem Beobachter und dem Gegenstande, und in diesem Falle ist die Entfernung zwischen beiden nach den Gleichungen (2) und (4) oder (6) und (8) in §. 38. zu berechnen.

Beispiel. Das Auge des Beobachters ist 12 Fuss Rheinl. über der Meeresfläche, von hier aus peilt der Beobachter Rixhoeft Leuchtthurm in SSW, und misst gleichzeitig dessen Höhe über dem Seehorizonte mit dem Sextanten 14′ 12″. Die Spitze des Rixhoefter Thurmes ist 220 Fuss Rheinl. über der Meeresfläche. Der Abstand des Beobachters von dem Leuchtthurme nach Gleichung (4) in §. 37. $= \frac{7}{12} \cdot \frac{h}{m} = \frac{7}{12} \cdot \frac{220}{14{,}2} = 9{,}0$ Seemeilen, und von dem Seehorizonte nach Gleichung (4) in §. 36. $= \frac{7}{6} \sqrt{h}$ $= \frac{7}{6} \sqrt{12} = 4$ Seemeilen.

Da nun der erstere Abstand grösser als der letztere ist, so liegt der Seehorizont zwischen dem Beobachter und dem Leuchtthurme, deshalb ist die Entfernung zwischen beiden nach den Gleichungen (2) und (4) in §. 38. zu berechnen. Sie ist

$$\begin{aligned} k + k' &= k - \tfrac{7}{6}m + \sqrt{\tfrac{4}{3}H - \tfrac{7}{3}mk + (\tfrac{7}{6}m)^2}, \\ &= 4 - \tfrac{7}{6} \cdot 14{,}2 + \sqrt{\tfrac{4}{3} \cdot 220 - \tfrac{7}{3} \cdot 14{,}2 \cdot 4 + (\tfrac{7}{6} \cdot 14{,}2)^2}, \\ &= 4 - 16{,}57 + \sqrt{293{,}33 - 132{,}51 + 274{,}56}, \\ &= 4 - 16{,}57 + 20{,}87, \\ &= 8{,}3 \text{ Seemeilen.} \end{aligned}$$

Der Beobachter an Bord des Schiffes steht also von Rixhoeft Leuchtthurm missweisend NNO 8,3 Seemeilen ab. Hiermit kann der Ort des Schiffes zur Zeit der Beobachtung in der Karte bestimmt werden, wie in §. 41. I. b. gezeigt ist.

Aufgabe. III. Während der Nacht entferne sich ein Schiff von einem in der Karte angegebenen Feuer, oder nähere sich demselben; von diesem letzteren Richtung und Abstand des ersteren zu bestimmen, wenn das Feuer bei einer gewissen Höhe des Auges vom Schiffe aus über der Meeresfläche genau in dem Seehorizonte gesehen wird.

Lösung. Man peile mit dem Compasse das Feuer, und messe genau die Höhe des Punktes über der Meeresfläche, von wo aus das Auge des Beobachters das Feuer im Horizonte sieht. Dieser Punkt wird so ermittelt: Wenn das Feuer vom Deck aus nicht mehr gut zu sehen ist, steige man so weit in's Want hinauf, bis man es deutlich sieht, und nähere sich nun allmälig dem Deck, bis das Feuer verschwindet, so wird dies der Punkt sein, von dem aus es im Horizonte erscheint. Die Peilung des Feuers wird in diesem Falle mit dem Steuer-Compasse dadurch ermittelt, dass man das Schiff anluven oder abfallen lässt, bis das Feuer recht voraus oder dwars ist.

Der Abstand des Schiffes von dem Feuer wird nun aus dessen Höhe und der Höhe des Auges über der Meeresfläche vermittelst Gleichung (4) oder (7) in §. 36. berechnet, je nachdem die Augeshöhe in Fuss Rheinl. oder Meter ausgedrückt ist; auch ist er ohne Weiteres zu entnehmen aus der nautischen Tafel V. Dieser Abstand in Seemeilen ist, wenn H die Höhe des Feuers, und h die Höhe des Auges über der Meeresfläche nach Rheinl. Fussmaasse darstellt $= \frac{7}{6} \sqrt{H} + \frac{7}{6} \sqrt{h}$.

Beispiel. In 15 Fuss Rheinl. über der Meeresfläche erblickt und hat man nach dem Compasse von einem Schiffe aus, welches sich in der

Nacht von der Küste entfernt, das Feuer auf Hela Leuchtthurm in SW. Das Feuer ist 120 Fuss Rheinl. über der Meeresfläche, und sonach der Abstand des Schiffes von dem Leuchtthurm

$$= \tfrac{7}{6}\sqrt{120} + \tfrac{7}{6}\sqrt{15} = 17{,}3 \text{ Seemeilen.}$$

Der Ort des Schiffes in der Karte kann nun, da dasselbe von Hela Leuchtthurm missweisend NO 17,3 Seemeilen entfernt ist, nach §. 41. I. b. bestimmt werden.

Aufgabe. IV. Wenn ein Schiff in der Nähe der Küste segelt, und von demselben ein Landobject, das in der Karte angegeben, dessen Höhe über der Meeresfläche aber nicht bekannt ist, gesehen wird, so kann Richtung und Abstand des Schiffes von diesem Objecte bestimmt werden.

Lösung. Man peile nämlich zu diesem Zwecke das Object mit dem Compasse, segle nach demselben Compasse einen Curs, der nicht in oder nahe an der Peilungslinie liegt, so lange bis die Peilungslinie des Objectes 4 bis 8 Striche verändert ist, peile dann das Object zum zweiten Male und bestimme die gesegelte Distanz nach dem gewöhnlichen Logg. Ist die Wassertiefe gering — etwa 4 bis 6 Faden — so benutze man das Grundlogg zur Ermittelung von Curs und Distanz zwischen den beiden Peilungen. In letzterem Falle hat die etwa vorhandene Strömung keinen Einfluss auf die Bestimmung des Schiffsortes, wohl aber in ersterem. Es empfiehlt sich daher der Gebrauch des Grundloggs bei dieser Ortsbestimmung des Schiffes wenn thunlich.

Der Abstand des Schiffes von dem Objecte bei jeder Peilung kann nun durch Rechnung oder Construction gefunden werden, denn die beiden Peilungslinien und die Curslinie bilden ein ebenes Dreieck, in welchem eine Seite und die drei Winkel bekannt sind; die beiden anderen Seiten aber sind die gesuchten Abstände des Schiffes von dem Objecte zur Zeit der Peilungen. Durch Construction werden diese Abstände hinreichend genau gefunden, deshalb ist sie der Rechnung vorzuziehen. Am zweckmässigsten ist es, die Construction in der Karte von dem gepeilten Objecte aus zu machen, und dabei die gesegelte Distanz in Seemeilen auf der Breitenscale zu nehmen. Hierdurch erhält man den richtigen Ort des Schiffes in jeder Peilungslinie, und wenn man nun noch die Entfernung dieser Orte von dem Objecte auf der Breitenscale misst, so hat man die Abstände des Schiffes von dem Objecte in Seemeilen bei jeder Peilung.

Beispiel. Hela Leuchtthurm wird vom Schiffe aus mit dem Compasse in W½N gepeilt, dann gesegelt nach demselben Compasse NNO 6 Seemeilen, und hiernach Hela Leuchtthurm in SW½W mit dem vorigen Compasse gepeilt: wie weit war das Schiff bei jeder Peilung von Hela Leuchtthurm entfernt?

Durch Construction in der missweisenden Karte.

Man ziehe von Hela Leuchtthurm aus die Curslinie (den NNO-Strich) und die entgegengesetzten Peilungslinien (Parallelen mit dem O½S- und NO½O-Strich), trage die Distanz, — 6 Breiten-Minuten auf der Breitenscale in der Breite von Hela gemessen, — auf der Curslinie ab von dem Leuchtthurme aus, lege dann durch diesen Punkt eine Parallele mit der ersten Peilungslinie, bis sie die zweite schneidet, und durch diesen Durchschnittspunkt eine Parallele mit der Curslinie, bis dieselbe die erste Peilungslinie trifft, so ist der Durchschnittspunkt in jeder Peilungslinie der Ort des Schiffes bei der resp. Peilung. Die Abstände dieser Punkte in der ersten und zweiten Peilungslinie von dem Helaer Leuchtthurme auf der Breitenscale gemessen in der Breite von Hela, sind 4,0 und 8,1 Breiten-Minuten. Das Schiff ist daher von Hela Leuchtthurm bei der ersten Peilung 4,0 Seemeilen und bei der zweiten 8,1 Seemeilen ab.

Durch Rechnung die Abstände zu bestimmen.

Bezeichnet man den Ort des Schiffes bei der ersten und zweiten Peilung mit A und B, den des Leuchtthurmes mit C, so ist in dem Dreieck zwischen diesen drei Punkten $\angle C = 4$ Strich $= 45^\circ$, $\angle A = 9\frac{1}{2}$ Strich $= 106^\circ\ 52'$, $\angle B = 2\frac{1}{2}$ Strich $= 28^\circ\ 8'$, und $AB = 6$ Seemeilen. Die Seiten AC und BC können nun nach der Sinusregel berechnet werden. Man hat die Proportionen:

$\sin C : \sin B = AB : AC.$		$\sin C : \sin A = AB : BC.$	
$\lg \sin B$	$= 9.6735 - 10$	$\lg \sin A$	$= 9{,}9809 - 10$
$\lg AB$	$= 0.7781$	$\lg AB$	$= 0{,}7781$
	$0{,}4516$		$0{,}7590$
$\lg \sin C$	$= 9.8495 - 10$	$\lg \sin C$	$= 9.8495 - 10$
$\lg AC$	$= 0{,}6021$	$\lg BC$	$= 0.9095$
AC	$= 4{,}0$ Seemeilen.	BC	$= 8{,}1$ Seemeilen.

Aufgabe. V. Wenn zwei in der Karte befindliche Landobjecte vom Schiffe sichtbar sind, den Ort des letzteren zu bestimmen.

Lösung. Diese Bestimmung kann auf zweierlei Weise gemacht werden.

a. Man peile mit dem Compasse vom Schiffe aus schnell nach einander beide Objecte, wenn der Winkel zwischen denselben grösser als 3 Strich und kleiner als 13 Strich ist; bei Winkeln unter 3 Strich aber, oder wenn eine genauere Bestimmung erforderlich wird, b. peile man das eine Object, — das nähere, — und messe gleich darauf mit dem Octanten den Winkel zwischen beiden. Die erstere Bestimmungsart ist bekannt unter dem Namen „Kreuzpeilung", die letztere unter der Benennung „Peilung und Horizontal-Winkelmessung".

Um nun den Ort des Schiffes nach a. in der Karte zu bestimmen, ziehe man in derselben von jedem Objecte aus die entgegengesetzten Compassstriche der Peilungen — natürlich für Missweisung berichtigt, wenn die Karte rechtweisend ist —, so wird der Durchschnittspunkt der Peilungslinien der Ort des Schiffes sein. Die Entfernung dieses Ortes von den beiden Objecten auf der Breitenscale gemessen, und wenn die Karte wachsend ist, auf dem Theile derselben, dessen Mitte in der Mittelbreite des Objectes und Schiffsortes liegt, giebt den Abstand des Schiffes von jedem der beiden Objecte in Seemeilen.

Um den Ort des Schiffes in der Karte nach b. zu bestimmen, ziehe man in derselben von dem gepeilten Objecte aus den entgegengesetzten Compassstrich der Peilung (Peilungslinie), — natürlicher Weise wieder für Missweisung verbessert, wenn die Karte rechtweisend ist, — messe den normalen Abstand des ungepeilten Gegenstandes von der Peilungslinie auf der Breitenscale, und berechne die Proportion:

$$\sin S : \sin 90^\circ = A : x,$$

worin S den zwischen den beiden Objecten gemessenen Winkel, A den normalen Abstand des ungepeilten Objectes von der Peilungslinie, und x den Abstand des Schiffes von dem ungepeilten Objecte vorstellt. Nun beschreibe man mit x auf der Breitenscale gemessen — wenn die Karte wachsend, dann mit dem Theile derselben woselbst A gemessen ist — von dem ungepeilten Objecte aus einen Bogen, der die Peilungslinie schneidet, so wird dieser Durchschnittspunkt der Ort des Schiffes sein.

Man denke sich nämlich den Ort des Schiffes in der Peilungslinie mit dem ungepeilten Gegenstande durch eine Gerade verbunden, von diesem Gegenstande eine Normale auf die Peilungslinie gezogen, so entsteht ein ebenes rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse x, die eine Kathete A, der dieser gegenüberliegende Winkel S ist. Dieses Dreieck liefert die vorstehende Proportion. Zur Ermittelung von x kann

man sich auch der Gradtafel bedienen. *A* und *x* wird man auch auf jedem beliebigen gleichtheiligen Maassstabe messen können.

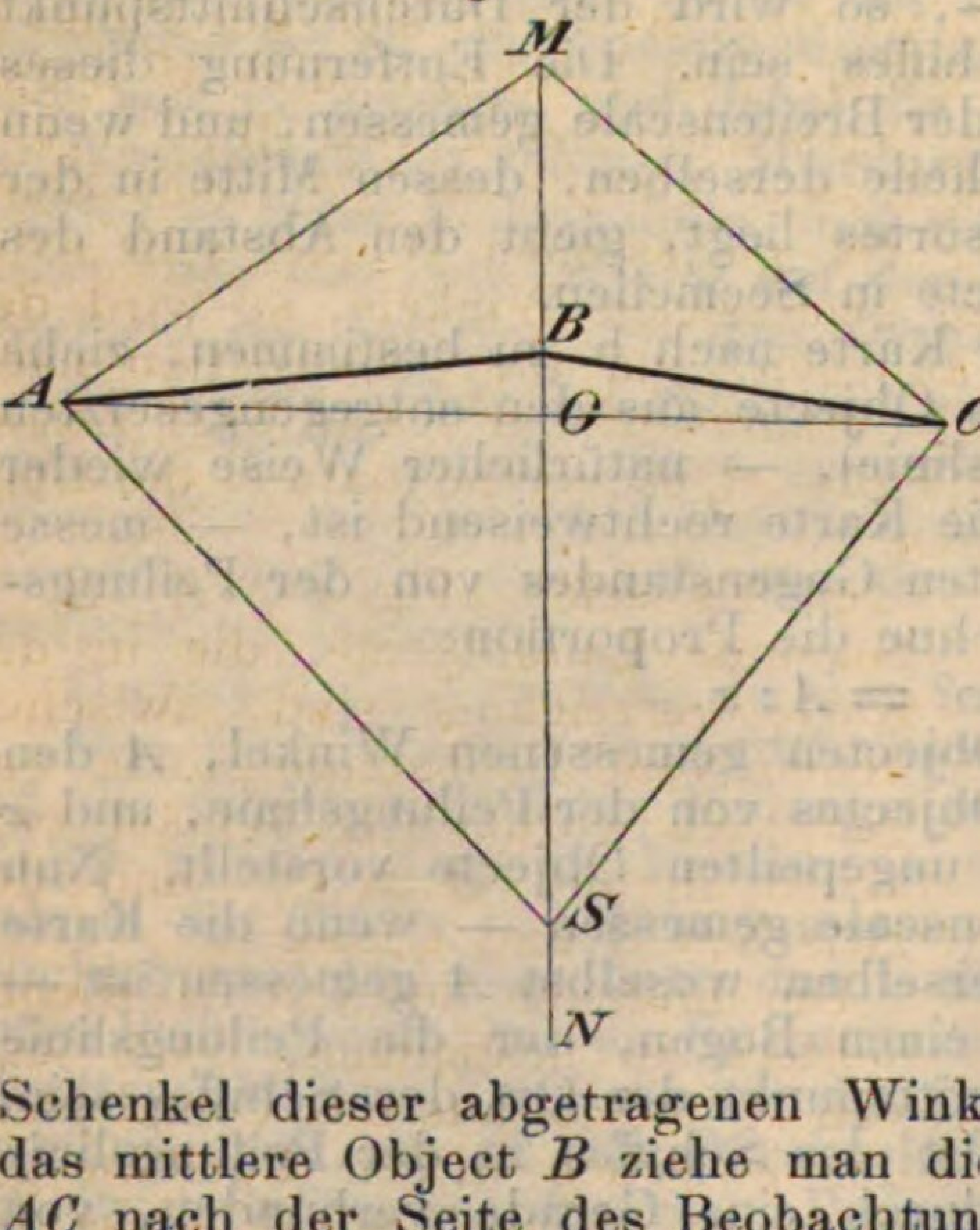
Weniger practisch ist das folgende Verfahren zur Bestimmung des Schiffsortes in der Karte. Man trage nämlich von einem beliebigen Punkte in der Peilungslinie an diese den gemessenen Winkel ab, aber nach der Seite des ungepeilten Objectes zu, und ziehe durch dieses Object eine Parallele mit dem Schenkel des abgetragenen Winkels, bis sie die Peilungslinie schneidet. Dieser Durchschnittspunkt ist dann der Ort des Schiffes. Die Richtigkeit dieser Construction ist einleuchtend.

Aufgabe. VI. Wenn drei in der Karte angegebene Landobjecte vom Schiffe aus sichtbar sind, so kann man den Ort des Schiffes in der Karte bestimmen, wenn von diesem aus zwischen dem ersten und zweiten, ebenso zwischen dem zweiten und dritten Objecte — von der Linken nach der Rechten oder umgekehrt gehend — mit einem Octanten Winkel gemessen sind.

Lösung. Der Ort des Schiffes in der Karte kann hierdurch auf folgende vier Arten bestimmt werden:

a. Man trage die beiden zwischen den drei Objecten gemessenen Winkel mittelst eines Transporteurs oder der Chordescale auf durchsichtiges Papier, — feines Postpapier oder Oelpapier, — und zwar so, dass sie mit ihren Spitzen zusammenfallen und aneinander liegen. Hierauf lege man das Papier auf die Karte, schiebe es so lange hin und her, bis die Schenkel dieser Winkel ihre resp. Objecte genau decken, und bezeichne nun mit einer Nadel- oder Zirkelspitze den Punkt in der Karte unter der Winkelspitze der auf dem durchsichtigen Papier abgetragenen Winkel. Dieser Punkt ist dann der Ort des Schiffes in der Karte, und seine Entfernung von jedem Objecte auf der Breitenscale gemessen, wird der Abstand des Schiffes von jedem Objecte in Seemeilen sein.

Fig. 20.



b. Es seien *A*, *B*, *C* (Fig. 20.) die drei in der Karte liegenden, vom Schiffe sichtbaren Landobjecte, und *A* das am meisten links gelegene. Die vom Schiffe aus kurz nacheinander gemessenen Winkel seien zwischen *A* und $B = 41° 15'$, und zwischen *B* und $C = 37° 30'$.

Um den Beobachtungsort zu bestimmen, verbinde man die äussersten Punkte *A* und *C* durch eine Gerade, trage von *C* und *A* aus an *AC* nach der dem Beobachtungsorte abgekehrten Seite die gemessenen Winkel, wenn deren Summe kleiner als 180° ist, und zwar so, dass in *C* die Spitze des zwischen *A* und *B*, und in *A* die des zwischen *B* und *C* gemessenen Winkels liegt. Durch den Durchschnittspunkt der beiden Schenkel dieser abgetragenen Winkel, welcher hier *M* ist, und durch das mittlere Object *B* ziehe man die Gerade *MN*. Dann trage man an *AC* nach der Seite des Beobachtungsortes hin von *C* aus den Winkel *AMB*, und von *A* aus den Winkel *CMB*, so werden die Schenkel sich und die Linie *MN* in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt ist der Beobachtungsort, hier in diesem Falle *S*.

Beweis. Den Durchschnittspunkt von *AC* und *MN* bezeichne man mit *O*.

Es ist $\angle AOS = \angle MOC$ als Scheitelwinkel
und $\angle OAS = \angle OMC$ gemacht,
folglich $\triangle AOS \sim \triangle MOC$,
und somit $\angle ASO = \angle OCM = 41^\circ\ 15'$.
Ferner ist $\angle COS = \angle AOM$ als Scheitelwinkel
und $\angle OCS = \angle OMA$ gemacht,
folglich auch $\angle CSO = \angle MAO = 37^\circ\ 30'$.

Hiernach ist S der Ort des Beobachters.

Das Viereck $AMCS$ ist ein Kreisviereck, weil $\angle AMC + \angle ASC = 180^\circ$, und $\angle MAS + \angle MCS = 180^\circ$ ist.

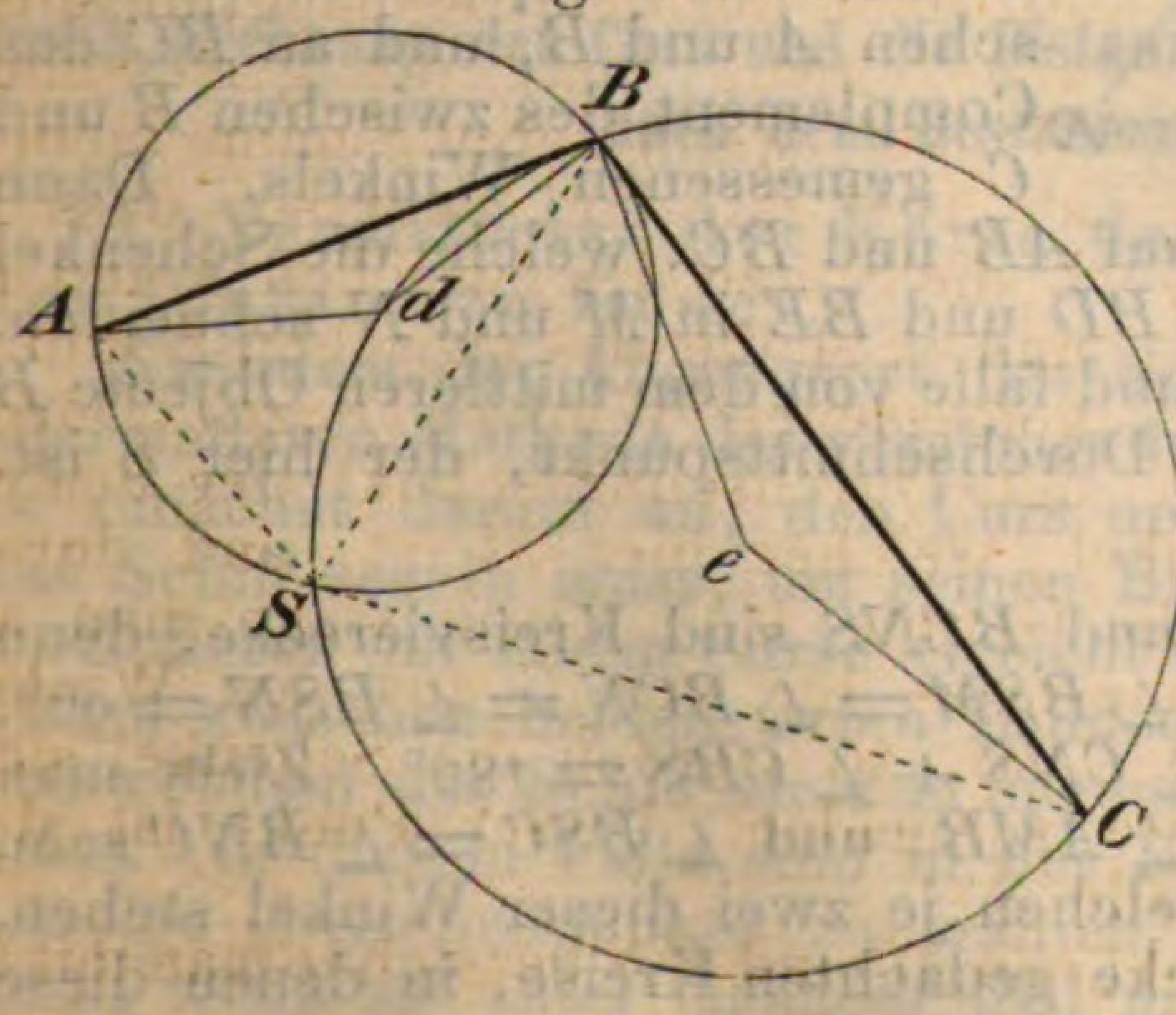
Wenn die Punkte A, B, C ungünstig liegen, d. h. wenn durch A, B, C und S ein Kreis gelegt werden kann, dann fallen die Punkte M und B ineinander; je weiter nun diese von einander entfernt sind, um so genauer wird S bestimmt.

Bemerkung. Wenn die Summe der beiden gemessenen Winkel $= 180^\circ$ ist, so werden sich, bei ihrer Abtragung in der vorstehend angegebenen Art, ihre Schenkel nicht schneiden, sondern parallel miteinander laufen. Der Ort des Beobachters liegt in diesem Falle in einem Punkte der Verbindungslinie AC, und man wird denselben finden, wenn man einen der gemessenen Winkel so an AC trägt, dass dessen einer Schenkel in diese Linie fällt und durch ein, der andere Schenkel aber durch das andere Object geht, zwischen denen dieser Winkel gemessen ist.

Ist einer der gemessenen Winkel ein stumpfer, und der andere gemessene Winkel grösser als das Supplement dieses stumpfen Winkels, oder sind beide gemessene Winkel stumpfe, so liegt der Punkt S innerhalb des Dreiecks ABC, und es müssen, nach geschehener Abtragung dieser Winkel in der oben angegebenen Art, deren Schenkel rückwärts verlängert werden, der Schnittpunkt M fällt dann diesseits der Verbindungslinie AC; die aus dem dadurch entstehenden Dreieck weiter nach der in Vorstehendem gegebenen Anleitung abzutragenden Winkel müssen dann jenseits AC abgetragen werden, wodurch sich der Punkt S ebenfalls als jenseits AC liegend ergiebt. Die Punkte S und M liegen also auch in diesem Falle auf entgegengesetzten Seiten von AC.

Ist jeder der gemessenen Winkel zwar kleiner als 90°, aber doch grösser als etwa 60°, oder ist einer der gemessenen Winkel sehr nahe gleich dem Supplement des anderen gemessenen Winkels, so wird der Schnittpunkt M sehr weit von AC abliegen, und die Construction nach der angegebenen Art durch Mangel an Raum auf der Karte oder Zeichnung erschwert werden. In diesem Falle ist es vortheilhafter, die Construction in folgender Art auszuführen.

Fig. 21.



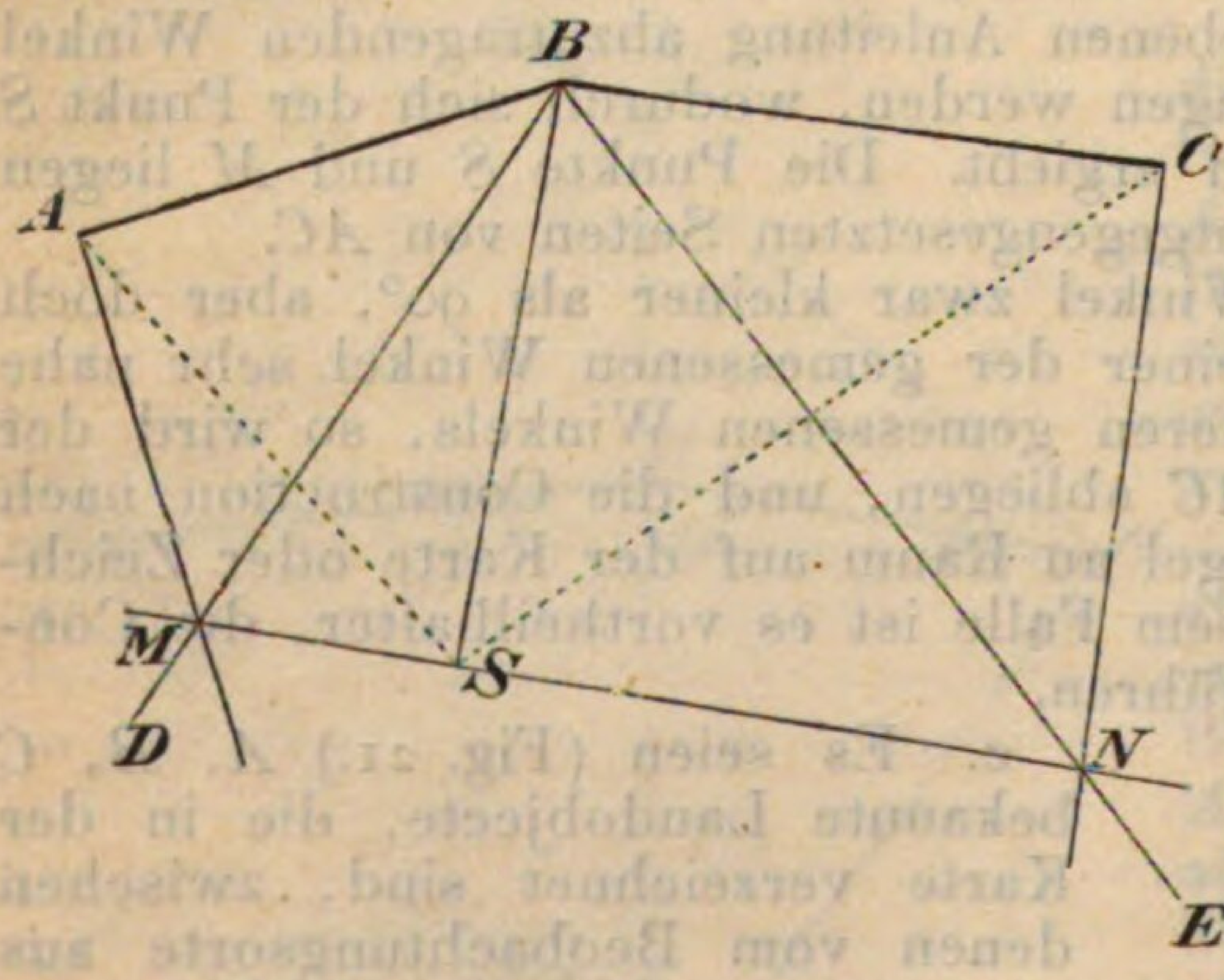
c. Es seien (Fig. 21.) A, B, C bekannte Landobjecte, die in der Karte verzeichnet sind, zwischen denen vom Beobachtungsorte aus gemessen wurde: der Winkel zwischen A und $B = 75^\circ$ und der zwischen B und $C = 85^\circ$.

Um hiernach den Ort des Beobachters zu bestimmen, trage man von A und B aus das Complement des zwischen diesen Punkten gemessenen Winkels so ab, dass der eine Schenkel dieses Complementwinkels in AB, und der andere nach der Seite des Beobachters zu fällt, und verlängere die letzteren,

bis sie sich schneiden. Ebenso trage man von B und C aus das Complement des zwischen diesen beiden Punkten gemessenen Winkels so ab, dass der eine Schenkel dieses Complementwinkels in BC, der andere nach der Seite des Beobachtungsortes zu fällt, und verlängere auch diese Schenkel, bis sie sich schneiden. Diese Durchschnittspunkte bezeichne man mit d und e, beschreibe um den so bestimmten Punkt d mit dem Radius dB einen Kreis, ebenso um e mit dem Radius eB einen Kreis, so wird der Punkt S, in welchem sich die beiden Kreise zum zweiten Male schneiden, der Ort des Beobachters sein, den man mit A, B und C durch gerade Linien verbindet, um die dadurch entstehenden Winkel mit den gemessenen vergleichen zu können.

Beweis. Jeder der Winkel an der Grundlinie des Dreiecks ABd ist gleich dem Complement des zwischen A und B gemessenen Winkels von $75°$, also $= 15°$, ihre Summe also $= 30°$, folglich ist der Winkel $AdB = 150°$, und ist in diesem Falle ein Centriwinkel, mit welchem der Peripheriewinkel ASB auf demselben Bogen steht, welcher letztere nach einem bekannten Satze der Geometrie gleich der Hälfte des Centriwinkels, hier also $= 75° =$ dem zwischen A und B gemessenen Winkel ist. — Ebenso bildet das Complement des zwischen B und C gemessenen Winkels von $85°$ auf jeder Seite der Grundlinie des Dreiecks BCe einen Winkel an derselben, und die Summe beider ist $= 10°$, folglich ist der Winkel $BeC = 170°$, der ebenfalls ein Centriwinkel ist, der mit dem Peripheriewinkel BSC auf demselben Bogen steht, und nach dem gedachten Satze der Geometrie doppelt so gross als der letztere ist; es ist also Winkel $BSC = 85° =$ dem zwischen B und C gemessenen Winkel. Es muss demnach S der Ort des Beobachters sein.

Fig. 22.



d. In Fig. 22. seien A, B und C die drei Objecte in der Karte, und A das vom Schiffe aus gesehene, am weitesten links gelegene. Ferner sei der zwischen A und B gemessene Winkel $= 49° \; 30'$, und der zwischen B und $C = 41° \; 0'$.

Um den Beobachtungsort zu finden, verbinde man A und B durch eine Gerade, ebenso B und C, trage nun nach dem Beobachtungsorte zu von B aus an BA das Complement des zwischen A und B, und an BC das Complement des zwischen B und C gemessenen Winkels. Dann errichte man in A und C Normalen auf AB und BC, welche die Schenkel der abgetragenen Complementwinkel BD und BE in M und N schneiden, ziehe eine Gerade durch M und N, und fälle von dem mittleren Objecte B eine Normale auf MN, so wird der Durchschnittspunkt, der hier S ist, der Beobachtungsort sein.

Beweis. Die Vierecke $ABSM$ und $BCNS$ sind Kreisvierecke, denn der Construction nach ist $\angle BAM = \angle BSM = \angle BCN = \angle BSN = 90°$, folglich auch $\angle AMS + \angle ABS = \angle CNS + \angle CBS = 180°$. Zieht man also AS und CS, so muss $\angle ASB = \angle AMB$, und $\angle BSC = \angle BNC$ sein, denn die Seiten des Vierecks, auf welchen je zwei dieser Winkel stehen, sind die Sehnen der um diese Vierecke gedachten Kreise, in denen diese

Winkel Peripherie-Winkel bilden, die in jedem Kreise einander gleich sind, wenn sie auf gleichen Sehnen stehen.

Es ist aber $\angle AMB = 49^\circ\,30'$ und $\angle BNC = 41^\circ\,0'$ gemacht, folglich auch $\angle ASB = 49^\circ\,30'$ und $\angle BSC = 41^\circ\,0'$, und somit S der Beobachtungsort.

Wenn einer der gemessenen Winkel hier sowohl wie im Falle c. ein stumpfer ist, so wird der Ueberschuss über 90° auf der dem Beobachtungsorte abgekehrten Seite der betreffenden Verbindungslinie in der vorstehend bezeichneten Art angetragen, und im Uebrigen ganz so verfahren, wie im Vorstehenden gezeigt ist. Dasselbe geschieht, wenn beide gemessene Winkel stumpf sind.

Der Beweis für die Richtigkeit der Auflösung lässt sich führen, wenn man in Betracht zieht, dass die Vierecke, welche auch in diesem Falle durch Ausführung der Construction entstehen, ebenfalls Kreisvierecke sind. Denn BM und BN bleiben auch bei dieser Construction die Durchmesser der Kreisvierecke $BSAM$ und $BSCN$, weil die rechten Winkel BAM und BSM auf BM, und die rechten Winkel BCN und BSN auf BN stehen. Die Punkte S und A liegen dann aber auf einer Seite von BM, ebenso die Punkte S und C auf einer Seite von BN, während in Fig. 22. die Punkte A und S auf entgegengesetzten Seiten von dem Durchmesser BM des Kreisvierecks $BSMA$, und die Punkte C und S auf entgegengesetzten Seiten von dem Durchmesser BN des Kreisvierecks $BSNC$ sich befinden.

Bemerkung. Da man bei dieser in dem Vorstehenden abgehandelten Bestimmungsart den Compass nicht gebraucht, so ist sie genauer als jede der vorhergehenden, daher zu Vermessungen vorzüglich geeignet; sie wird aber ganz unbrauchbar, wenn die drei Objecte und der Beobachtungsort in der Peripherie eines Kreises liegen. In diesem Falle wird der Ort des Schiffes in unendlich vielen Punkten der durch die drei Objecte gehenden Kreislinie, den gemessenen Winkeln nach, sein können, weshalb es stets zweckmässig ist, welche Constructionsart man auch anwendet, auch bei dieser Bestimmungsart kurz vor oder nach der Messung der Winkel eins der Objecte, zwischen denen die Winkel gemessen sind, mit dem Compasse zu peilen, welche Peilung dann über den Ort des Schiffes entscheidet. — Wie man den Beobachtungsort durch Messung zweier Winkel mittelst Rechnung finden kann, ist in §. 15. der ebenen Trigonometrie gezeigt.

§. 44.

Vermittelst der Karte den loxodromischen Curs nebst der Distanz, wie auch durch Rechnung den Curs und die Distanz im grössten Kreise von dem Abgangs- nach dem Bestimmungsorte zu finden.

I. Vermittelst der Karte den loxodromischen Curs nebst der Distanz zu finden.

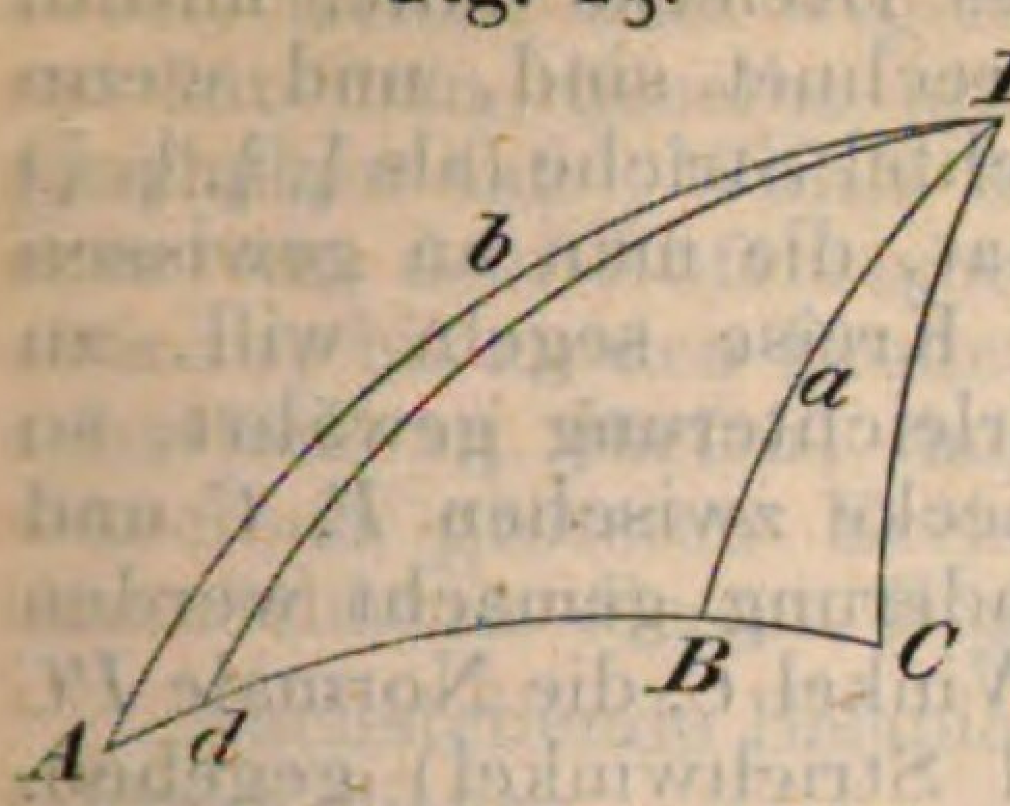
Nachdem der Abgangsort des Schiffes in der Karte nach der einen oder anderen Methode des vorstehenden Paragraphen bestimmt ist, kommt es zunächst darauf an, den Curs und die Distanz zu ermitteln, welche das Schiff segeln muss, um seinen Bestimmungsort zu erreichen. Selten wird dieser mit einem Curse erreicht werden können, weil in den meisten Fällen zwischen beiden Orten Landstrecken, Inseln und Untiefen liegen, von welchen das Schiff stets in angemessener Entfernung gehalten werden muss. In diesem Falle sind in der Karte zwischen beiden Orten zweckmässige Zwischenpunkte zu wählen. Diese Punkte müssen so liegen, dass, wenn sie unter einander und mit dem Abgangs- und Bestimmungs-

orte durch gerade Linien verbunden werden, wodurch zwischen diesen Orten eine gebrochene Linie entsteht, diese überall von Inseln, Untiefen und dem Lande mindestens einige Seemeilen entfernt ist. Man bestimmt nun den Curs und die Distanz von dem Abgangsorte nach dem ersten (nächsten) Zwischenpunkte, von diesem nach dem zweiten Zwischenpunkte u. s. w., wie in §. 41. unter III. gezeigt ist. Die auf diesem Wege erhaltenen missweisenden Curse muss das Schiff nach dem Compasse steuern, wenn letzterer keine Localdeviation hat, anderen Falles ist diese noch vorher darauf anzuwenden. Aus der Fahrt des Schiffes und der zu segelnden Distanz wird man leicht bestimmen können, wie lange jeder Curs gesteuert werden muss. Auf diese Weise wird verfahren, wenn man mit günstigem Winde segelt; mit ungünstigem aber bedingt dieser den Curs. Im letzteren Falle segelt man gewöhnlich über den einen und den anderen Bug beim Winde, man wird indessen immer den Bug wählen, über dem man sich dem Bestimmungsorte am meisten nähert; kommt man aber über diesem Buge dem Lande oder Untiefen zu nahe, so muss man über Stag gehen, und eine Zeit lang über den weniger vortheilhaften Bug liegen, bis man das Schiff wieder über den vortheilhaftesten Bug legen, und somit frei passiren kann.

II. Vermittelst sphärischer Trigonometrie den Curs im grössten Kreise, wie auch die Distanz in demselben zu finden.

Es ist in der sphärischen Trigonometrie (§. 18. Abschnitt I.) erklärt, dass der grösste Kreisbogen der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche einer Kugel ist, weil dieser von allen zwischen denselben Punkten auf der Oberfläche der Kugel möglichen krummen Linien der geraden Linie am nächsten kommt. Der nach I. vermittelst der Karte gefundene Curs findet nur im grössten Kreise statt, wenn man rechtweisend Nord oder Süd, oder wenn man unterm Aequator ist und rechtweisend Ost oder West segelt. Segelt man dagegen auf irgend einer anderen Breite rechtweisend Ost oder West, so fährt man im Breitenparallel, und wenn man einen zwischen den vier rechtweisenden Hauptpunkten liegenden Curs steuert, so fährt man in der Loxodromie. Da nun dem Seemanne daran gelegen ist, auf dem möglichst kürzesten Wege über See an seinen Bestimmungsort zu gelangen, so sucht man durch grösste Kreissegelung den Weg möglichst abzukürzen, obgleich, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, für ein Segelschiff wohl nur bei grossen Distanzen die in nicht niederer Breite und nicht nahe Nord oder Süd rechtweisend in einem Meere zu segeln sind, woselbst auf günstigen Wind zu rechnen ist, wie z. B. vom Cap der guten Hoffnung bis zur Südseite Australiens, in unseren Gegenden aber selten, selbst bei günstigem Winde, dadurch ein wesentlicher Vortheil zu erzielen sein dürfte. Nimmt man aber an, dass gekreuzt werden muss, so wird durch die grösste Kreissegelung mehr Zeit erspart und zwar deshalb, weil mehr Zeit gebraucht wird, um das, was die Distanz in der Loxodromie länger als im grössten Kreise ist, durch Laviren als mit günstigem Winde zurückzulegen. Besonders kann auch noch ein Vortheil durch die grösste Kreissegelung entstehen, wenn z. B. der Wind dem Curse in der Loxodromie gerade entgegengesetzt weht, dass man dann im grössten Kreise noch einen bedeutenden Schlagbug, ja selbst raumen Wind haben könnte. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass, um beim Laviren von der grössten Kreissegelung Nutzen zu haben, das Schiff über den Bug gelegt werden muss, der dem Curse im grössten Kreise am nächsten kommt, oder dass die im grössten Kreise zu segelnden Curse und Distanzen berechnet, die dadurch erhaltenen Punkte

Fig. 23.



in die Karte getragen und längs der Verbindungslinie derselben zu kreuzen ist.

Es sei (Fig. 23.) APB ein sphärisches Dreieck zwischen dem Abgangsorte A, dem Bestimmungsorte B und dem Erdpol P, der letzterem Orte am nächsten liegt, so ist der sphärische Winkel A der rechtweisende Curs, den das Schiff im ersten Moment der Abfahrt steuern muss. Dieser Curs verändert sich aber strenge genommen jeden Augenblick und ist, wenn das Schiff in B ankommt $=$ dem Winkel PBC. Man sieht hieraus, dass es, wenn man nicht im Meridian oder Aequator segelt, strenge genommen nicht möglich ist, im grössten Kreise zu fahren; sondern es bleibt nichts weiter übrig, als sich demselben genugsam zu nähern. Es wird zu diesem Zwecke mit Rücksicht darauf, dass dem Steuerer der Curs immer nur auf volle, halbe oder viertel Striche aufgegeben wird, zweckmässig sein, wenn man den Curs, der in dem gedachten Beispiele gleich dem sphärischen Winkel A ist, möglichst nahe, so lange steuern lässt, bis der Curs im grössten Kreise auf den nächsten ungeraden achtel Compassstrich trifft; denn, je nachdem der Curs im grössten Kreise zu- oder abnehmend ist, dem nächstgrösseren oder nächstkleineren viertel Compassstrich so lange steuern lässt, bis der nächstgrössere oder kleinere ungerade achtel Strich des Compasses der Curs im grössten Kreise wird u. s. w., bis man am Bestimmungsorte angelangt ist.

In dem gedachten sphärischen Dreieck (Fig. 23.) ist b das Complement der Breite des Abfahrtsortes, a das Complement der Breite des Bestimmungsortes, und Winkel $APB =$ dem Längenunterschied beider Orte. Für den Fall, dass in der Figur immer der mit dem Bestimmungsorte auf derselben Seite des Aequators liegende Pol gezeichnet ist, wird, wenn der Abgangsort auf der entgegengesetzten Seite des Aequators liegt, die Seite AP oder $b = 90° +$ der Breite des Abgangsortes. Jedenfalls ist aber das in Rede stehende sphärische Dreieck durch die angeführten Data bestimmt, und es ist nach §. 39. der sphärischen Trigonometrie

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B + A) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(b - a)}{\cos\tfrac{1}{2}(b + a)} \cdot \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\angle APB,$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B - A) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b - a)}{\sin\tfrac{1}{2}(b + a)} \cdot \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\angle APB,$$

nach welchen Gleichungen die halbe Summe und die halbe Differenz der Winkel PAB und ABP gefunden werden kann, und es giebt $\tfrac{1}{2}(B + A) \pm \tfrac{1}{2}(B - A)$ den grösseren und kleineren dieser Winkel.

Die Distanz AB im grössten Kreise kann demnächst nach der Sinusregel, oder wenn dieselbe nahe 90° sein sollte, nach der Formel in §. 46. der sphärischen Trigonometrie (Auflösung II.) genauer gefunden werden.

Um ferner auf eine leichte Art zu ermitteln, wie viel Distanz man bei jedem Curse segeln muss, bevor man den nächsten Curs steuern lässt, fälle man immer vom Pol P auf den grössten Kreisbogen AB oder dessen Verlängerung die Normale PC, welche, wenn der Winkel B des Dreiecks ABP stumpf ist, ausserhalb, also auf die Verlängerung von AB desselben fällt; ist aber der gedachte Winkel ABP spitz, so fällt die Normale innerhalb des Dreiecks. Ist nun $\angle ABP$ berechnet, so ist auch dessen Supplement, nämlich $\angle PBC$, als bekannt anzusehen, wodurch, da auch PB bekannt, das bei C rechtwinklige Dreieck PBC bestimmt ist, und kann man die beiden Katheten desselben, nämlich PC und BC, auf gewöhnlichem Wege finden. Es ist ferner $AC = AB \pm BC$, je nach-

dem die Normale ausserhalb oder innerhalb des Dreiecks fällt, mithin als bekannt anzunehmen, wenn AB und BC berechnet sind, und wenn man ausserdem die Curswinkel der ungeraden achtel Striche (als $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$) in Graden und Minuten ausgedrückt, ermittelt hat, die man an gewissen Punkten steuern muss, wenn man im grössten Kreise segeln will, zu welchem Behuf die nautische Tafel LIV. eine Erleichterung gewährt, so sind die sphärischen, bei C rechtwinkligen Dreiecke zwischen P, C und denjenigen Punkten, in welchen eine Cursveränderung gemacht werden soll, alle bestimmt; denn in ihnen ist der rechte Winkel C, die Normale PC und der gedachte Curswinkel (ungerade achtel Strichwinkel) gegeben. Wenn daher der zunächst an A liegende ungerade achtel Strichwinkel in d fiele, und der sphärische Winkel PdC mit d bezeichnet wird, so ist:

$$\sin dC = \tan PC \cdot \cot d$$

und $Ad = AC - dC =$ der Distanz, die man von A bis d, wo der Curs zu verändern ist, segeln muss. Ganz auf ähnliche Art lässt sich nun ermitteln, wie viele Seemeilen von d bis zum nächsten Punkte, wo der Curs um $\frac{1}{4}$ Strich verändert werden soll, zu segeln sind. Fällt die Normale PC innerhalb des Dreiecks, so hat man den Punkt C zu passiren, und es ist der Curs in C rechtweisend Ost oder West, welcher Curs der Annahme nach schon gesteuert werden muss von dem nächsten ungeraden achtel Strich-Punkte an, bevor man C erreicht, indem der sphärische Winkel des gedachten Dreiecks dort $= 7\frac{7}{8}$ Strich, und beim nächsten Punkte auf der anderen Seite von C derselbe $8\frac{1}{8}$ Strich, also das Mittel Ost oder West ist. Es ergiebt sich ferner leicht, dass die Distanzen auf jeder Seite des nächsten achtel Striches von C gleich sein müssen, und da zwischen diesen Punkten Ost oder West gesegelt werden muss, so braucht man nur, wenn man die Distanz vom nächsten Winkelpunkte an C berechnet hat, diese doppelt zu nehmen, um die rechtweisend Ost oder West zu segelnde Distanz zu erhalten. Ebenfalls ergiebt sich leicht bei Berechnung der gedachten sphärischen Dreiecke, dass zwischen den Punkten auf jeder Seite von C, deren Curse von der Ost- und Westrichtung gleich viel achtel Striche abweichen, in welchen Punkten die Curse zu ändern sind, auch die zu segelnden Distanzen gleich sein müssen, wodurch man der Berechnung dieser Distanzen überhoben ist.

Zu bemerken ist überhaupt noch in Bezug auf diesen Abschnitt, dass bei kleinen Distanzen überall auf fahrbaren Meeren, und auch bei grösseren Entfernungen in der Nähe des Aequators oder auf kleinen Breiten die grösste Kreissegelung nahe mit der Segelung im Breitenparallel, wie auch mit der Segelung in der Loxodromie zusammenfällt. Bei grossen Distanzen zeigen sich indessen die Abweichungen um so grösser, je grösser die Breite und je näher die Curse am wahren Ost oder West sind, und besonders finden auf höheren Breiten grössere Abweichungen zwischen dem Curse in der Loxodromie und den im grössten Kreise zu segelnden Cursen statt.

Es wird indessen, wenn die Länge des Abfahrts- und Bestimmungsortes bedeutend differirt, die Segelung im grössten Kreise dem Pol zu nahe kommen, oder doch auf zu hohe Breite führen, so dass man es vorzieht, in niederer Breite zu bleiben und theilweise auf den Vortheil, den die grösste Kreissegelung gewährt, zu verzichten. In einem solchen Falle kann man, jedoch mit Rücksicht auf die Meeresgegend und Jahreszeit einen Zwischenpunkt, etwa in der Mitte zwischen dem Abfahrts- und Bestimmungsorte, in der zu besegelnden Breite wählen, den man erst durch Segelung im grössten Kreise zu erreichen sucht, und von dem dann weiter im grössten Kreise nach dem eigentlichen Bestimmungsorte zu segeln ist. Befindet sich aber nicht zu weit von diesem Punkte eine

Insel, welche man wegen der Berichtigung des Bestecks ansteuern möchte, so hat man dieselbe als Zwischenpunkt zu nehmen, wie in Beispiel 4. geschehen ist. Wählt man diesen Zwischenpunkt nicht, so segele man erst von dem Abfahrtsorte im grössten Kreise nach dem Bestimmungsorte zu, bis an den Breitenparallel, den man glaubt, nicht polwärts überschreiten zu dürfen, dann in diesem Parallel weiter bis an den Bogen desselben grössten Kreises der nach dem Bestimmungsorte führt und demnächst in diesem Bogen nach letzterem.

Nachstehende Beispiele werden zur Erläuterung des angegebenen Verfahrens dienen.

Aufgabe 1. Von 15° 55′ SBr. und 5° 44′ WL. von Greenwich unweit St. James Town auf St. Helena nach unweit Cap Horn in 55° 59′ SBr. und 67° 16′ WL. von Greenwich sollen die mit den Cursen im grössten Kreise zwischen diesen beiden Punkten zusammenfallenden rechtsweisenden Curse von viertel zu viertel Compasstrich und die bei jedem Curse zu segelnden Distanzen berechnet, und das Besteck nach loxodromischer Rechnung aufgemacht, wie auch Curs und Distanz in der Loxodromie gefunden werden.

Der früheren Annahme zufolge ist der Abfahrtspunkt mit A, der Bestimmungspunkt mit B, der Südpol in dieser Aufgabe mit P und die Complemente der Breiten dieser Orte mit b und a zu bezeichnen. Es ist daher:

$\frac{1}{2}(b+a) = 54° \; 3'$ lg sec $= 0{,}23130$ lg cosec $= 0{,}09177$

$\frac{1}{2}(b-a) = 20° \; 2'$ lg cos $= 9{,}97289$ lg sin $= 9{,}53475$

der halbe Längenunterschied,

oder $\frac{1}{2} \angle P = 30° \; 46'$ lg cotg $= 0{,}22524$ lg cotg $= 0{,}22524$

lg tg $\frac{1}{2}(B+A) = 0{,}42943$ lg tg $\frac{1}{2}(B-A) = 9{,}85176$

$$\frac{1}{2}(B+A) = 69° \; 36'$$
$$\frac{1}{2}(B-A) = 35° \; 24'$$
$$A = 34° \; 12'$$
$$B = 105° \; 0',$$

mithin ist der von A zuerst zu segelnde rechtweisende Curs = S. 34° 12′ West und der zuletzt zu segelnde = S. 75° 0′ West.

Die Distanz im grössten Kreise zu finden, hat man folgende Proportion:

sin A : sin a = sin P (Längenunterschied) : sin Dist. im gr. Kreise AB.

lg cosec 34° 12′ = 0,25020

lg sin 34° 1′ = 9,74775

lg sin 61° 32′ = 9,94404

lg sin AB = 9,94199

AB = 61° 3′,

mithin ist die Distanz im grössten Kreise = 3663 Seemeilen.

Der Winkel A, oder der vom Abgangsorte zu segelnde rechtweisende Curs ist S. 34° 12′ W. oder 0° 27′ westlicher als SWzS. Da der Curs im grössten Kreise aber grösser wird, so hat man bis zum nächsten ungeraden achtel Compassstrich, also bis der Curs im grössten Kreise S. 35° 9′ W. ist (nautische Tafel LIV.), nicht näher an Süden als rechtweisend SWzS. zu segeln. Nachdem dieser Punkt erreicht ist, segelt man rechtweisend SW¾S, bis der Curs im grössten Kreise ⅛ Strich grösser, also = S. 37° 58′ W. ist u. s. w., bis zum nächstkleineren ungeraden achtel Compassstriche, als das Supplement des Winkels B, von wo ein Curs nahe = diesem Supplement oder S. 75° W. = WSW ¾ W — nicht westlicher — bis B zu segeln ist.

Zu segelnde rechtweisende Curse.	bis der Curs im grössten Kreise ist:	Dist.	Breiten-Unterschiede.	Erreichte Breiten.	Meridional-Theile.	Meridional-Differenz.	Längen-Unterschiede.	Bekommene Längen.
	rechtweisend.			verlassene Breite ist = 15° 55′ S	967,5			verlassene Länge ist = 5° 44′ W
SW z. S nicht südlicher.	 S 35° 9′ W	313 Sm	260,2′	20 15,0 "	1241,1	273,6	3° 2,9′	8 46,9 "
SW ¾ S	 S 37 58 W	624 "	501,3	28 36,3 "	1792,4	551,3	6 48,8	15 35,7 "
SW ½ S	 S 40 47 W	436 "	337,0	34 13,3 "	2187,6	395,2	5 24,0	20 59,7 "
SW ¼ S	 S 43 36 W	342 "	253,4	38 26,7 "	2502,3	314,7	4 45,2	25 44,9 "
SW	 S 46 24 W	282 "	199,4	41 46,1 "	2763,0	260,7	4 20,7	30 5,6 "
SW ¼ W	 S 49 13 W	243 "	163,2	44 29,3 "	2986,7	223,7	4 6,7	34 12,3 "
SW ½ W	 S 52 2 W	214 "	135,8	46 45,1 "	3180,9	194,2	3 56,6	38 8,9 "
SW ¾ W	 S 54 51 W	192 "	114,4	48 39,5 "	3350,9	170,0	3 49,2	41 58,1 "
SW z. W	 S 57 39 W	172 "	95,6	50 15,1 "	3498,0	147,1	3 40,4	45 38,5 "
SW z. W ¼ W	 S 60 28 W	160 "	82,3	51 37,4 "	3628,6	130,6	3 37,9	49 16,4 "
SW z. W ½ W	 S 63 17 W	149 "	70,2	52 47,6 "	3743,2	114,6	3 34,3	52 50,7 "
SW z. W ¾ W	 S 66 6 W	139 "	59,4	53 47,0 "	3842,6	99,4	3 30,1	56 20,8 "
WSW	 S 68 54 W	132 "	50,5	54 37,5 "	3928,9	86,3	3 28,4	59 49,2 "
WSW ¼ W	 S 71 43 W	125 "	42,1	55 19,6 "	4002,3	73,4	3 25,3	63 14,5 "
WSW ½ W	 S 74 32 W	121 "	35,1	55 54,7 "	4064,4	62,1	3 24,8	66 39,3 "
WSW ¾ W nicht westlicher.	 S 75 0 W.	19 "	4,6	55 59,3 "	4072,7	8,3	0 33,0	67 12,3 "

Die Normale von P auf AB zu finden.

Es ist $\sin PC = \sin$ Supplem. $\angle B \cdot \sin a$.

$$\lg \sin 75^\circ\ 0' = 9{,}98494$$
$$\lg \sin 34^\circ\ 1' = \underline{9{,}74775}$$
$$\lg \sin PC \quad = 9{,}73269,$$

also die Normale $PC = 32^\circ\ 42'$, welche, da $\angle ABP$ stumpf ist, ausserhalb des Dreiecks fällt.

BC zu finden.

Es ist $\operatorname{tang} BC = \cos$ Supplem. $\angle B \cdot \operatorname{tang} a$.

$$\lg \cos\ 75^\circ\ 0' = 9{,}41300$$
$$\lg \operatorname{tang} 34^\circ\ 1' = \underline{9{,}82926}$$
$$\lg \operatorname{tang} BC \quad = 9{,}24226$$
$$BC = 9^\circ\ 55'$$
$$\underline{AB = 61^\circ\ 3'}$$
$$AB + BC = AC = 70^\circ\ 58'.$$

Um die bei jedem Curse zu segelnde Distanz zu finden, hat man folgende Gleichung:

$\sin x = \operatorname{tang} PC \cdot \operatorname{cotg}$ der in der zweiten Rubrik vorstehender Zusammenstellung angegebenen Curse für jeden ungeraden achtel Strich.

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 35° 9′ = 0,15236
lg sin x = 9,95989
x = 65° 45′
AC = 70° 58′
die 1ste zu segelnde Dist. = 5° 13′ = 313;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 37° 58′ = 0,10771
lg sin x = 9,91524
x = 55° 21′
65° 45′
die 2te zu segelnde Dist. = 10° 24′ = 624;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 40° 47′ = 0,06416
lg sin x = 9,87169
x = 48° 5′
55° 21′
die 3te zu segelnde Dist. = 7° 16′ = 436;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 43° 36′ = 0,02123
lg sin x = 9,82876
x = 42° 23′
48° 5′
die 4te zu segelnde Dist. = 5° 42′ = 342;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 46° 24′ = 9,97878
lg sin x = 9,78631
x = 37° 41′
42° 23′
die 5te zu segelnde Dist. = 4° 42′ = 282;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 49° 13′ = 9,93584
lg sin x = 9,74337
x = 33° 38′
37° 41′
die 6te zu segelnde Dist. = 4° 3′ = 243;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 52° 2′ = 9,89229
lg sin x = 9,69982
x = 30° 4′
33° 38′
die 7te zu segelnde Dist. = 3° 34′ = 214;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 54° 51′ = 9,84764
lg sin x = 9,65517
x = 26° 52′
30° 4′
die 8te zu segelnde Dist. = 3° 12′ = 192;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 57° 39′ = 9,80168
lg sin x = 9,60921
x = 24° 0′
26° 52′
die 9te zu segelnde Dist. = 2° 52′ = 172;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 60° 28′ = 9,75323
lg sin x = 9,56076
x = 21° 20′
24° 0′
die 10te zu segelnde Dist. = 2° 40′ = 160;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 63° 17′ = 9,70184
lg sin x = 9,50937
x = 18° 51′
21° 20′
die 11te zu segelnde Dist. = 2° 29′ = 149;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 66° 6′ = 9,64654
lg sin x = 9,45407
x = 16° 32′
18° 51′
die 12te zu segelnde Dist. = 2° 19′ = 139;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 68° 54′ = 9,58644
lg sin x = 9,39397
x = 14° 20′
16° 32′
die 13te zu segelnde Dist. = 2° 12′ = 132;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 71° 43′ = 9,51903
lg sin x = 9,32656
x = 12° 15′
14° 20′
die 14te zu segelnde Dist. = 2° 5′ = 125;

lg tang 32° 42′ = 9,80753
lg cotg 74° 32′ = 9,44201
lg sin x = 9,24954
x = 10° 14′
12° 15′
die 15te zu segelnde Dist. = 2° 1′ = 121;

BC = letztes x = 9° 55′
10° 14′
letzte zu segelnde Dist. = 19 Seem.

Den Curs und die Distanz in der Loxodromie zu finden.

Abgangsorts-Breite . . . = 15° 55′ S. Abgangsorts-Länge . . . = 5° 44′ W.
Bestimmungsorts-Breite = 55° 59′ S. Bestimmungsorts-Länge = 67° 16′ W.
Breitenunterschied = 40° 4′ S. Längenunterschied = 61° 32′ W.
= 2404′. = 3692′.

15° 55′ Meridionaltheile = 967,53
55° 59′ Meridionaltheile = 4072,12
Meridionaldifferenz = 3104,59.

Meridionaldiff. : Breit.-Untersch. = Läng.-Untersch. : Abw.
lg Breit.-Untersch. = 3,38093
lg Läng.-Untersch. = 3,56726
= 6,94819
lg Meridionaldiff. = 3,49200
lg Abweichung = 3,45619
Abweichung = 2858,8 Sm. W.
Br.-Untersch. : Abw. = r : tang Curs.
lg Abweich. + lg r = 13,45619
lg Breit.-Untersch. = 3,38093
lg tang Curs = 10,07526.
Der rechtweisende Curs in der Loxodromie also = S. 49° 56' West.
sin Curs : r = Abw. : Dist.
lg Abweich. + lg r = 13,45619
lg sin Curs = 9,88383
lg Dist. = 3,57236.
Distanz in der Loxodromie also = 3735 Seemeilen,
im grössten Kreise = 3663 Seemeilen.
Die Distanz in der Loxodromie ist also = 72 Seemeilen grösser als die im grössten Kreise.

Wenn diese 72 Seemeilen mittelst Lavirens zurückgelegt werden müssten, der Wind dem Curse in der Loxodromie gerade entgegengesetzt wäre, das Schiff 6 Strich am Winde läge, 6 Knoten Fahrt machte und ¼ Strich Abtrift hätte, so würde es in 24 Stunden 48,5 Seemeilen vorwärts kommen, also zu 72 Seemeilen nahe 1 Tag 11,6 Stunden gebrauchen, welche Zeit, wenn im grössten Kreise segelnd, gewonnen sein könnte.

Aufgabe 2. Man befindet sich westwärts der Newfoundland-Bank in 42° 0' NBr. und 60° 0' WL. von Greenwich und soll die im grössten Kreise zu segelnden rechtweisenden Curse von viertel zu viertel Compassstrich, wie auch die, bei jedem Curse zu segelnden Distanzen und den Curs und die Distanz in der Loxodromie zwischen jenem und einem Punkte, der südwestwärts der Scilly-Inseln in 49° 46' NBr. und 6° 30' WL. von Greenwich liegt, berechnen, und das Besteck für alle gesegelten Curse in den Loxodromien aufmachen.

Der gedachte Abfahrtspunkt liegt in 42° 0' NBr. und 60° 0' WL.
Der Bestimmungspunkt liegt in 49° 46' NBr. und 6° 30' WL.
Längenunterschied ($\angle P$) = 53° 30'
$\frac{1}{2}\angle P$ = 26° 45'.

Es ist b = 48° 0'
a = 40° 14'

$\frac{1}{2}(b+a)$ = 44° 7' lg sec = 0,14392 lg cosec = 0,15732
$\frac{1}{2}(b-a)$ = 3° 53' lg cos = 9,99900 lg sin = 8,83075
$\frac{1}{2}P$ = 26° 45' lg cotg = 0,29753 lg cotg = 0,29753
$\frac{1}{2}(B+A)$ lg tang = 0,44045 lg tang $\frac{1}{2}(B-A)$ = 9,28560
$\frac{1}{2}(B+A)$ = 70° 4'
$\frac{1}{2}(B-A)$ = 10° 55'
A = 59° 9'
B = 80° 59'.

mithin ist der im Anfange zu segelnde rechtweisende Curs = N. 59° 9' Ost oder nahe NOzO¾O, und N. 99° 1' Ost rechtweisend ist der zuletzt zu segelnde Curs.

Es verhält sich ferner:

$\sin B : \sin b = \sin P : \sin AB$ (Distanz im grössten Kreise).

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{cosec}\ 80^\circ\ 59' &= 0{,}00540 \\ \lg \sin\ 48^\circ\ \ 0' &= 9{,}87107 \\ \lg \sin\ 53^\circ\ 30' &= 9{,}90518 \\ \hline \lg \sin AB\ &= 9{,}78165, \end{aligned}$$

AB oder die Distanz im grössten Kreise $= 37^\circ\ 13' = 2233$ Seem.

Die zu segelnden rechtweisenden Curse, die Distanzen, wie auch die Resultate der loxodromischen Besteckrechnung sind in nachstehender Tafel gegeben und nach derselben folgen die Berechnungen jeder dieser Distanzen u. s. w.

Zu segelnde rechtweisende Curse,	bis der Curs im grössten Kreise ist.	Dist.	Breiten-Unter-schiede.	Bekommene Breiten.	Meridio-nal-Theile.	Meridio-nal-Differenz.	Längen-Unter-schiede.	Bekommene Längen.
	rechtweisend.			verlassene Breite ist = 42° 0′ N	2781,7			verlassene Länge ist = 60° 0′ W
NO z. O ¼ O nicht nördlicher.	 N 60° 28′ O	101 Sm.	51,9′	42 51,9 "	2852,0	70,3	1° 57,3′	58 2,7 "
NO z. O ½ O	 N 63 17 O	201 "	94,7	44 26,6 "	2982,9	130,9	4 5,0	53 57,7 "
NO z. O ¾ O	 N 66 6 O	186 "	79,5	45 46,1 "	3095,6	112,7	3 58,2	49 59,5 "
ONO	 N 68 54 O	174 "	66,6	46 52,7 "	3192,0	96,4	3 52,8	46 6,7 "
ONO ¼ O	 N 71 43 O	165 "	55,6	47 48,3 "	3274,1	82,1	3 49,4	42 17,3 "
ONO ½ O	 N 74 32 O	158 "	45,9	48 34,2 "	3342,9	68,8	3 46,8	38 30,5 "
ONO ¾ O	 N 77 21 O	152 "	36,9	49 11,1 "	3399,0	56,1	3 44,1	34 46,4 "
O z. N	 N 80 9 O	147 "	28,7	49 39,8 "	3443,2	44,2	3 42,1	31 4,3 "
O ¾ N	 N 82 58 O	144 "	21,1	50 0,9 "	3475,9	32,7	3 40,6	27 23,7 "
O ½ N	 N 85 47 O	142 "	13,9	50 14,8 "	3497,6	21,7	3 39,9	23 43,8 "
O ¼ N	 N 88 36 O	140 "	6,9	50 21,7 "	3508,4	10,8	3 39,7	20 4,1 "
Ost	 N 91 24 O	140 "	0,0	50 21,7 "	3508,4	0,0	3 39,5	16 24,6 "
O ¼ S	 N 94 13 O	140 "	6,9	50 14,8 "	3497,6	10,8	3 39,7	12 44,9 "
O ½ S	 N 97 2 O	142 "	13,9	50 0,9 "	3475,9	21,7	3 39,9	9 5,0 "
O ¾ S	 N 99 1 O.	101 "	14,8	49 46,1 "	3452,9	23,0	2 35,3	6 29,7 "

Die nach der Besteckaufmachung gefundene Breite weicht nur 0,1′ und die Länge nur 0,3′ von der Breite und Länge des Bestimmungspunktes ab, woraus sich entnehmen lässt, dass, bei Veränderung der Curse von viertel zu viertel Compassstrich die loxodromischen Distanzen genau genug mit dem grössten Kreise zusammenfallen.

Die Normale von P auf AB oder PC zu finden.

Da Winkel B spitz gefunden ist, fällt C zwischen A und B.

Es ist nun $\sin PC = \sin \angle B \cdot \sin a$.

$$\begin{aligned} \lg \sin 80^\circ\ 59' &= 9{,}99460 \\ \lg \sin 40^\circ\ 14' &= 9{,}81017 \\ \hline \lg \sin PC\ &= 9{,}80477, \end{aligned}$$

die Normale $PC = 39^\circ\ 38'$.

BC zu finden.

Es ist tang $BC = \cos \angle B \cdot \operatorname{tang} a$.

$$\begin{aligned}
\lg \cos\ 80^\circ\ 59' &= 9{,}19513 \\
\lg \operatorname{tang}\ 40^\circ\ 14' &= 9{,}92740 \\
\lg \operatorname{tang} BC &= 9{,}12253 \\
BC &= 7^\circ\ 33' \\
AB &= 37^\circ\ 13' \\
AB - BC = AC &= 29^\circ\ 40'.
\end{aligned}$$

Die Distanzen zu finden.

Es ist

$\sin x = \operatorname{tang} 39^\circ\ 38' \cdot \operatorname{cotg}$ der in der vorstehenden Zusammenstellung in der zweiten Rubrik angegebenen Curse.

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 60^\circ\ 28' &= 9{,}75323 \\
\lg \sin x &= 9{,}67139 \\
x &= 27^\circ\ 59' \\
AC &= 29^\circ\ 40'
\end{aligned}$$

die 1ste zu segelnde Dist. $= 1^\circ\ 41' = 101$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 63^\circ\ 17' &= 9{,}70184 \\
\lg \sin x &= 9{,}62000 \\
x &= 24^\circ\ 38' \\
&\ 27^\circ\ 59'
\end{aligned}$$

die 2te zu segelnde Dist. $= 3^\circ\ 21' = 201$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 66^\circ\ 6' &= 9{,}64654 \\
\lg \sin x &= 9{,}56470 \\
x &= 21^\circ\ 32' \\
&\ 24^\circ\ 38'
\end{aligned}$$

die 3te zu segelnde Dist. $= 3^\circ\ 6' = 186$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 68^\circ\ 54' &= 9{,}58644 \\
\lg \sin x &= 9{,}50460 \\
x &= 18^\circ\ 38' \\
&\ 21^\circ\ 32'
\end{aligned}$$

die 4te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 54' = 174$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 71^\circ\ 43' &= 9{,}51903 \\
\lg \sin x &= 9{,}43719 \\
x &= 15^\circ\ 53' \\
&\ 18^\circ\ 38'
\end{aligned}$$

die 5te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 45' = 165$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 74^\circ\ 32' &= 9{,}44201 \\
\lg \sin x &= 9{,}36017 \\
x &= 13^\circ\ 15' \\
&\ 15^\circ\ 53'
\end{aligned}$$

die 6te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 38' = 158$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 77^\circ\ 21' &= 9{,}35111 \\
\lg \sin x &= 9{,}26927 \\
x &= 10^\circ\ 43' \\
&\ 13^\circ\ 15'
\end{aligned}$$

die 7te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 32' = 152$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 80^\circ\ 9' &= 9{,}23962 \\
\lg \sin x &= 9{,}15778 \\
x &= 8^\circ\ 16' \\
&\ 10^\circ\ 43'
\end{aligned}$$

die 8te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 27' = 147$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 82^\circ\ 58' &= 9{,}09123 \\
\lg \sin x &= 9{,}00939 \\
x &= 5^\circ\ 52' \\
&\ 8^\circ\ 16'
\end{aligned}$$

die 9te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 24' = 144$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 85^\circ\ 47' &= 8{,}86763 \\
\lg \sin x &= 8{,}78579 \\
x &= 3^\circ\ 30' \\
&\ 5^\circ\ 52'
\end{aligned}$$

die 10te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 22' = 142$;

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tang}\ 39^\circ\ 38' &= 9{,}91816 \\
\lg \operatorname{cotg}\ 88^\circ\ 36' &= 8{,}38809 \\
\lg \sin x &= 8{,}30625 \\
x &= 1^\circ\ 10' \\
&= 3^\circ\ 30'
\end{aligned}$$

die 11te zu segelnde Dist. $= 2^\circ\ 20' = 140$ Seem.

Da bis zum Punkte, dessen Curswinkel $= 91^\circ\ 24'$ ist, x auf die entgegengesetzte Seite der Normale *PC* fällt und gleich dem vorhergefundenen $x = 1^\circ\ 10'$ sein muss, so ist die bis zum Curse im grössten Kreise $=$ N. $91^\circ\ 24'$ O. zu segelnde, also die 12te Distanz $= 2 \cdot (1^\circ\ 10') = 2^\circ\ 20'$ $= 140$ Seem.

Die 13te Distanz zu finden, ergiebt sich $x = x$ bei der 11ten Distanz, weil die auf jeder Seite der Normale von PC liegenden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke congruent, wenn die Winkel an der Grundlinie gleich sind, welches der Fall ist, wenn der in Rede stehende ungerade achtel Strichwinkel stumpf und dessen Supplement gleich dem auf der anderen Seite der Normale liegenden spitzen Winkel ist. Der ungerade achtel Cursstrichwinkel gleich 94° 13′ giebt nämlich den sphärischen Winkel des zu berechnenden sphärischen rechtwinkligen Dreiecks = 180° — 94° 13′ = 85° 47′; also für den Winkel = 94° 13′ ist

$x = 3° 30′$,

das zunächst vorhergefundene $x = 1° 10′$

giebt die 13te Distanz = 2° 20′ = 140 Seem.

Die 14te Distanz ergiebt sich = der 10ten Distanz = 2° 22′ = 142 Seem.

Die letzte oder 15te Distanz endlich ist = BC — des zuletztgefundenen x, welches, da cotg 97° 2′ = cotg 82° 58′ ist,

auch = 5° 52′ sein muss,

$BC = 7° 33′$

giebt die 15te Distanz = 1° 41′ = 101 Seem.

Curs und Distanz in der Loxodromie zu finden.

Abgangsorts-Breite = 42° 0′ N. Abgangsorts-Länge = 60° 0′ W.
Bestimmungsorts-Breite = 49° 46′ N. Bestimmungsorts-Länge = 6° 30′ W.

Breitenunterschied = 7° 46′ N. Längenunterschied = 53° 30′ O.
= 466′. = 3210′.

42° 0′ Meridionaltheil. = 2781,7
49° 46′ Meridionaltheil. = 3452,7
Meridionaldifferenz = 671,0.

Es ist

Meridionaldiff.: Br.-Untersch. = Läng.-Untersch. : Abw.

lg Breit.-Untersch. = 2,66839
lg Läng.-Untersch. = 3,50651
6,17490
lg Meridionaldiff. = 2,82672
lg Abweichung = 3,34818
Abweichung = 2229,4 Seem. Ost.

Es verhält sich ferner

Br.-Untersch. : Abw. = r : tang Curs.

lg Abweich. + lg r = 13,34818
lg Breit.-Untersch. = 2,66839
lg tang Curs = 10,67979
rechtweisender Curs = N. 78° 12′ Ost.

Die Proportion, wonach die Distanz gefunden werden kann, ist

sin Curs : r = Abw. : Dist.

lg Abweich. + lg r = 13,34818
lg sin Curs = 9,99072
lg Dist. = 3,35746,

also die Distanz in der Loxodromie = 2277,5 Seemeilen,
die Distanz im grössten Kreise ist = 2233,0 Seemeilen,
die Distanz in der Loxodromie mithin grösser um 44,5 Seemeilen.

Um diese Distanz mittelst Kreuzens, unter den im ersten Beispiel angenommenen Bedingungen zurückzulegen, würden nahe 22 Stunden erforderlich sein.

Berechnet man als drittes Beispiel den ersten und letzten Curs, wie auch die Distanz im grössten Kreise von 74° 0' NBr. und 25° 0' OL. von Greenwich, bis unweit Cap Sweetnose oder bis in 69° 0' NBr. und 41° 30' OL. von Greenwich, und auch den Curs und die Distanz zwischen diesen Punkten in der Loxodromie, so ergiebt sich der erste Curs im grössten Kreise = rechtweisend N. 125° 38' Ost und der letzte Curs = N. 141° 18' Ost; die Distanz im grössten Kreise findet man = 7° 11' = 431 Seem.

In der Loxodromie ergiebt sich der rechtweisende Curs = S. 46° 9' Ost = N. 133° 51' Ost, die Distanz aber = 433 Seemeilen, also nur 2 Seemeilen grösser als im grössten Kreise. Obgleich nun die Differenz zwischen der Distanz im grössten Kreise und in der Loxodromie mit der Breite, und auch je näher die beiden Orte in demselben Parallel liegen, wächst, so sieht man doch aus vorstehendem Beispiele, dass, bei nicht sehr grosser Distanz, selbst im hohen Norden, jedenfalls nur eine nicht zu beachtende Verkürzung des Weges durch die grösste Kreissegelung zu erzielen sein dürfte. Durch die Abweichung der Curse im grössten Kreise von dem Curse in der Loxodromie könnte dagegen vielleicht noch eher ein Vortheil bei der Fahrt im grössten Kreise erwachsen, wenn nämlich der Wind feststehend und dem loxodromischen Curse gerade entgegengesetzt wäre, oder auch, wenn derselbe mit den verschiedenen Cursen im grössten Kreise günstig veränderte, welche Fälle indessen durchschnittlich auch nur selten sein dürften.

Berechnet man endlich im Breitenparallel von 71° 30' Breite für 433 Seemeilen Distanz den Längenunterschied, so ergiebt sich derselbe = 22° 45', und wenn man die im grössten Kreise zurückzulegende Distanz berechnet, die erforderlich ist, um 22° 45' in Länge zu verändern, so findet man dieselbe 431 Seemeilen, also ebenfalls nur 2 Seemeilen kürzer.

Berechnet man als viertes Beispiel von unweit dem Cap der guten Hoffnung in 34° 10' SBr. und 18° 30' OL. von Greenwich nach dem Süd-Cap des Van-Diemenslandes, in 43° 38' SBr. und 146° 50' OL. von Greenwich den ersten und letzten Curs im grössten Kreise, nebst der Distanz in demselben und auch den Curs und die Distanz in der Loxodromie, so ergiebt sich:

der rechtw. Curs am Anfange im grössten Kreise = S. 34° 36' O.,
» » » am Ende » » » = S. 139° 31' O.
Die im grössten Kreise zu segelnde Distanz . . . = 89° 4',6
= 5344,6 Seem.
Die Distanz in der Loxodromie = 6003,6 Seem.

Der Weg wird mithin durch grösste Kreissegelung abgekürzt um 659 Seem.

Der Curs in der Loxodromie ist rechtweisend S. 84° 34' Ost.

Die Normale vom Südpol auf den grössten Kreis zwischen dem Abfahrts- und Bestimmungspunkte aber ergiebt sich = 28° 1' und so ist die grösste Breite, auf die man bei der grössten Kreissegelung kommt = 90° — 28° 1' = 61° 59' Süd, welche, des sich dort selbst im Sommer häufig vorfindenden Eises wegen, zu vermeiden ist. —

Wenn man nun als Zwischenpunkt die Kerguelen in Sicht segeln will und zu diesem Behuf vom Abfahrtspunkte Curs und Distanz im grössten Kreise bis auf 48° 30' SBr. und 69° 2' OL. von Greenwich berechnet, und

demnächst von diesem Punkte bis zum Bestimmungsorte ebenfalls Curs und Distanz im grössten Kreise ermittelt, so ergiebt sich:

erster Curs im grössten Kreise von 34° 10′ SBr. und 18° 30′ OL. bis 48° 30′ SBr. und 69° 2′ OL. = rechtw. S. 53° 10′ Ost,
letzter Curs im gr. Kreise zwischen diesen Punkten = S. 88° 3′ Ost;
erster Curs im grössten Kreise von 48° 30′ SBr. und 69° 2′ OL. bis 43° 38′ SBr. und 146° 50′ OL. = rechtw. S. 64° 9′ Ost,
letzter Curs im gr. Kreise zwischen diesen Punkten = S. 124° 31′ Ost.

Die Distanz im grössten Kreise vom Abfahrts- bis zum Zwischenpunkte ergiebt sich = 39° 44′ = 2384 Seem.

Vom Zwischenpunkte bis zum Bestimmungspunkte findet man die Distanz im grössten Kreise = 51° 49′ = 3109 Seem.,
mithin die Summe der im grössten Kreise zu seg. Dist. . . = 5493 Seem.
In der Loxodromie war die Distanz = 6004 Seem.
Mithin sind durch gr. Kreissegelung gewonnen = 511 Seem., welche zurückzulegen, selbst mit günstigem Winde und 6 Knoten Fahrt, nahe 3 Tage 13 Stunden erfordern würden.

Anmerkung. Wenn man vom Abfahrts- nach dem Zwischenpunkte im grössten Kreise segelt, kommt man nur auf 48° 30′ SBr.; vom Zwischenpunkte bis zum Bestimmungspunkte segelnd, liegt aber der südlichste Punkt des zu durchsegelnden grössten Kreisbogens auf 53° 54′ SBr., und wenn auch diese Breite mit Rücksicht auf die Jahreszeit zu südlich wäre, so würde es am zweckmässigsten sein, bis etwa 50° SBr. nur im grössten Kreise zu segeln, dann so lange in diesem Parallel ostwärts zu fahren, bis man in den grössten Kreisbogen gelangt, der nach dem Bestimmungsorte führt, und in demselben den letzteren zu erreichen suchen.

Es giebt im grössten Kreise segelnd einen Punkt, der am meisten von der zwischen den Endpunkten des in der Seekarte niedergelegten grössten Kreisbogens gezogenen geraden Linie, die den Curs und die Distanz in der Loxodromie angiebt, entfernt liegt. In diesem Punkte ist der Curs im grössten Kreise gleich dem Curse in der Loxodromie, und wenn man durch diesen Punkt einen Meridian zieht, so entsteht ein sphärisches Dreieck zwischen dem Abfahrtsorte, dem Erdpol und dem gedachten Punkte, in welchem das Complement der Breite des Abfahrtsortes, der diesem gegenüberstehende Winkel (gleich dem Supplement des Curswinkels in der Loxodromie) und der zuerst im grössten Kreise zu segelnde rechtweisende Curswinkel bekannt ist. Man kann also nach der Sinusregel den nach dem gedachten Punkte gezogenen Meridianbogen, der gleich dem Complement der Breite dieses Punktes ist, mithin die Breite dieses Punktes selbst finden.

Nachdem dieser Bogen des gedachten sphärischen Dreiecks gefunden ist, hat man in demselben zwei Winkel und die ihnen gegenüberstehenden Seiten bekannt und kann den 3ten Winkel, der am Pol liegt, nach §. 40. der sphärischen Trigonometrie, Gleichung (1) oder (2) finden.

Dieser Winkel ist gleich dem Längenunterschiede zwischen dem Abfahrtsorte und dem in Rede stehenden Punkte des grössten Kreises, welcher von der Loxodromie am weitesten entfernt liegt, und man kann daher durch Addiren oder Subtrahiren dieses Längenunterschiedes zu oder von der Abfahrtslänge, je nachdem die Lage es erfordert, auch

die Länge dieses Punktes finden, wodurch die Lage desselben bestimmt ist und in der Karte nach Breite und Länge niedergelegt werden kann.

Im Beispiel 2. ergiebt sich die Breite des Punktes im grössten Kreise, der am weitesten von der Loxodromie entfernt ist

$= 49^\circ\ 19'$ N. und dessen Länge findet man

$= 33^\circ\ 38'$ W. von Greenwich.

III. Die Breite der Punkte im grössten Kreise zu berechnen, deren Längenunterschied gleich, etwa 5 oder 10°, angenommen wird.

Zu diesem Zwecke sei wieder wie in Figur 23. der Abgangsort A, der Bestimmungsort B, der nächste Erdpol P, und die Normale PC auf AB falle ausserhalb des Dreiecks APB bei B, worin PA, PB und $\angle APB$ bekannt sind.

Nachdem die Winkel PAB und PBA nach den Napier'schen Gleichungen gefunden sind, hat man in dem bei C rechtwinkligen Dreieck APC bekannt, Seite AP und $\angle PAC$, womit PC und $\angle APC$ nach den Gleichungen:

$$\sin PC = \sin AP \cdot \sin \angle PAC \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(1),$$

$$\operatorname{cotg} \angle APC = \cos AP \cdot \operatorname{tang} \angle PAC \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(2)$$

berechnet werden können.

Will man nun von dem Punkte d in AB, welcher 5° oder 10° andere Länge als A hat, die Breite berechnen, die mit φ bezeichnet $= 90^\circ - Pd$ ist, so hat man es mit dem Dreieck dPC zu thun, worin als bekannt angenommen werden kann $\angle dPC = \angle APC - \angle APd$, denn $\angle APC$ ist nach (2) berechnet und $\angle APd = 5^\circ$ oder 10°, und dieses Dreieck giebt die Gleichung

$$\cos \angle dPC = \operatorname{cotg} Pd \cdot \operatorname{tang} PC,$$

woraus folgt

$$\operatorname{cotg} Pd = \cos \angle dPC \cdot \operatorname{cotg} PC \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(3),$$

$$\text{oder } \operatorname{tang} \varphi = \cos \angle dPC \cdot \operatorname{cotg} PC \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(4).$$

Nach (4) kann man die Breite aller anderen Punkte zwischen d und B (Fig. 23.) von 5° zu 5°, oder 10° zu 10° Längenunterschied berechnen. Ist das geschehen, so trägt man diese Punkte in die Seekarte ein nach ihrer Breite und Länge, verbindet je zwei der nächsten durch eine Gerade, von A anfangend, also A mit d, diesen Punkt mit dem nächsten u. s. w. bis B. Diese gebrochene Linie in der Seekarte fällt sehr nahe mit dem grössten Kreisbogen von A nach B zusammen, und richtig ausgemessen enthält sie weniger Seemeilen als die Gerade von A bis B, was daher kommt, dass die Breitenminuten, in deren Parallel die gebrochene Linie fällt, grösser sind als die Breitenminuten, in deren Parallel die entsprechenden Theile der Geraden von A nach B fallen.

§. 45.

Die gesegelten Curse und Distanzen in der Karte abzusetzen.

Wie die nach einander gesegelten Curse und Distanzen in der misweisenden Karte sowohl als in der rechtweisenden Karte abzusetzen sind, ist in §. 41. IV. gezeigt worden. Dieses Absetzen der Curse und Distanzen ist besonders dann nothwendig, wenn das Schiff in engen Gewässern segelt, damit zu jeder Zeit beurtheilt werden kann, ob der

bisher gesteuerte Curs beizubehalten, oder zu verändern ist, um so das Schiff frei von dem Lande und den Untiefen zu halten. Wenn ein Schiff aber in grösseren Gewässern, weit von der Küste, den Inseln und Untiefen entfernt, segelt, so ist das Absetzen der einzelnen Curse in der Karte nicht nothwendig, weil man den Ort des Schiffes am Ende eines jeden Curses dann nicht zu kennen braucht, und es vollkommen ausreicht, wenn man ihn nur für jeden wahren Mittag kennt. In diesem Falle wird Länge und Breite des Ortes, auf welchem das Schiff am wahren Mittage gewesen ist, berechnet und in der Karte nach §. 41. I. a. bestimmt. Wie man die Länge und Breite des Ortes berechnen kann, den das Schiff mit einem gesegelten Curse oder mehreren nach einander gesegelten Cursen erreicht hat, wird in dem folgenden Paragraphen gezeigt werden.

§. 46.

Von der Besteckrechnung.

Aus Breite und Länge eines Ortes und den von diesem aus nach einander gesegelten Cursen und Distanzen die Breite und Länge des Ortes zu berechnen, auf welchem das Schiff am Ende des letzten oder eines früheren Curses sich befindet, heisst Besteckrechnen. Der Schiffsort nach dieser Breite und Länge wird auch das Besteck genannt. Daher sagt man auch, das Besteck befindet sich in der Breite und Länge, oder, die Breite und Länge ist das Besteck. Das Besteckrechnen beruht auf der Berechnung ebener, rechtwinkliger Dreiecke. Diese Dreiecke sind:

das nautische Cursdreieck (§. 8.),
das Mittelbreitendreieck (§. 9.) und
das Mercator'sche Dreieck (§. 11.).

Zur möglichst bequemen Auflösung dieser Dreiecke dienen die sogenannten Strich- und Gradtafeln, nämlich Tafel I. und II. der nautischen Tafeln. In beiden Tafeln sind die Seiten der ebenen rechtwinkligen Dreiecke für alle Werthe der Hypotenuse von 1 bis 300 enthalten, und zwar in der Strichtafel für jeden viertel Strich, in der Gradtafel für jeden Grad der Winkel an der Hypotenuse.

I. Wenn der rechtweisende Curs des Schiffes Nord oder Süd, der Curswinkel also = 0 ist, so segelt dasselbe im Meridian, verändert mithin seine Länge nicht, sondern nur seine Breite und zwar um die gesegelte Distanz.

Ist die veränderte Breite gleichnamig mit der verlassenen, so ist die Summe beider die erreichte Breite und von derselben Benennung; im entgegengesetzten Falle ist die absolute Differenz beider die bekommene Breite, und diese erhält die Benennung des Grösseren.

Aufgabe 1. Von 48° 10' NBr. und 18° 10' WL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend Nord 18,4 Seemeilen, auf welcher Länge und Breite befindet es sich hiernach?

Lösung.	Die veränderte Breite	ist	=	0° 18',4 Nord,
	die verlassene	»	» =	48° 10',0 Nord,
folglich »	erreichte	»	» =	48° 28',4 Nord.

Das Schiff befindet sich daher auf 48° 28',4 NBr. und 18° 10' WL. von Greenwich.

Aufgabe 2. Von 0° 17',5 NBr. und 16° 18' WL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend Süd 45,6 Seemeilen, wo steht das Besteck?

Lösung. Die veränderte Breite ist $= 0^\circ\ 45',6$ Süd,
die verlassene » » $= 0^\circ\ 17',5$ Nord,
» erreichte » » $= 0^\circ\ 28',1$ Süd.

Das Besteck steht demnach auf $0^\circ\ 28',1$ SBr. und $16^\circ\ 18'$ WL. von Greenwich.

II. Wenn der rechtweisende Curs des Schiffes Ost oder West, also der Curswinkel $= 90^\circ$ ist, so segelt dasselbe in einem Breitenparallel, verändert somit seine Breite nicht, sondern nur die Länge.

Die gesegelte Distanz ist zugleich die Abweichung. Es kommt nun darauf an, die dieser Abweichung entsprechende veränderte Länge zu finden, was mit der Breite (φ), in der die Abweichung gemacht ist, nach der Proportion

$$\cos\varphi : \sin 90^\circ = \text{Abweichung} : \text{veränderten Länge (§. 9.)}$$

oder was dasselbe ist

$$\text{veränderte Länge} = \text{Abweichung mal} \sec\varphi$$

durch Rechnung, oder nach dem ebenen rechtwinkligen Dreieck, worin die eine Kathete die Abweichung, der daran liegende Winkel die Breite φ, und die Hypotenuse die veränderte Länge vorstellt (Fig. 4.), durch Construction, oder mit Hülfe der Gradtafel, geschehen kann. Die erreichte Länge ist gleich der Summe oder Differenz der verlassenen und veränderten Länge, je nachdem diese beiden gleichnamig oder ungleichnamig sind. Im ersten Falle erhält die erreichte Länge die gemeinschaftliche Benennung der verlassenen und veränderten Länge, im letzten die des Grösseren.

Diesen Fall, in welchem im Parallel gesegelt wird, und man demnach nur die veränderte Länge zu bestimmen hat, um den erreichten Ort des Schiffes zu erhalten, nannte man früher Parallelsegelung.

Aufgabe 1. Von $51^\circ\ 10'$ NBr. und $41^\circ\ 50'$ WL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend West 31 Seemeilen; auf welcher Länge und Breite wird es sein?

Lösung nach der Gradtafel.

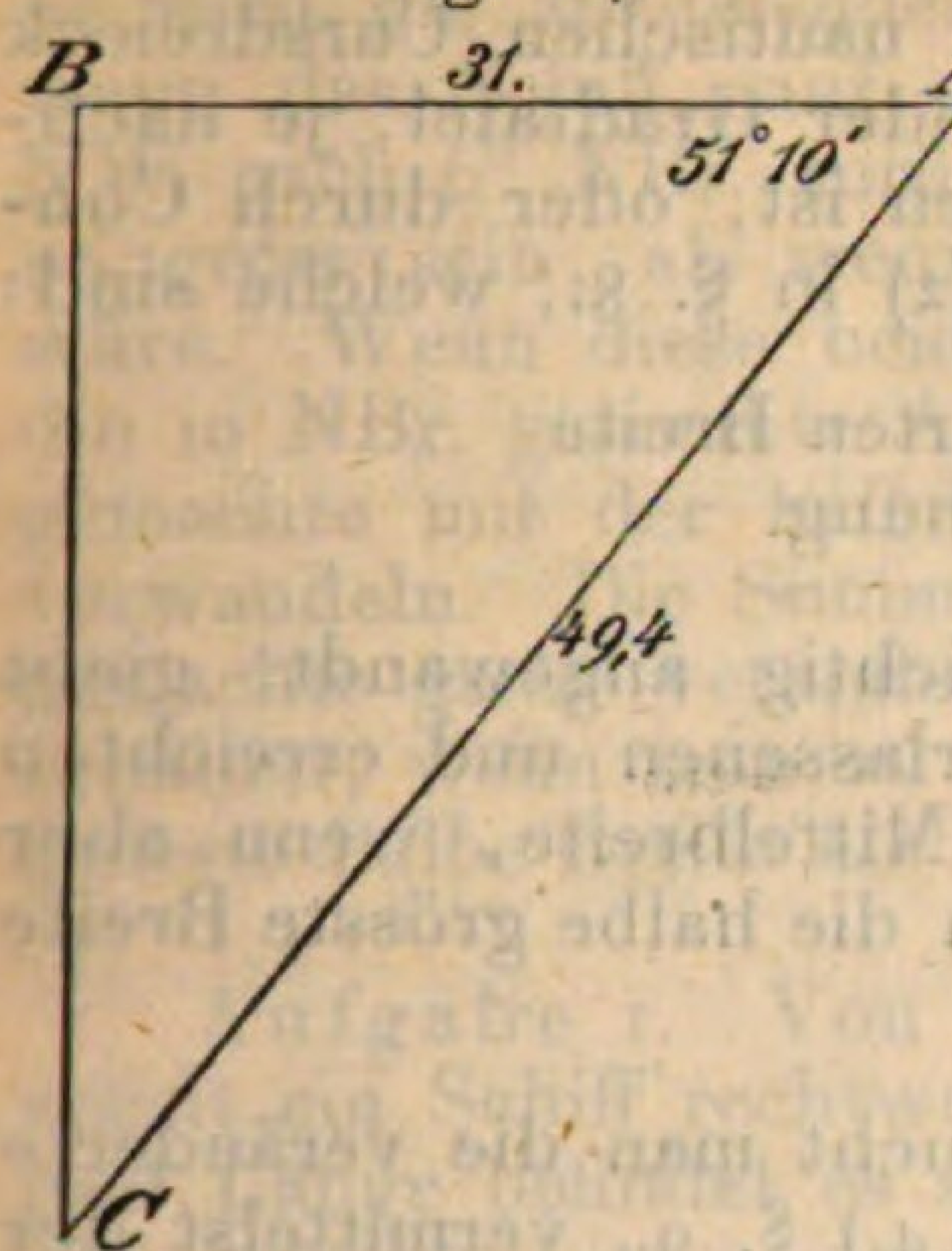
Da die Breite grösser als 45° ist, so wird in dem ebenen rechtwinkligen Dreieck dessen kleinste Kathete die Abweichung sein. Man nehme daher in der Gradtafel auf der Blattseite von 51° die Zahl der ersten Spalte, welche der Zahl 31 in der dritten Spalte gegenübersteht: sie ist 49,2. Ferner nehme man auf der Blattseite von 52° die Zahl der ersten Spalte, welche der Zahl 31 in der dritten Spalte gegenübersteht: diese wird 50,2 gefunden. Durch eine einfache Proportion findet man nun, dass der auf $51^\circ\ 10'$ Breite gemachten westlichen Abweichung von 31 Seemeilen

die veränderte Länge $= 0^\circ\ 49',4$ West entspricht,
die verlassene Länge ist $= 41^\circ\ 50'$ West,
also die erreichte Länge $= 42^\circ\ 39',4$ West.

Das Schiff befindet sich daher auf $51^\circ\ 10'$ NBr. und $42^\circ\ 39',4$ WL. von Greenwich.

Bemerkung. Vermittelst der Gradtafel wird die veränderte Länge am leichtesten und mit genügender Genauigkeit gefunden. Ein Irrthum ist bei diesem Verfahren nicht möglich, wenn man nur daran denkt, dass, je nachdem die Breite grösser oder kleiner als 45° ist, die Abweichung in der dritten oder zweiten Spalte, und die veränderte Länge immer in der ersten Spalte der Gradtafel zu nehmen ist.

Fig. 24.



Die veränderte Länge durch Construction zu finden.

Man mache in Fig. 24. den Winkel *CAB* = 51° 10′, nehme auf einem gleichtheiligen Maassstabe 31 Theile, und trage diese von *A* nach *B* ab, errichte in *B* die Normale *BC* auf *BA*, so wird *AC* die veränderte Länge sein, deren Grösse gefunden wird, wenn man *AC* auf dem gleichtheiligen Maassstabe misst, auf welchem die gesegelte Distanz (in diesem Falle gleich der Abweichung) gemessen ist, was *AC* hier = 49,4 ergiebt.

Lösung der Aufgabe nach der Proportion:

cos 51° 10′ : sin 90° = 31 : veränderten Länge.

$$
\begin{aligned}
\lg \sin 90^\circ &= 10{,}00000 \\
\lg 31 &= 1{,}49136 \\
\lg \cos 51^\circ\ 10' &= 9{,}79731 \\
\hline
\lg \text{veränderte Länge} &= 1{,}69405 \\
\text{veränderte Länge} &= 49',4.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Von 32° 30′ NBr. und 0° 18′ OL. von Ferro segelt ein Schiff rechtweisend West 42,5 Seemeilen; auf welche Länge und Breite ist es gekommen?

Lösung nach der Gradtafel.

Da die Breite kleiner als 45° ist, so muss die Abweichung in der zweiten Spalte der Gradtafel genommen werden. Auf der Blattseite 32° findet man der Zahl 42,5 in der zweiten Spalte gegenüber, 50,1 in der ersten, und auf der Blattseite von 33° der Zahl 42,5 in der zweiten gegenüber, 50,7 in der ersten, folglich ist auf 32° 30′ Breite die 42,5 Seemeilen westlicher Abweichung entsprechende

veränderte Länge = 0° 50′,4 West,
die verlassene Länge = 0° 18′,0 Ost,
mithin die erreichte Länge = 0° 32′,4 West.

III. Wenn der rechtweisende Curs des Schiffes weder Nord oder Süd noch Ost oder West ist, so segelt dasselbe in der loxodromischen Linie, und verändert somit nicht allein seine Breite, sondern auch seine Länge.

Es kommt nun zunächst darauf an, die dem gesegelten Curse und dessen Distanz entsprechende veränderte Breite und Länge zu finden, aus dieser und der verlassenen Breite und Länge wird dann die erreichte Breite und Länge, wie in den vorhergehenden Abschnitten I. und II. gezeigt ist, gefunden.

Die veränderte Länge ist nicht mit der veränderten Breite zugleich, und auch nicht so leicht als die letztere zu erhalten; sie kann aber auf zweierlei Weise berechnet werden.

Die in diesem Falle zu lösende Aufgabe ist folgende.

Von einem Orte, dessen Breite und Länge gegeben ist, segelt ein Schiff in der loxodromischen Linie einen bestimmten Curs und eine bestimmte Distanz, und hiermit soll die veränderte Breite und Länge des Schiffes gefunden werden.

Mit dem gesegelten Curse nebst der zugehörigen Distanz sucht man die veränderte Breite und Abweichung in dem nautischen Cursdreieck (§. 8. Fig. 3.), entweder vermittelst der Strich- oder Gradtafel, je nachdem der Curs in Strichen oder Graden angegeben ist, oder durch Construction, oder nach den Proportionen (1) und (2) in §. 8., welche sind:

$$\sin 90^\circ : \cos \text{Curs} = \text{Dist.} : \text{veränderten Breite}$$
$$\text{und } \sin 90^\circ : \sin \text{Curs} = \text{Dist.} : \text{Abweichung}.$$

Die veränderte Breite auf die verlassene richtig angewandt, giebt die erreichte Breite. Die halbe Summe der verlassenen und erreichten Breite, wenn beide gleichnamig sind, ist die Mittelbreite, wenn aber beide Breiten ungleichnamig sind, so nehme man die halbe grösste Breite als Mittelbreite.

Mit der Mittelbreite und der Abweichung sucht man die veränderte Länge nach dem Mittelbreitendreieck *ABD* (Fig. 4.) §. 9., vermittelst der Gradtafel, oder durch Construction, oder auch durch Rechnung nach der Gleichung:

$$\text{veränderte Länge} = \text{Abweichung} \cdot \sec \text{Mittelbreite}.$$

Die Mittelbreite giebt zwar die veränderte Länge nicht ganz genau, besonders wenn die veränderte Breite grösser als 3° und die Mittelbreite grösser als 60° ist, in welchem Falle letztere um die Grösse x — nach Gleichung (9) in §. 11. berechnet, oder aus der nautischen Tafel IV. entnommen — vergrössert werden muss. Die Mittelbreite wird aber immer hinlänglich genaue Resultate geben, wenn die erwähnten Grenzen nicht bedeutend überschritten werden.

Findet man sich indessen den Umständen nach veranlasst, den Längenunterschied mit Hülfe der Meridionaltheile zu berechnen, so nimmt man die Meridionaltheile der verlassenen und erreichten Breite auf eine Decimalstelle genau, deren Summe oder Differenz, je nachdem die beiden Breiten ungleichnamig oder gleichnamig sind, so hat man die Meridionaldifferenz. Mit dieser Meridionaldifferenz und dem Curswinkel sucht man nun nach Mercator's Dreieck [§. 11. Gleichung (7) Fig. 6.] vermittelst der Gradtafel, oder durch Construction, oder durch Rechnung nach der Gleichung:

$$\text{veränderte Länge} = \text{Meridionaldifferenz} \cdot \tan \text{Curswinkel}$$

die veränderte Länge. Obgleich es diesemnach überall auf der Erde, man mag nämlich unterm Aequator oder nahe den Polen, oder auch von einer Seite des Aequators nach der andern segeln, stets richtig ist, vermittelst der Meridionaltheile nach Gleichung (7) oder (8) in §. 11. den Längenunterschied zu finden, so können diese Methoden doch, wenn man die Meridionaldifferenz nicht genau genug nimmt, fehlerhafte Resultate liefern, weshalb hier noch bemerkt wird, dass man die Meridionaltheile desto genauer nehmen muss, je kleiner der Breitenunterschied und je grösser die Abweichung ist, welches sich leicht aus Gleichung (8) §. 11. ergiebt. Da indessen die Meridionaltheile in der nautischen Tafel III. auf zwei Decimalstellen gegeben sind, so wird die Meridionaldifferenz immer genau genug gefunden werden können.

B e m e r k u n g. Dass die Mittelbreite, wenn die verlassene und erseichte Breite ungleichnamig sind, nicht die halbe Differenz derselben rein kann, wird sich an den folgenden Beispielen leicht zeigen lassen.

Gesetzt, ein Schiff segelt von 6° NBr. rechtweisend SW nach 6° SBr., so wird die anzuwendende Mittelbreite nicht 0°, sondern 3° sein, denn wenn das Schiff, auf dem Aequator angekommen, sofort rechtweisend NW nach 6° NBr. zurücksegelte, so würde seine veränderte Länge eben so gross sein, als wenn es rechtweisend SW nach 6° SBr. fortgesegelt wäre. Wenn diese beiden Breiten aber auch noch ungleich sind, so ist die in NBr. gemachte Abweichung mit der halben NBr., und die in SBr. gemachte mit der halben SBr. als Mittelbreite in veränderte Länge zu verwandeln. Die Summe dieser beiden veränderten Längen ist dann die gemachte ganze veränderte Länge. Letztere wird aber auch genau genug erhalten, wenn man zu ihrer Bestimmung die ganze Abweichung und die grösste halbe Breite als Mittelbreite nimmt, wie bereits vorher bemerkt ist.

Aufgabe 1. Von 42° 10′ NBr. und 18° 30′,4 WL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend SSO ¼ O 174 Seemeilen; auf welcher Breite und Länge befindet es sich hiernach?

Lösung vermittelst der Strich- und Gradtafel.

Der Curswinkel ist 2¼ Strich. In der Strichtafel auf der Blattseite von 2¼ Strich findet man mit 174 in der ersten Spalte, daneben in den beiden anderen Spalten 157,3 und 74,4. Dies giebt:

die veränderte Breite = 2° 37′,3 S, die verlassene Breite = 42° 10′,0 N, die erreichte Breite = 39° 32′,7 N.	Mittelbr. = 40° 51′	Abweichung = 74,4 Seemeilen Ost.

Da die Mittelbreite kleiner als 45° ist, so muss mit der Abweichung in die zweite Spalte der Gradtafel gegangen und die veränderte Länge aus der ersten genommen werden.

Man findet nun auf der Blattseite von 40° mit 74,4 in der zweiten, 97,1 in der ersten Spalte, und auf der Blattseite von 41° mit 74,4 in der zweiten, 98,6 in der ersten Spalte, folglich ist die auf 40° 51′ Breite und 74,4 Seemeilen östlicher Abweichung entsprechende

veränderte Länge = 1° 38′,4 Ost,
die verlassene Länge ist = 18° 30′,4 West
und die erreichte Länge = 16° 52′,0 West.

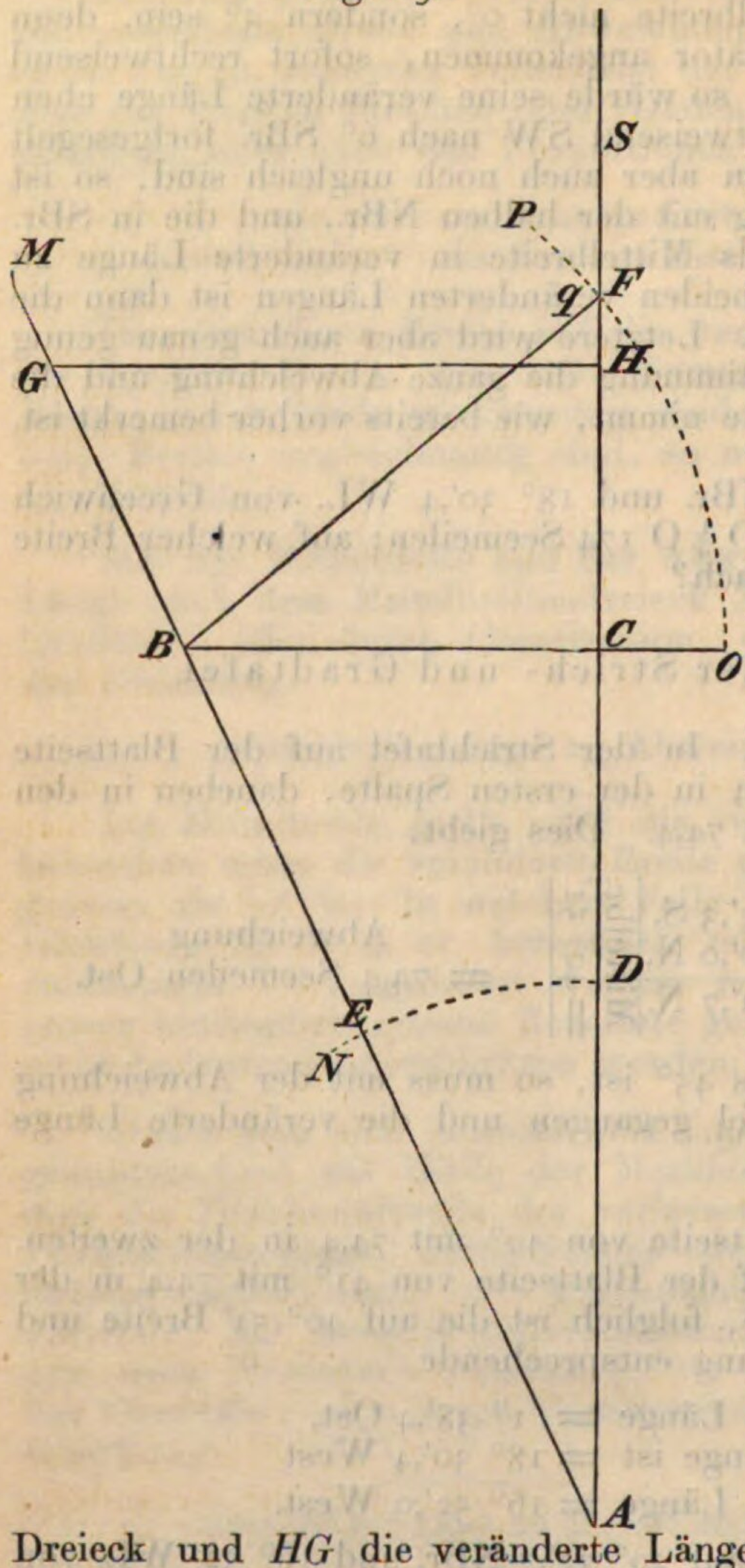
Das Schiff befindet sich also auf 39° 32′,7 NBr. und 16° 52′ WL. von Greenwich.

Die veränderte Länge vermittelst der Gradtafel nach Mercator's Dreieck zu finden.

Verlassene Breite	= 42° 10′ N,	Meridionaltheile	= 2795,2,
erreichte Breite	= 39° 32′,7 N,	»	= 2587,2,
		Meridionaldifferenz	= 208,0.

In Mercator's Dreieck ist die veränderte Länge stets die dem Curswinkel gegenüberliegende, und die Meridionaldifferenz die diesem anliegende Kathete. Daher hat man in diesem Falle auf der Blattseite von 2¼ Strich das in der dritten Spalte zu nehmen, was neben 208 in der zweiten steht. Dies ist 98,4, also mit der nach Mittelbreite gefundenen veränderten Länge genau übereinstimmend.

Fig. 25.



Durch Construction veränderte Breite und Länge zu finden.

Man ziehe die Gerade *AS* (Fig 25.), beschreibe mit der Chorde von 60° von *A* aus den Bogen *DN*, trage die Chorde von $2\frac{1}{4}$ Strich von *D* nach *E*, und ziehe durch *A* und *E* die Gerade *AM*. Nun betrachte man *A* als den verlassenen Ort, *S* als dessen wahren Südpunkt, so ist $\angle SAM$ der Curs und *AM* die Curslinie. Die Distanz 174 trage man, auf einem gleichtheiligen Maassstabe gemessen, von *A* nach *B* ab, ziehe *BC* normal auf *AS*, so ist Δ *ABC* das nautische Cursdreieck, *BC* die Abweichung und *AC* die veränderte Breite, welche, auf dem bereits gebrauchten Maassstabe gemessen, *BC* = 74,7 und *AC* = 157,3 ergeben.

Von *B* aus beschreibe man mit der Chorde von 60° den Bogen *OP*, trage darauf die Chorde von 40° 51′ (Mittelbreite) von *O* nach *q* ab, ziehe durch *q* die Gerade *BF*, so ist Δ *BCF* das Mittelbreitendreieck und *BF* die veränderte Länge, welche, auf dem gleichtheiligen Maassstabe gemessen, 98′,4 wird. Nun nehme man auf demselben Maassstabe die Meridional-Differenz 208, trage diese von *A* nach *H* ab, ziehe *HG* parallel mit *BC*, so ist das Dreieck *AHG* das Mercator'sche Dreieck und *HG* die veränderte Länge. Wenn die Construction genau gemacht wird, so muss *BF* = *GH* werden.

Logarithmische Berechnung der veränderten Breite, der Abweichung und der veränderten Länge.

Der Curs = $2\frac{1}{4}$ Strich ist 25° 18′,		die Distanz = 174 Seemeilen.	
Veränderte Breite = Dist. · cos Curs.		Abw. = Distanz · sin Curs.	
lg 174 =	2,24055	lg 174 =	2,24055
lg cos 25° 18′ =	9,95621 — 10	lg sin 25° 18′ =	9,63079 — 10
lg veränderte Breite =	2,19676	lg Abweichung =	1,87134
veränderte Breite =	157,3	Abweichung =	74,4 Seem.
=	2° 37′,3 S.		
Verlassene Breite =	42° 10′,0 N . . .	Meridionaltheile =	2795,2
erreichte Breite =	39° 32′,7 N . . .	Meridionaltheile =	2587,2
Mittelbreite =	40° 51′.	Meridionaldifferenz =	208,0.

Veränd. Länge = Abw. · sec Mittelbr. = Meridionaldiff. · tang Curs.

lg 74,4	= 1,87134	lg 208	= 2,31806
lg sec 40° 51′	= 0,12123	lg tang 25° 18′	= 9,67458 − 10
lg veränderte Länge	= 1,99257		= 1,99264
veränderte Länge	= 98′,3.		

Aufgabe 2. Von 64° 10′ NBr. und 5° 40′ WL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend NWzW ½ W 201,7 Seemeilen, auf welcher Länge und Breite wird es dann sein?

Lösung nach der Strich- und Gradtafel.

Der Curs ist 5½ Strich. Auf der Blattseite von 5½ Strich findet man neben 200 in der ersten Spalte, in den andern 176,4 und 94,3, und neben 1,7 in der ersten Spalte, in den andern 1,5 und 0,8, also neben 201,7 in der ersten Spalte, in den andern 177,9 und 95,1. Dies giebt:

die veränderte Breite	= 1° 35′,1 N,	Mittelbr. = 64° 58′	Abweichung = 177,9 Seemeilen West.
die verlassene Breite	= 64° 10′,0 N,		
also die erreichte Breite	= 65° 45′,1 N.		

Die Mittelbreite ist = 65° zu nehmen, die Abweichung in der letzten und die veränderte Länge in der ersten Spalte der Gradtafel. Da man in der letzten Spalte die Zahl 177,9 nicht findet, so zerlegt man sie in zwei solche Summanden, die darin vorkommen, diese sind 125,9 + 52, und neben diesen in der ersten Spalte steht 298 + 123 = 421.

Die veränderte Länge ist also = 7° 1′ W,
die verlassene Länge = 5° 40′ W,
giebt die erreichte Länge . . . = 12° 41′ W.

Das Schiff ist am Ende des Curses auf 65° 45′,1 NBr. und 12° 41′ WL. von Greenwich.

Die veränderte Länge nach Mercator's Dreieck vermittelst der Gradtafel zu finden.

Verlassene Breite	= 64° 10′ N,	Meridionaltheile	= 5062,3
erreichte Breite	= 65° 45′,1 N,	» »	= 5287,0
		Meridionaldifferenz	= 224,7.

Da der Curs 5½ Strich ist, so hat man auf der Blattseite von 5½ Strich die Meridionaldifferenz in der letzten, und die veränderte Länge in der zweiten Spalte zu nehmen. Die 224,7 zerlegt man in 136,7 + 88,0; dies giebt 255,8 + 164,7 = 420′,5 veränderte Länge, welche mit der vorher gefundenen sehr nahe übereinstimmt.

Aufgabe 3. Von 4° 10′ NBr. und 18° 0′ WL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend SW 416 Seemeilen, auf welcher Breite und Länge wird es dann sein?

Lösung:

Die veränderte Breite	= 4° 54′,2 S,	Mittelbr. = 2° 5′	Abweichung	= 294,2 Seem. W,
verlassene Breite	= 4° 10′,0 N,		veränd. Länge	= 4° 54′,4 W,
erreichte Breite	= 0° 44′,2 S.		verl. Länge	= 18° 0′,0 W,
			erreichte Länge	= 22° 54′,4 W.

Das Schiff ist hiernach auf 0° 44′,2 SBr. und 22° 54′,4 WL. v. Grw.

Verlassene Breite	= 4° 10′ N,	Meridionaltheile	= 250,2 N,
erreichte Breite	= 0° 44′2 S,	» »	= 44,2 S,
		Meridionaldifferenz	= 294,4.

Da der Curs 4 Strich ist, so wird die veränderte Länge gleich der Meridionaldifferenz sein, also mit der nach dem Mittelbreitendreieck gefundenen genau übereinstimmend.

IV. Wenn ein Schiff von einem Orte, dessen Breite und Länge bekannt ist, verschiedene Curse nacheinander segelt, wozu es durch die Veränderung des Windes oder durch örtliche Verhältnisse genöthigt werden kann, und man nun die Breite und Länge berechnen will, auf welcher dasselbe sich am Ende des letzten Curses befindet, so kann dies und zwar am genauesten dadurch geschehen, dass man successive die Breite und Länge berechnet, auf der das Schiff am Ende des ersten, zweiten, dritten Curses u. s. w. gewesen ist.

Wenn die gesegelten Distanzen gross und besonders auf hohen Breiten die ihnen entsprechenden Curse sehr verschieden sind, so wird die Rechnung auf diese Weise geführt werden müssen, um zu einem richtigen Endresultate zu gelangen; wenn aber auf nicht hohen Breiten die Curse wenig differiren, oder wenn dieses auch, nur die Distanzen nicht bedeutend sind, so kann man summarisch verfahren und gleich aus allen Cursen und Distanzen zusammengenommen einen Curs und eine Distanz berechnen, welche das Schiff an das Ende des letzten Curses bringen. Dieser Curs wird in Bezug auf die anderen der General- oder Gesammt-Curs, und die diesem zugehörige Distanz die General- oder Gesammt-Distanz genannt. Das Verfahren selbst, um den General-Curs zu finden, nennt man Curskoppeln. Aus dem Gesammt-Curse nebst der zugehörigen Distanz, sowie der Breite und Länge des Abgangsortes berechnet man demnächst die Breite und Länge des erreichten Ortes, wie in dem vorstehenden Abschnitt III. gezeigt ist.

Zum Curskoppeln ist folgende Tabelle, die Koppeltafel genannt wird, zweckmässig.

Curs.	Dist.	Veränderte Breite.		Abweichung.	
		N.	S.	O.	W.

In die Cursrubrik schreibt man alle gesegelten Curse, und daneben in die Distanzrubrik die den Cursen zugehörigen Distanzen, welche gekoppelt werden sollen. Demnächst macht man neben jedem Curse in denjenigen Rubriken (N, S, O, W bezeichnet) einen Querstrich, in welche keine veränderte Breite und Abweichung dem Curse nach, zu schreiben ist. Nun nimmt man die jedem Curse und der ihm zugehörigen Distanz entsprechende veränderte Breite und Abweichung, und schreibt erstere in die nicht ausgefüllte N- oder S-Rubrik, je nachdem der Curs von Nord oder Süd, letztere in die nicht ausge-

füllte O- oder W-Rubrik, je nachdem der Curs nach Ost oder West gezählt ist, neben den resp. Curs. Hierauf wird die Summe von dem, was in jeder Rubrik steht, genommen, demnächst die Summen der N- und Süd-Rubrik, ebenso die der O- und W-Rubrik von einander abgezogen, und die Differenzen mit dem Zeichen des Grösseren bezeichnet, so ist die erstere Differenz die veränderte Breite, die letztere die Abweichung. Mit beiden sucht man in der Gradtafel den Gesammt-Curs nebst der Gesammt-Distanz, wobei zu bemerken bleibt, dass, je nachdem die Abweichung kleiner oder grösser als die veränderte Breite, die an dem obern oder untern Rande der Blattseite angegebenen Grade als Curswinkel zu nehmen sind. Mitunter trifft es sich hierbei, dass man nicht bestimmt sehen kann, auf welcher Blattseite der Breitenunterschied und die Abweichung am genauesten mit den berechneten Grössen übereinstimmen. Um nun in solchem zweifelhaften Falle sicher zu gehen, nehme man $\frac{\text{Abweichung} \cdot 100}{\text{Breitenunterschied}}$ und sehe zu, mit welcher Zahl an dem obern oder untern Rande der resp. Blattseite in der Gradtafel dieser Quotient am genauesten übereinstimmt, von welcher Blattseite dann der Curswinkel zu nehmen ist. Der Grund zu diesem Verfahren liegt darin, dass in zwei ähnlichen ebenen Dreiecken auch die Verhältnisse zweier gleichliegender Seiten näher übereinstimmen, als dieses in zweien nicht so ähnlichen Dreiecken der Fall ist. Ein Beispiel hierüber ist Seite VI der Erklärung der nautischen Tafeln gegeben. Im Uebrigen wird der Gang der Rechnung an dem folgenden Beispiele gezeigt werden.

Von 54° 18′ NBr. und 17° 46′ WL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend: NW¾W 31,5 Seemeilen, NNO 42 Seemeilen, O 46 Seemeilen, S¼W 16 Seemeilen; was ist der General-Curs, die Distanz, und die Breite und Länge, auf der sich das Schiff am Ende des letzten Curses befindet?

Curs.	Dist.	Veränderte Breite.		Abweichung.	
		N.	S.	O.	W.
NW¾W	31,5	20,0	—	—	24,3
NNO	42	38,8	—	16,1	—
Ost	46	—	—	46,0	—
S¼W	16	—	15,9	—	1,6
		58,8	15,9	62,1	25,9
		15,9		25,9	
		42,9 N.		36,2 O.	

Diese veränderte Breite und Abweichung findet man in der Gradtafel auf der Blattseite von 40°, gegenüber der Zahl 56 in der ersten Spalte. Demnach ist der General-Curs N 40° O und die zugehörige Distanz 56 Seemeilen.

Veränderte Breite = 0° 42′,9 N,	Mittelbr. = 54° 39′	Abweichung . . = 36,2 Seem. O,
verlassene Breite = 54° 18′,0 N,		veränd. Länge = 1° 2′,7 O,
		verlass. Länge = 17° 46′,0 W,
erreichte Breite = 55° 0′,9 N.		erreichte Länge = 16° 43′,3 W v. Grw.

Das Schiff ist also auf 55° 0′,9 NBr. und 16° 43′,3 WL. von Greenwich.

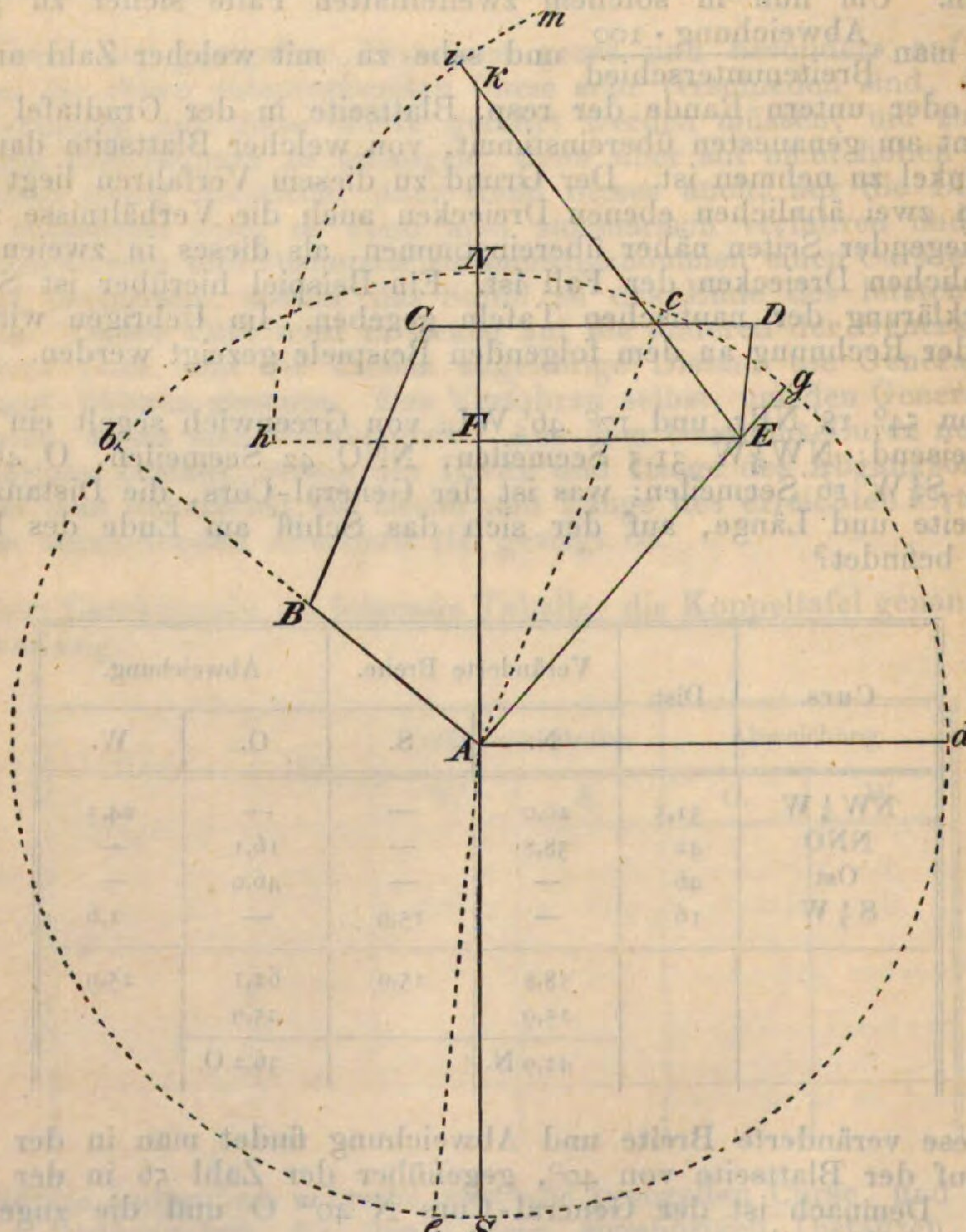
Nach Mercator's Dreieck die veränderte Länge zu finden.

Verlassene Breite	= 54° 18′ N,	Meridionaltheile	= 3895,4
erreichte Breite	= 55° 0′,9 N,	»	= 3969,5
		Meridionaldifferenz	= 74,1.

Auf der Blattseite von 40° in der Gradtafel, der Zahl 74,1 in der zweiten Spalte gegenüber, findet man in der dritten 62,2, welches die veränderte Länge ist.

Den Gesammt-Curs nebst Distanz, die veränderte Breite, Abweichung und veränderte Länge durch Construction zu finden.

Fig. 26.



Man beschreibe mit der Chorde von 60° von A aus, wie in Fig. 26., einen Kreis, ziehe darin den Durchmesser SN, und betrachte A als den verlassenen Ort des Schiffes, N als den wahren Nord- und S als den wahren Südpunkt desselben. Nun nehme man die Chorde von $4\frac{1}{2}$ Strich, trage diese von N nach b und ziehe Ab. Auf einem gleichtheiligen Maassstabe nehme man 31,5 und trage diese von A nach B, so ist B der

Ort des Schiffes am Ende des ersten Curses. Die Chorde von 2 Strich trage man hiernach von *N* nach *c*, ziehe *Ac*, parallel mit dieser Linie *BC*, und mache *BC* = 42 (auf demselben gleichtheiligen Maassstabe gemessen), so wird *C* der Ort des Schiffes am Ende des zweiten Curses sein. Demnächst trage man die Chorde von 8 Strich von *N* nach *d* ab, ziehe *Ad*, parallel mit dieser Linie *CD*, und mache *CD* = 46 (auf dem obigen Maassstabe gemessen), so ist *D* der Ort des Schiffes am Ende des dritten Curses. Zuletzt trage man noch die Chorde von ½ Strich von *S* nach *e* ab, ziehe *Ae*, parallel damit *DE* und mache *DE* = 16, wie vorher, so ist *E* der Ort des Schiffes am Ende des vierten Curses. Hiernach ziehe man *AE* und *EF*, letztere normal auf *AN*, so ist *AE* die Gesammt-Distanz, ∠ *NAE* der Gesammt-Curs, *AF* die beiden entsprechende veränderte Breite und *EF* die Abweichung. Die Seiten des so entstandenen Dreiecks *AEF*, auf demselben Maassstabe gemessen, auf welchem die Distanzen der abgetragenen Curse gemessen sind, giebt: *AE* = 56, *AF* = 42,9 und *EF* = 36,2. Die Chorde *Ng*, auf der Chordescale gemessen, ergiebt den Winkel *NAg* = 40°. Mit der Chorde von 60° beschreibe man von *E* aus den Bogen *hm*, nehme die Chorde von 54° 39′, trage diese von *h* nach *i* ab und ziehe durch *i* die Linie *Ek*, so ist das Dreieck *EFk* das Mittelbreitendreieck und *Ek* die veränderte Länge.

Beispiel 2. Von 64° 10′ NBr. und 1° 0′ OL. von Greenwich segelt ein Schiff rechtweisend NWzW ½ W 60 Seemeilen, N ½ O 100 Seemeilen, NO ¾ O 80 Seemeilen; auf welcher Breite und Länge wird es sich hiernach befinden?

Curs.	Dist.	Veränderte Breite.		Abweichung.	
		N.	S.	O.	W.
NWzW ½ W	60	28,3	—	—	52,9
N ½ O	100	99,5	—	9,8	—
NO ¾ O	80	47,7	—	64,3	—
		175,5		74,1	52,9
				52,9	
		175,5		21,2	

Mit dieser veränderten Breite und Abweichung findet man in der Gradtafel den General-Curs N 7° O, und die Distanz 176,8 Seemeilen.

Die veränd. Breite = 2° 55′,5 N, verlass. Breite = 64° 10′,0 N, erreichte Breite = 67° 5′,5 N.	Mittelbr. = 65° 38′	Abweichung 21,2 Seemeilen Ost, veränd. Länge = 0° 51′,3 Ost, verlass. Länge = 1° 0′,0 Ost, erreichte Länge = 1° 51′,3 O. v. Grw.

Das Schiff befindet sich dieser Rechnung nach auf 67° 5′,5 NBr. und 1° 51′,3 OL. von Greenwich.

Da diese drei Curse bedeutend von einander abweichen, die Distanzen derselben nicht klein sind und in ziemlich hoher Breite liegen, so wird zwar die nach vorstehender Rechnung gefundene Breite richtig sein, aber nicht die Länge. Letztere kann nur dann richtig werden, wenn man

die veränderte Länge von jedem Curse entweder nach Mittelbreite oder Mercator's Dreieck berechnet, und dadurch den Gesammt-Längenunterschied bestimmt.

Die diesfällige Rechnung nach Mittelbreite ist:

Verlassene Breite = 64° 10′ N.
Breite am Ende des I. Curses = 64 38,3 »
» » » » II. » = 66 17,8 »
» » » » III. » = 67 5,5 »

Mittelbreite.	Abweichung. Seem.	Veränderte Länge.	
		O.	W.
64° 24′	52,9 W.	—	2° 2′,6
65 28	9,8 O.	0° 23′,6	
66 42	64,3 O.	2 42,6	

3° 6′,2 O.
2° 2′,6 W.

veränderte Länge = 1° 3′,6 O,
verlassene Länge = 1° 0′,0 O,
erreichte Länge = 2° 3′,6 Ost v. Grw.

Die veränderte Länge wird hiernach 0° 12′,3 grösser gefunden, als nach der vorhergehenden Lösung der Aufgabe.

Nach Mercator's Dreieck wird die veränderte Länge von jedem Curse so gefunden:

Curse.	Die aufeinander folgenden Breiten.	Meridionaltheile.	Meridionaldifferenz.	Veränderte Länge.	
				O.	W.
NWzW ½ W	64° 10′ N.	5062,3	65,5	—	2° 2′,6
N ½ O	64 38,3 »	5127,8	239,7	0° 23′,6	
NO ¾ O	66 17,8 »	5367,5	120,6	2 42,6	
	67 5,5 »	5488,1			

3° 6′,2 O.
2° 2′,6 W.

veränderte Länge = 1° 3′,6 Ost.

V. Das Besteck wird an Bord wenigstens für jeden Mittag berechnet. Da das Maximum der Fahrt des Schiffes während eines Tages im Durchschnitt zu 10 Seemeilen stündlich angenommen werden kann, so würde die grösste Distanz, die ein Schiff von einem Mittage bis zum nächstfolgenden macht, 240 Seemeilen sein, wie in dem letzten Beispiele; die gesegelten Curse werden aber meistens bei einer solchen Distanz nicht so sehr von einander abweichen, als dies in diesem Beispiele der Fall war; man wird daher auch fast immer die Curse, welche ein Schiff in 24 Stunden segelt, koppeln können und nicht nöthig haben, von jedem einzelnen Curse die veränderte Länge zu berechnen, um den Gesammt-Längenunterschied möglichst richtig zu erhalten. Es werden an Bord gewöhnlich, wie bisher, nicht die rechtweisenden, sondern die missweisenden gesegelten Curse gekoppelt. Nachdem so der missweisende Gesammt-Curs und die Distanz gefunden sind, wendet man auf ersteren die Missweisung regelrecht an, wodurch der rechtweisende Gesammt-Curs erhalten wird. Mit diesem rechtweisenden Curse und der Distanz sucht man die veränderte Breite und Abweichung, bestimmt aus letzterer und der Mittelbreite die veränderte Länge, und demnächst die erreichte Breite und Länge. Auf diese Weise ist nur eine Berichtigung für Missweisung vorzunehmen, während, wenn die Breite und Länge für das Ende eines jeden Curses berechnet wird, so viele gemacht werden müssen, als Curse sind.

Beispiel. Von 39° 6′ NBr. und 30° 33′,7 WL. von Greenwich ist bei 22° westlicher Missweisung gesegelt nach dem Compasse, der keine örtliche Ablenkung hat:

SOzO 8,1 Seem., SO ½ O 5,1 Seem., SOzO ½ O 15,0 Seem., OSO 3,0 Seem., OSO ½ O 4,1 Seem., SO 2,9 Seem., SO ½ S 2,0 Seem., SSO ½ O 3,5 Seem., N ½ W 2,9 Seem., NzW ½ W 2,3 Seem., NzW 1,7 Seem., NNO 5,1 Seem., NOzN 3,5 Seem.; wo steht das Besteck?

Curs.	Dist.	N.	S.	O.	W.
SOzO	8,1	—	4,5	6,7	—
SO ½ O	5,1	—	3,2	3,9	—
SOzO ½ O	15,0	—	7,1	13,2	—
OSO	3,0	—	1,1	2,8	—
OSO ½ O	4,1	—	1,2	3,9	—
SO	2,9	—	2,1	2,1	—
SO ½ S	2,0	—	1,5	1,3	—
SSO ½ O	3,5	—	3,1	1,6	—
N ½ W	2,9	2,9	—	—	0,3
NzW ½ W	2,3	2,2	—	—	0,7
NNO	5,1	4,7	—	2,0	—
NOzN	3,5	2,9	—	1,9	—
NzW	1,7	1,7	—	—	0,3
		14,4	23,8	39,4	1,3
			14,4	1,3	
			9,4 S.	38,1 O.	

Die magnetische veränderte Breite 9,4 S. und Abweichung 38,1 O. giebt vermittelst der Gradtafel:

den missweisenden Gesammt-Curs = S 76° O., die Dist. = 39,3 Seem.,
die Missweisung = 22° W.,

folglich ist der rechtw. Gesammt-Curs = N 82° O. Dieser und die Distanz geben nach der Gradtafel:

	Mittelbr. = 39° 9′	Abweichung = 38,9 Seemeilen O,
veränd. Breite = 0° 5′,5 N,		veränd. Länge = 0° 50′,1 O,
verlass. Breite = 39° 6′,0 N,		verlass. Länge = 30° 33′,7 W,
erreichte Breite = 39° 11′,5 N.		erreichte Länge = 29° 43′,6 W.v.Grw.

Das Besteck ist hiernach auf 39° 11′,5 NBr. und 29° 43′,6 WL. von Greenwich.

§. 47.

Richtung und Fahrt des Stromes zu bestimmen; demnächst das Segeln im Strome.

Der Compass und das gewöhnliche Logg geben beide nur, ersterer den Curs, letzteres die Distanz des Schiffes durch's Wasser an. Findet nun in der ganzen Wassermasse, oder den oberen Schichten desselben keine nach einer bestimmten Richtung fortschreitende Bewegung (Strömung) statt, so sind die durch Compass und Logg bestimmten, und in den Fällen, wo Abtrift statt hat, die für diese verbesserten Curse, auch die über den Grund; ist aber Strömung vorhanden, so wird der nach diesen Cursen und Distanzen berechnete Ort des Schiffes so viel von dem wirklichen abweichen, als die Strömung während der Segelung das

Schiff versetzt hat. Will man die Strömung in Rechnung bringen, so muss Richtung und Fahrt derselben und auch die Dauer der Segelung bekannt sein. Die Richtung des Stromes ist die, wohin derselbe setzt, also die Benennung des Stromes ist der Art entgegengesetzt, wie die Richtung des Windes bezeichnet wird. Unter Fahrt des Stromes versteht man die Anzahl Seemeilen, welche derselbe in einer Stunde durchläuft.

I. Bei ruhigem Wetter kann Richtung und Fahrt des Stromes auf dem Meere wie folgt bestimmt werden.

Man setze ein Boot aus, lege dasselbe vor Anker, und logge nun mit dem gewöhnlichen Logge vom Boote aus. Findet Strom statt, so treibt dieser den Loggsector nebst der Loggleine nach der Richtung hin, wohin der Strom setzt. Peilt man nun vom Boote aus nach Beendigung des Loggens den Loggsector (d. h. die Richtung, welche die Loggleine angiebt) mit dem Compasse, so hat man die Richtung des Stromes; seine Fahrt geben die ausgelaufenen Knoten der Loggleine. Auf tiefem Wasser legt man das Boot dadurch vor Anker, dass man einen grossen Kessel oder ein Fass mit Steinen beschwert, an einer Leine 20 Faden und mehr tief, in's Wasser hinablässt, wobei denn freilich vorausgesetzt wird, dass in dieser Tiefe keine Strömung mehr ist, welche Voraussetzung nur selten zutreffend sein dürfte.

II. Wenn ein Schiff in der Nähe des Landes segelt und kenntliche, in der Karte niedergelegte Landobjecte sichtbar sind, so kann Richtung und Fahrt des Stromes durch Vergleichung des Ortes, an welchem das Schiff wirklich ist, mit dem, an welchem es den gesegelten Cursen und Distanzen nach sein sollte, bestimmt werden wie folgt.

Man peile ein Landobject und bestimme dessen Abstand, segele dann einen oder mehrere Curse, ermittele mit dem Logge die entsprechenden Distanzen und bestimme am Ende dieser Segelung wieder den Schiffsort durch Peilung und Abstand von demselben oder einem anderen Landobjecte. Setzt man nun in der Karte die erste Peilung ab, von dieser die gesegelten Curse und Distanzen, demnächst die letzte Peilung; so setzt der Strom von dem letzten Schiffsorte der Segelung nach dem der letzten Peilung, und diese Entfernung in Seemeilen ausgedrückt und durch die Stundenzahl der Segelung dividirt, ist die stündliche Fahrt des Stromes.

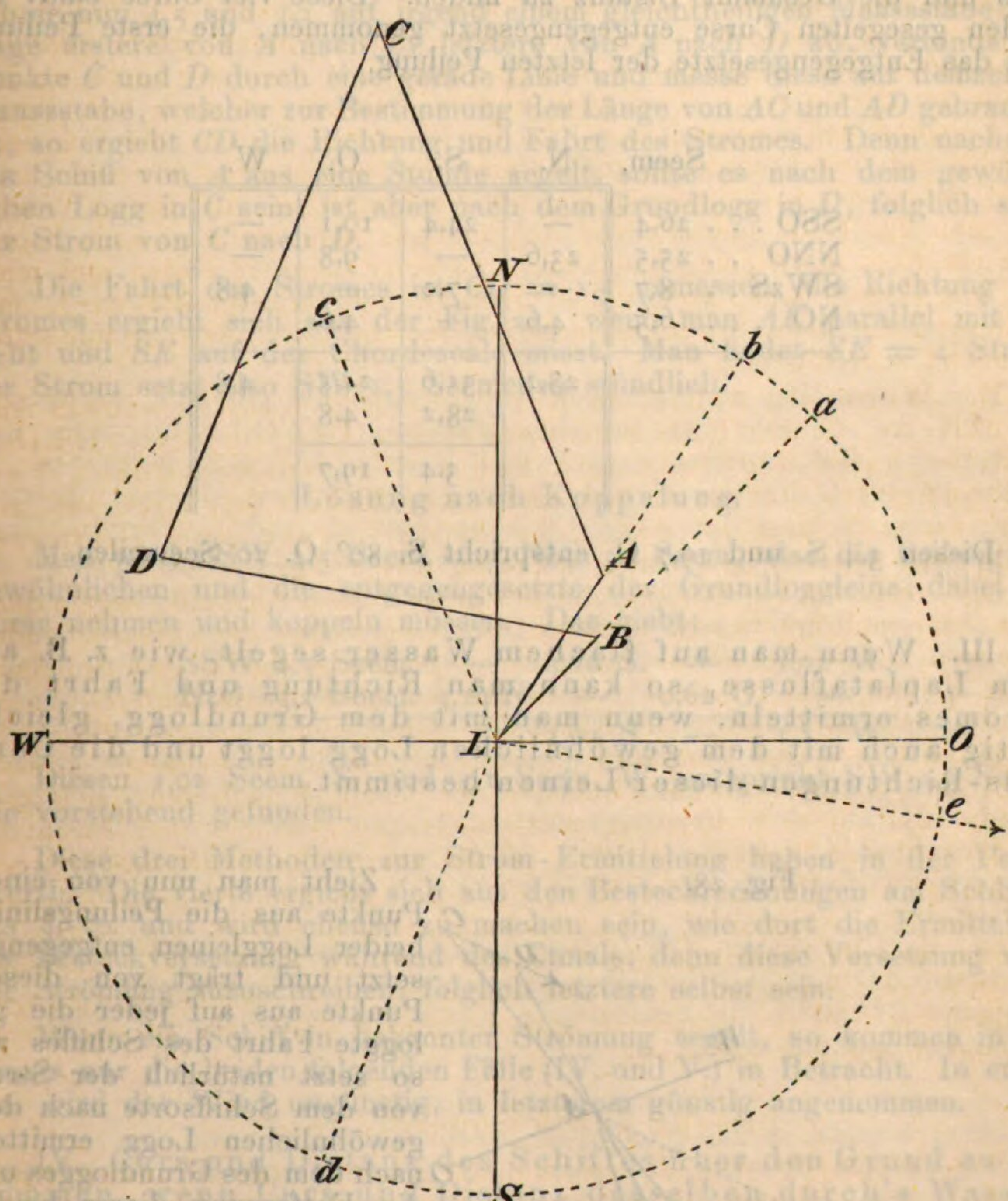
Aufgabe. Um 10 Uhr Morgens wird mit dem Steuer-Compasse ohne örtliche Ablenkung, Skagen Leuchtthurm SWzS 8,7 Seemeilen entfernt, gepeilt, hiernach per Compass gesegelt NNW 26,4 Seemeilen und SSW 25,5 Seemeilen bis 5 Uhr Nachmittags, zu welcher Zeit Skagen Leuchtthurm SW 6,5 Seemeilen entfernt gepeilt wird; wie ist der Strom während dieser Zeit gewesen?

Lösung durch Construction.

Man beschreibe von L aus mit der Chorde von 60° einen Kreis (Fig. 27.), und ziehe in demselben die beiden auf einander normal stehenden Durchmesser NS und OW. In diesem Kreise betrachte man die Punkte N, O, S, W der Reihe nach als den magnetischen Nord-, Ost-, Süd- und Westpunkt, und L als den Ort des Leuchtthurmes auf Skagen. Nun nehme man die Chorden von 3 und 4 Strich, und trage diese von N nach b und a, demnächst nehme man die von 2 Strich und trage diese ein Mal von N nach c, das andere Mal von S nach d ab. Hiernach ziehe man die Geraden Lb, La, Lc, Ld, nehme auf einem gleichtheiligen Maassstabe die Abstände 8,7 und 6,5, erstere trage man von L nach A, letztere von L nach B ab; so ist A der Ort des Schiffes bei der ersten und B der bei der zweiten Peilung des Leuchtthurmes.

Mit *Lc* ziehe man *AC* parallel und mache $AC = 26{,}4$, dann ziehe man *CD* parallel mit *Ld* und nehme $CD = 25{,}5$ — beide Distanzen auf dem bereits gebrauchten gleichtheiligen Maassstabe gemessen — so wird *D* der Ort des Schiffes am Ende des letzten Curses sein.

Fig. 27.



Das Schiff sollte der Segelung nach am Ende des letzten Curses in *D* sein, und ist in *B*, folglich hat der Strom während der 7 Stunden dasselbe von *D* nach *B* gesetzt. Zieht man nun die Gerade *DB*, parallel mit dieser *Le*, und misst *DB* auf dem bekannten Maassstabe, *Se* auf der Chordescale, wodurch $DB = 20$ und $Se = 80°$ gefunden wird, so ergiebt dies, dass der Strom während der 7 Stunden 20 Seemeilen nach S 80° O per Compass gesetzt hat.

Lösung durch Rechnung.

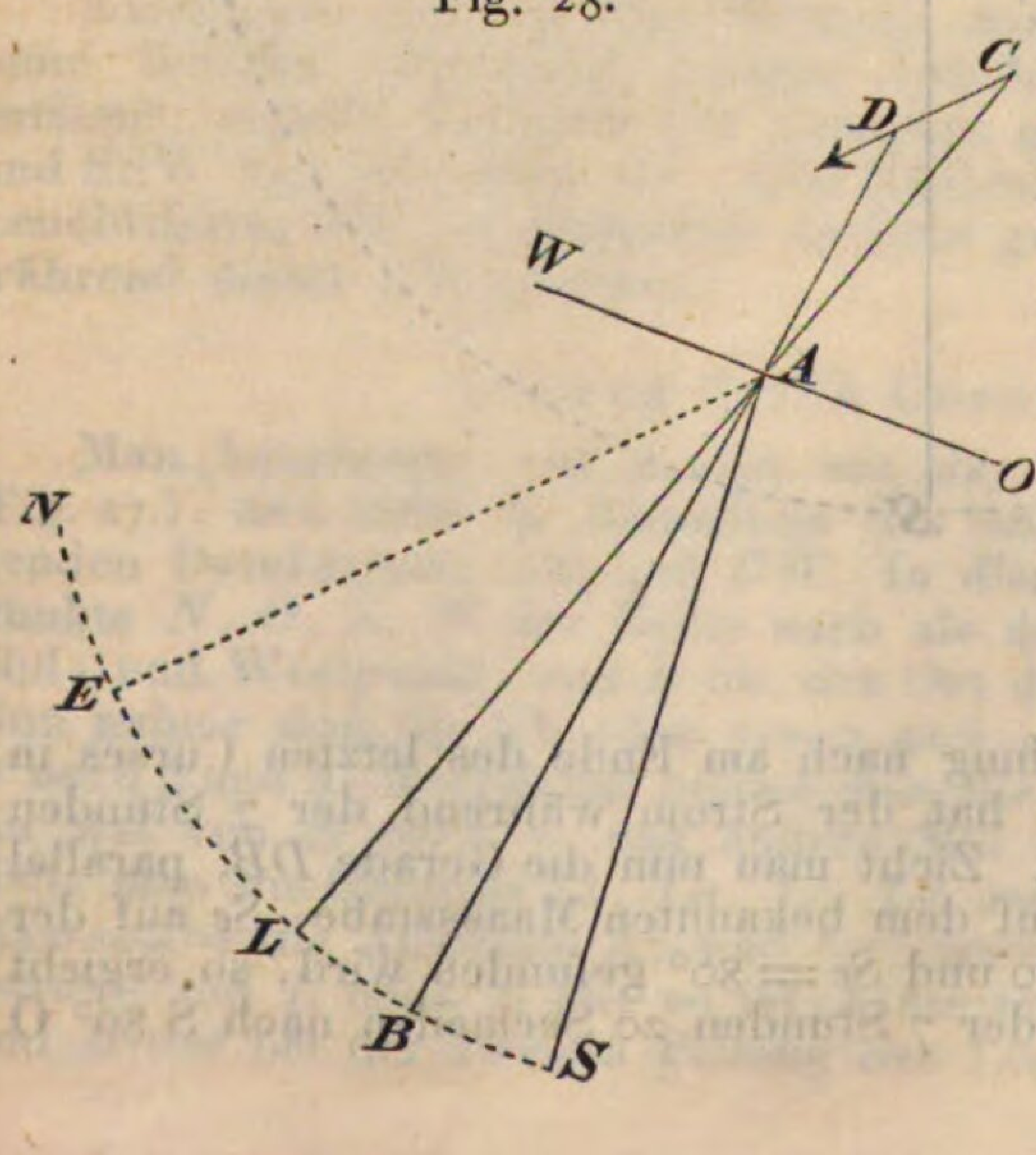
Diese Rechnung ist nichts weiter als eine Curskoppelung, denn es kommt, wie man sich durch die vorstehende Construction überzeugen kann, nur darauf an, aus vier Cursen und ihren Distanzen den Gesammt-Curs und die Gesammt-Distanz zu finden. Diese vier Curse sind: die beiden gesegelten Curse entgegengesetzt genommen, die erste Peilung, und das Entgegengesetzte der letzten Peilung.

	Seem.	N.	S.	O.	W.
SSO . . .	26,4	—	24,4	10,1	—
NNO . .	25,5	23,6	—	9,8	—
SWzS . .	8,7	—	7,2	—	4,8
NO . . .	6,5	4,6	—	4,6	—
		28,2	31,6	24,5	4,8
			28,2	4,8	
			3,4	19,7	

Diesen 3,4 S. und 19,7 O. entspricht S. 80° O. 20 Seemeilen.

III. Wenn man auf flachem Wasser segelt, wie z. B. auf dem Laplataflusse, so kann man Richtung und Fahrt des Stromes ermitteln, wenn man mit dem Grundlogg, gleichzeitig auch mit dem gewöhnlichen Logg loggt und die Compass-Richtungen dieser Leinen bestimmt.

Fig. 28.



Zieht man nun von einem Punkte aus die Peilungslinien beider Loggleinen entgegengesetzt und trägt von diesem Punkte aus auf jeder die geloggte Fahrt des Schiffes ab; so setzt natürlich der Strom von dem Schiffsorte nach dem gewöhnlichen Logg ermittelt, nach dem des Grundlogges und die Entfernung dieser beiden Punkte ist die Fahrt des Schiffes.

Aufgabe. Mit dem gewöhnlichen Logg loggt man 4,5 Knoten, gleichzeitig mit dem Grundlogg 3,2 Knoten, peilt den Sector des ersteren in SSW und die Leine des letzteren in SzW; was ist die Richtung und Fahrt des Stromes?

Lösung durch Construction.

Mit der Chorde von 60° beschreibe man in Fig. 28. von *A* aus den Bogen *SN*, verbinde *A* und *S* durch eine gerade Linie, betrachte *S* als den magnetischen Südpunkt, und trage von demselben aus die Chorden von 2 und 1 Strich nach *L* und *B* ab, demnächst ziehe man von *B* und *L* gerade Linien nach *A* und verlängere dieselben beliebig über *A* hinaus, nehme nun 4,5 und 3,2 auf irgend einem gleichtheiligen Maassstabe und trage erstere von *A* nach *C*, letztere von *A* nach *D* ab, verbinde die Punkte *C* und *D* durch eine gerade Linie und messe diese auf demselben Maassstabe, welcher zur Bestimmung der Länge von *AC* und *AD* gebraucht ist, so ergiebt *CD* die Richtung und Fahrt des Stromes. Denn nachdem das Schiff von *A* aus eine Stunde segelt, sollte es nach dem gewöhnlichen Logg in *C* sein, ist aber nach dem Grundlogg in *D*, folglich setzt der Strom von *C* nach *D*.

Die Fahrt des Stromes ist $CD = 1{,}5$ gemessen, die Richtung des Stromes ergiebt sich aus der Fig. 28., wenn man *AE* parallel mit *CD* zieht und *SE* auf der Chordescale misst. Man findet $SE = 4$ Strich, der Strom setzt also SW 1,5 Seemeilen stündlich.

Lösung nach Koppelung.

Man wird SSW 4,5 Seem. und NzO 3,2 Seem., also die Peilung der gewöhnlichen und die entgegengesetzte der Grundloggleine dabei als Curse nehmen und koppeln müssen. Das giebt:

SSW	4,5 Seem.	—	4,16 S.	—	1,72 W.		
NzO	3,2 Seem.	3,14 N.	—	0,62 O.	—		
			1,02 S.	—	1,1 W.		

Diesen 1,02 Seem. S. und 1,1 Seem. W. entspricht SW 1,5 Seem., wie vorstehend gefunden.

Diese drei Methoden zur Strom-Ermittelung haben in der Praxis Werth. Die vierte ergiebt sich aus den Besteckrechnungen am Schlusse des §. 50. und wird ebenso zu machen sein, wie dort die Ermittelung der Besteckversetzung während des Etmals, denn diese Versetzung wird der Strömung zuzuschreiben, folglich letztere selbst sein.

Wenn ein Schiff in bekannter Strömung segelt, so kommen in der Praxis nur die beiden folgenden Fälle (IV. und V.) in Betracht. In ersterem wird der Wind ungünstig, in letzterem günstig angenommen.

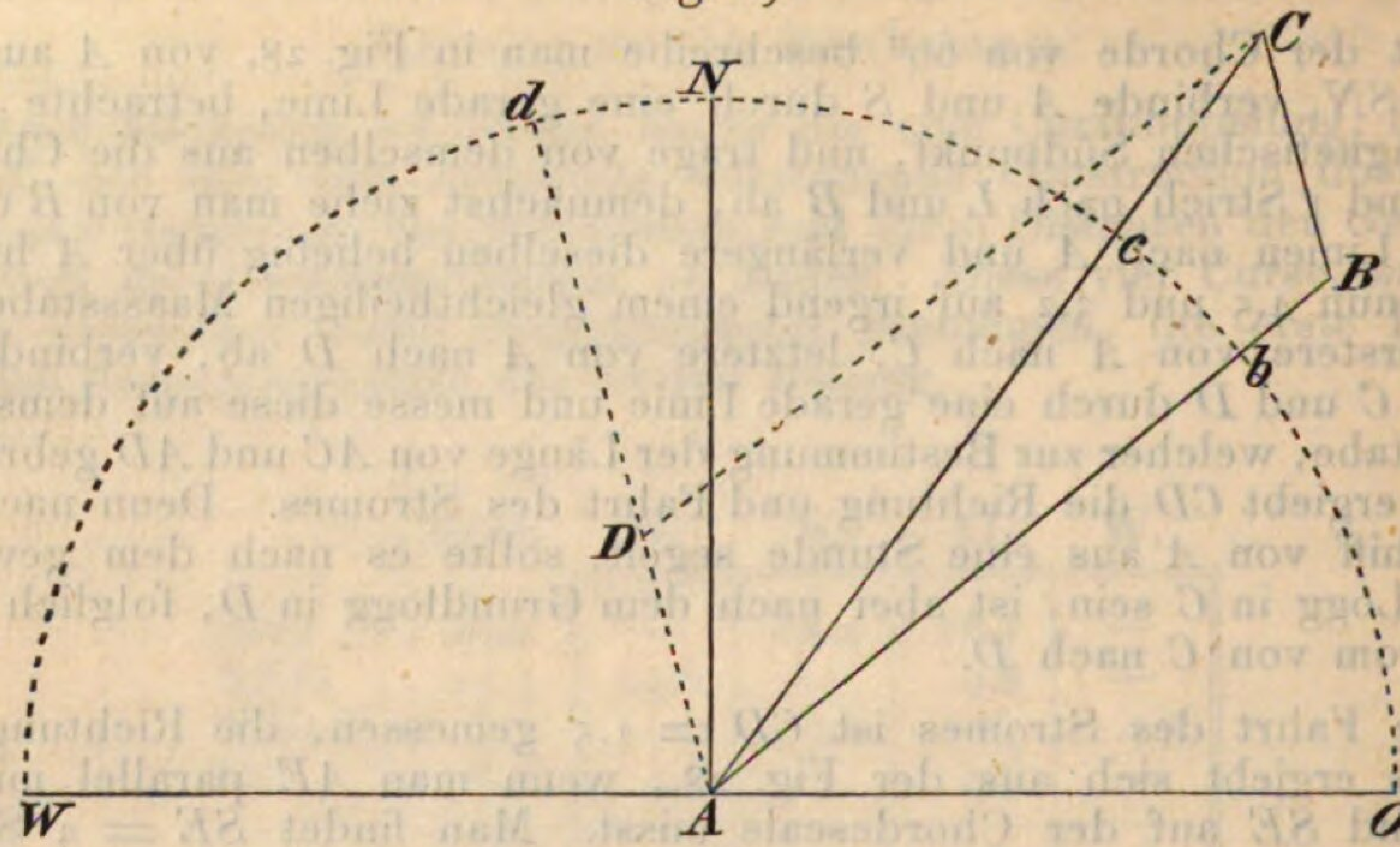
IV. Curs und Distanz des Schiffes über den Grund zu bestimmen, wenn Curs und Distanz desselben durch's Wasser, nebst Richtung und Fahrt des Stromes, gegeben sind.

V. Den Curs zu bestimmen, welchen ein Schiff steuern muss, um mit einer gegebenen Fahrt des Schiffes durch's Wasser, nebst Richtung und Fahrt des Stromes in einer bestimmten Richtung über den Grund zu kommen.

Aufgabe zu IV. Die Fahrt des Schiffes sei 8 Seemeilen stündlich, der gesegelte Curs desselben NO ½ O p. C., der Strom setze stündlich 2,5 Seemeilen nach NzW ¾ W p. C.; was ist dann der Curs und die Fahrt des Schiffes über den Grund?

Lösung durch Construction.

Fig. 29.



Von *A* aus (Fig. 29.), als dem Abgangsorte des Schiffes, beschreibe man mit der Chorde von 60° den Halbkreis *WNO*, ziehe darin den Durchmesser *OW*, normal darauf den Radius *AN*, und betrachte die Punkte *W*, *N*, *O* für den Ort *A* als den magnetischen Westen, Norden, Osten. Man nehme dann die Chorden von $4\frac{1}{2}$ und $1\frac{1}{4}$ Strich, trage erstere von *N* nach *b*, letztere von *N* nach *d* und ziehe die Geraden *Ab* und *Ad*. Demnächst nehme man auf einem gleichtheiligen Maassstabe die Fahrt des Schiffes und Stromes (8 und 2,5), trage jene von *A* nach *B*, diese von *A* nach *D* ab, ziehe dann durch *D* eine Parallele mit *Ab* und durch *B* eine Parallele mit *Ad*, so wird ihr Schnittpunkt *C* der Ort des Schiffes sein, auf welchem sich dasselbe befindet, nachdem es eine Stunde von *A* aus in dieser Strömung gesegelt ist. Zieht man nun die Gerade *AC*, so ist $\angle NAC$ der Curs und *AC* die Fahrt des Schiffes über den Grund. *AC* auf dem benutzten gleichtheiligen Maassstabe und *Nc* auf der Chordescale gemessen, giebt $AC = 9{,}3$ und $\angle NAC = 37°$. Der Curs des Schiffes über den Grund ist also N 37° O p. C. und die Fahrt 9,3 Seemeilen.

Das Parallelogramm *ABCD* nennt man das Parallelogramm der Kräfte; die Seiten *AD* und *AB* desselben repräsentiren die Seitenkräfte und die Diagonale *AC* stellt die resultirende Kraft dar, welche auch blos „Resultirende" genannt wird.

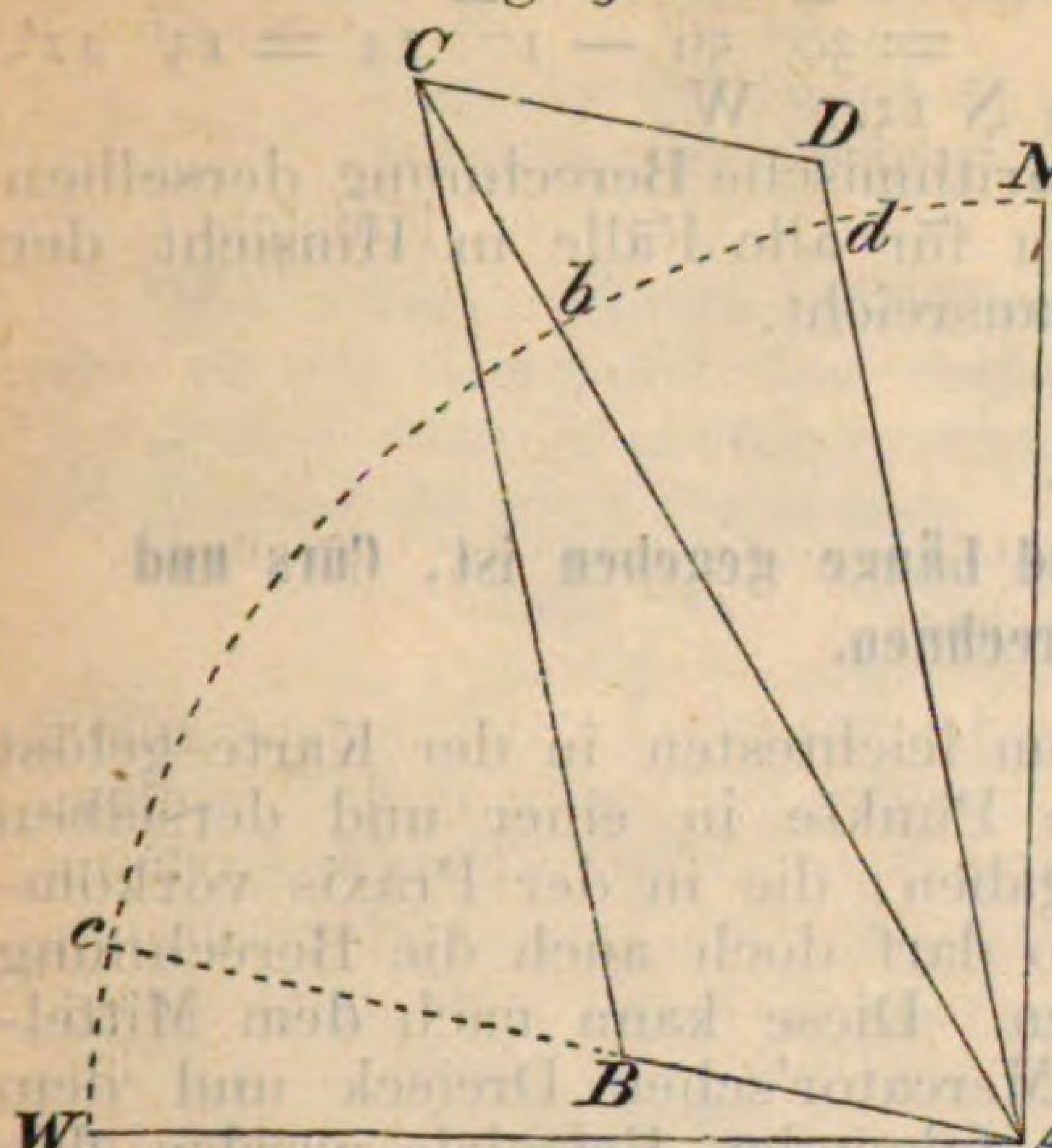
Lösung durch Rechnung.

Diese besteht in der Koppelung zweier Curse, wovon der Curs des Schiffes durch's Wasser der eine, und die Richtung des Stromes der andere ist, wie aus der Fig. 29. hervorgeht. Der General-Curs und seine Distanz von:

	Seem.	N.	O.	W.
NO $\frac{1}{4}$ O . .	8	5,1	6,2	—
NzW $\frac{1}{4}$ W	2,5	2,4	—	0,6
		7,5	5,6	

ist N 37° O 9,3 Seemeilen, also genau übereinstimmend mit dem durch Construction gefundenen Resultat.

Fig. 30.



Aufgabe zu V. Von einem Schiffe befindet sich ein Hafen in NNW $\frac{3}{4}$ W p. C., die Fahrt des Schiffes ist 7,5 Seemeilen stündlich; was muss gesteuert werden, um jenen Hafen zu erreichen, wenn der Strom nach WzN p. C. 3 Seemeilen stündlich setzt.

Lösung durch Construction.

Auf der Geraden *AW* (Fig. 30.) errichte man in *A* die Normale *AN*, beschreibe dann mit der Chorde von 60° den Bogen *WN*, betrachte *A* als den Ort des Schiffes und die Punkte *N* und *W* als den magnetischen Norden und Westen dieses Ortes. Auf der Chordescale nehme man $2\frac{3}{4}$ Strich und 7 Strich, trage diese von *N* nach *b* und *c* ab, und ziehe die Geraden *Ab* und *Ac*. Hiernach nehme man 3 und 7,5 auf einem gleichtheiligen Maassstabe, erstere trage man von *A* nach *B* ab, mit letzterer beschreibe man von *B* aus einen Bogen, der *Ab* oder die Verlängerung dieser Linie schneidet, hier in *C*, und verbinde diesen Punkt mit *B* durch eine Gerade. Durch *A* ziehe man eine Parallele mit *BC* und durch *C* eine Parallele mit *BA*, welche sich in *D* schneiden werden, so ist *ABCD* das Parallelogramm der Kräfte, *AC* die Richtung, in welcher das Schiff den Hafen hat, den es erreichen will, und *AD* die, in der es steuern muss, um dahin zu gelangen. Denn während der Stunde in der das Schiff, in der Richtung *AD* anliegend, mit der gegebenen Fahrt durch's Wasser geht, wirkt der Strom mit seiner Geschwindigkeit ununterbrochen in einer den Seiten *AB* und *DC* parallelen Richtung auf das Schiff, und der Einfluss dieser beiden Kräfte — Fahrt des Schiffes und Fahrt des Stromes in ihren respectiven Richtungen — zwingen dasselbe, sich in der gegebenen Zeit von *A* nach *C* in der geraden Linie zwischen diesen beiden Punkten zu bewegen.

Der Winkel *NAD* ist somit der zu steuernde Curs und *AC* die Fahrt des Schiffes über den Grund. *Nd* auf der Chordescale gemessen, ist 14°, und *AC* auf dem früheren gleichtheiligen Maassstabe = 9,2. Um also NNW $\frac{3}{4}$ W p. C. behalten zu machen, muss das Schiff N 14° W p. C. steuern; seine Fahrt über den Grund ist 9,2 Seemeilen.

Lösung durch Rechnung.

Im $\triangle\, ABC$ ist $AB = 3$, $BC = 7{,}5$ Seemeilen und $\angle\, BAC = 4\frac{1}{4}$ Strich $= 47°\ 49'$, womit die Seite *AC* und der Winkel *ACB* nach der Sinusregel berechnet werden können.

$$BC : AB = \sin \angle\, BAC : \sin \angle\, ACB.$$

$$\begin{aligned}
\lg AB &= 0{,}47712\\
\lg \sin \angle\, BAC &= 9{,}86982\\
\hline
&\ 10{,}34694\\
\lg BC &= 0{,}87506\\
\hline
\lg \sin \angle\, ACB &= 9{,}47188\\
\angle\, ACB &= 17°\ 14'\\
\angle\, BAC &= 47°\ 49'\\
\hline
&\ 65°\ 3'\\
\text{giebt } \angle\, ABC &= 114°\ 57'.
\end{aligned}$$

$$\sin \angle\, BAC : \sin \angle\, ABC = BC : AC.$$

$$\begin{aligned}
\lg \sin \angle\, ABC &= 9{,}95745\\
\lg BC &= 0{,}87506\\
\hline
&\ 10{,}83251\\
\lg \sin \angle\, BAC &= 9{,}86982\\
\hline
\lg AC &= 0{,}96269\\
AC &= 9{,}2.
\end{aligned}$$

Da nun $\angle\, DAC = \angle\, ACB$ und $\angle\, NAD = \angle\, NAC - \angle\, DAC$
$= 30° \, 56' - 17° \, 14' = 13° \, 42'$,
so wird hiernach der zu steuernde Curs N 13,7° W.

Bei Aufgaben dieser Art ist die logarithmische Berechnung derselben ganz überflüssig, indem die Construction für alle Fälle in Hinsicht der erforderlichen Genauigkeit vollkommen ausreicht.

§. 48.

Zwischen zwei Orten, deren Breite und Länge gegeben ist, Curs und Distanz zu berechnen.

Wenngleich Aufgaben dieser Art am leichtesten in der Karte gelöst werden können, besonders wenn beide Punkte in einer und derselben Karte liegen, welches letztere bei Aufgaben, die in der Praxis vorkommen, fast immer der Fall sein wird, so darf doch auch die Berechnung derselben hier nicht übergangen werden. Diese kann nach dem Mittelbreitendreieck, oder auch nach dem Mercator'schen Dreieck und dem nautischen Cursdreieck geschehen. Die folgenden Beispiele werden den Gang der Rechnung zeigen.

1. Was ist der Curs und die Distanz von 48° 16' NBr. und 14° 10' WL. nach 46° 1' NBr. und 16° 3' WL. von Greenwich?

Lösung nach Mittelbreite.

Abgangsorts-Breite	= 48° 16' N,	Mittelbr. = 47° 8'	Abgangsorts-Länge	= 14° 10' W,
Bestimmungsorts-Br.	= 46° 1' N,		Bestimmungsorts-L.	= 16° 3' W,
Breitenunterschied	= 2° 15' S,		Längenunterschied	= 1° 53' W,
	= 135' S.			= 113' W.

Mit 47° 8' Mittelbreite und 113' Längenunterschied findet man in der Gradtafel die Abweichung = 76,9 Seemeilen W. Mit dieser Abweichung und dem Breitenunterschied wird ferner in der Gradtafel der Curs S 29,5° W, und die Distanz 155,1 Seemeilen gefunden.

Lösung nach dem Mercator'schen Dreieck.

Abgangsorts-Breite	= 48° 16' N,	Meridionaltheile	= 3316,5
Bestimmungsorts-Br.	= 46° 1' N,	»	= 3117,0
		Meridionaldifferenz	= 199,5 S.

Mit dieser Meridionaldifferenz und dem Längenunterschied findet man in der Gradtafel den Curs S 29,5° W. Mit diesem Curswinkel und dem Breitenunterschied wird in der Gradtafel die Distanz 155,1 Seemeilen gefunden. Der Curs ist rechtweisend.

2. Von 2° 10' SBr. und 0° 16' OL. von Greenwich will man wissen, was der Curs und die Distanz ist, bis 4° 8' NBr. und 2° 5' WL. von Greenwich.

Lösung nach Mittelbreite.

Abgangsorts-Breite	= 2° 10' S,	Mittelbr. = 2° 4'	Abgangsorts-Länge	= 0° 16' O,
Bestimmungsorts-Br.	= 4° 8' N,		Bestimmungsorts-L.	= 2° 5' W,
Breitenunterschied	= 6° 18' N,		Längenunterschied	= 2° 21' W,
	= 378' N.			= 141' W.

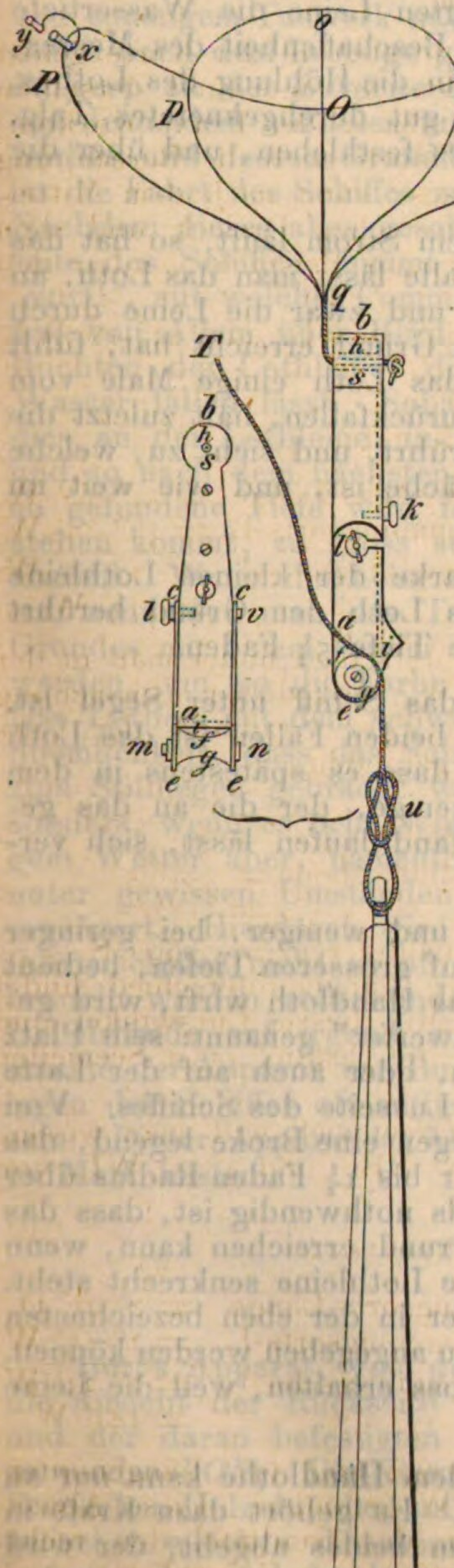
In der Gradtafel wird mit 2° 4' Mittelbreite und 141' Längenunterschied die Abweichung = 140,9 Seemeilen W gefunden. Diese Abweichung und der Breitenunterschied geben in der Gradtafel den rechtweisenden Curs = N 20¼° W, und die Distanz = 403,4 Seemeilen.

Lösung nach Mercator's Dreieck.

Abgangs-Breite $= 2^\circ\ 10'$ S, Meridionaltheile $= 130{,}0$
Bestimm.-Breite $= 4^\circ\ 8'$ N, » $= 248{,}2$
Meridionaldifferenz $= 378{,}2$ N.

Mit dieser Meridionaldifferenz und dem Längenunterschied findet man in der Gradtafel den rechtweisenden Curs N $20\frac{1}{2}^\circ$ W. Mit diesem Curse und dem Breitenunterschied $= 378'$ findet man in derselben Tafel die Distanz $= 403{,}6$ Seemeilen.

Fig. 31.



§. 49.

Vom Lothe, der Lothleine und dem Gebrauche derselben.

Das Loth ist ein bleierner, pyramiden- oder kegelförmiger Körper, in dessen Grundfläche sich eine Höhlung befindet, und dessen oberes Ende mit einem Loche versehen ist, durch welches ein kurzer Stropp geht (*W* und *u* Fig. 31.).

An Bord eines jeden Schiffes müssen mindestens zwei Lothe sein, ein schweres Loth und ein Handloth, wovon das erstere 30 bis 40 ℔, das letztere 5, 6 bis 8 ℔ wiegt.

Auf einigen Schiffen hat man auch noch ein Mittelloth von 12 bis 16 ℔ Gewicht.

Zu jedem Lothe gehört eine Leine von verhältnissmässiger Stärke und Länge. Die Handloth-Leine ist gewöhnlich 25 Faden, und die schwere Lothleine 100 Faden lang; erstere enthält 1,2 Zoll Umfang (18 Garne) und letztere 1,7 bis 1,8 Zoll Umfang (27 Garne). In einem Ende einer jeden Lothleine ist ein Auge gesplisst, welches man durch den Stropp des Lothes und hiernach das Loth durch das Auge steckt, wodurch, wenn man die Leine zurückzieht, beide an einander befestigt sind. Jede Lothleine wird von diesem Auge an, in Faden eingetheilt, und in den Theilungspunkten mit passenden Marken versehen. Diese Marken werden nach seemännischem Gebrauche auf der Handlothleine in 2, 3, 5, 7, 10, 13, 15, 17 und 20 Faden angebracht. In 2 und 3 Faden befestigt man schwarze Läppchen (gewöhnlich von Leder), in 5 ein

weisses, in 7 ein rothes, in 10 und 13 schwarze lederne, in 15 ein weisses, in 17 ein rothes, und in 20 zwei Knoten. Zweckmässig ist es, in 10 Faden statt des ledernen Läppchens einen Knoten zu befestigen.

Die schwere Lothleine wird nicht so speciell eingetheilt, sie bekommt in der Regel in 10 Faden einen Knoten, in 20 Faden zwei, in 30 Faden drei u. s. w. und zwischen den Knoten in jedem fünften Faden eine Marke, welche ein Läppchen, oder ein Endchen gedrehtes Takelgarn sein kann.

Mit dem Lothe und der daran befestigten Leine die Wassertiefe messen, heisst Lothen. Soll gleichzeitig die Beschaffenheit des Meeresbodens untersucht werden, so schmiert man in die Höhlung des Lothes, bevor es über Bord gelassen wird, reines, gut durchgeknetetes Talg, woran einige der loseren Theile des Grundes festkleben, und über die Beschaffenheit des Grundes Aufschluss geben.

Wenn das Schiff vor Anker liegt und kein Strom läuft, so hat das Lothen gar keine Schwierigkeit. In diesem Falle lässt man das Loth, an die Leine gesteckt, über Bord in's Wasser, und zwar die Leine durch die Hand laufen; sobald das Loth nun den Grund erreicht hat, fühlt man dies an der Leine. Man hebt dann das Loth einige Male vom Grunde, und lässt es wieder auf denselben zurückfallen, hält zuletzt die Leine so straff, dass das Loth den Grund berührt, und sieht zu, welche Marke der Leine in oder über der Wasserfläche ist, und wie weit im letzten Falle sie über derselben steht.

Befindet sich z. B. die erste rothe Marke der kleinen Lothleine $1\frac{1}{2}$ Faden über der Wasserfläche, wenn das Loth den Grund berührt und die Leine straff gehalten wird, so ist die Tiefe $5\frac{1}{2}$ Faden.

Anders muss verfahren werden, wenn das Schiff unter Segel ist, oder in starkem Strome vor Anker liegt. In beiden Fällen ist das Loth so weit nach vorne über Bord zu werfen, dass es spätestens in dem Augenblicke den Grund erreicht, wenn derjenige, der die an das geworfene Loth befestigte Leine durch seine Hand laufen lässt, sich vertical über demselben befindet.

Zum Lothen auf Tiefen von 15 Faden und weniger, bei geringer Fahrt des Schiffes oder des Stromes, auch auf grösseren Tiefen, bedient man sich des Handlothes. Derjenige, der das Handloth wirft, wird gewöhnlich „der Mann am Lothe", auch „Lothwerfer" genannt; sein Platz ist in den Fockrüsten, oder grossen Rüsten, oder auch auf der Latte des Fockwantes oder grossen Wantes an der Luvseite des Schiffes. Von hier aus wirft er, sich mit dem Unterleibe gegen eine Broke legend, das Loth ein Mal auch zwei Mal im Kreise von 1 bis $1\frac{1}{2}$ Faden Radius über den Kopf schwingend, so weit nach vorne, als nothwendig ist, dass das Loth spätestens in dem Augenblicke den Grund erreichen kann, wenn der Lothwerfer sich darüber befindet und die Lothleine senkrecht steht. Nur in dem Falle, wenn sich der Lothwerfer in der eben bezeichneten Richtung befindet, wird die Wassertiefe genau angegeben werden können, und in jedem anderen Falle wird sie zu gross erhalten, weil die Leine schräg zu stehen kommt.

Das schnelle und richtige Lothen mit dem Handlothe kann nur an Bord durch häufige Uebung erlernt werden. Es gehört dazu Kraft in den Armen und auch Geschicklichkeit. Wem beides abgeht, der wird nie ein ausgezeichneter Lothwerfer werden.

Wenn die Fahrt des Schiffes grösser als 6 Seemeilen stündlich ist, so wird selbst ein gewandter Lothwerfer auf 10 Faden Tiefe zu thun haben, Grund zu bekommen. In diesem Falle bedient man sich des Mittellothes an der Handloth-Leine befestigt und lothet damit, wie mit dem schweren Lothe. Reicht diese Leine nicht mehr zu, so nimmt man die schwere Lothleine.

Beim Lothen mit dem schweren Lothe wird dieses nach dem Luv- oder Leebuge gebracht, je nachdem das Schiff wenig oder viel abtreibt, die zu diesem Lothe gehörige Lothleine vom hinteren Theile des Schiffes an der Luvseite aussenbords frei von allen Schooten, Halsen und sonstigem Tauwerk nach dem Luvbuge oder unter den Wasserstagen durch nach dem Leebuge gemannt und dort an das Loth gesteckt. Beim Fallreep an der Luvseite lässt man noch einige Buchten der Lothleine von Jemandem aufholen und in der Hand halten, auch die Höhlung des Lothes und dessen Grundfläche mit reinem Talge beschmieren. Ferner ist die Fahrt des Schiffes zu mindern, wenn sie zu gross scheinen sollte. Nachdem dieses alles geschehen ist, stellt man sich hinten an die Luvseite des Schiffes, nimmt die Lothleine in die Hand und commandirt: „wirf!", auf welches Commando der Mann im Buge des Schiffes das Loth frei von Allem über Bord wirft, und der beim Fallreep stehende die Buchten der Lothleine, die er in der Hand hat, frei vom Schiffe in's Wasser fallen lässt. Sobald das Loth den Grund erreicht, fühlt man dies an der Lothleine, in welchem Augenblicke man diese straff zieht, und so nach dem nächsten Knoten derselben die Tiefe entnimmt. Diese so gefundene Tiefe wird fast immer, da die Leine meistens schräg zu stehen kommt, zu gross sein, wofür man dann nach Schätzung etwas abzieht. Wenn die Leine eingeholt und das Loth auf's Deck gemannt ist, schneidet man das Talg nebst den daran klebenden Theilen des Grundes mit einem Messer ab, legt es auf ein Brett und lässt es trocken werden, um so die Farbe des Grundes besser beurtheilen zu können. Das Lothen mit dem schweren Lothe auf grossen Tiefen hat die Unbequemlichkeit, dass das Schiff an den Wind gelegt und gewissermaassen zum Stillliegen gebracht werden muss, was bei gutem Wetter und besonders, wenn es beim Winde segelt, leicht zu bewirken ist; bei unruhigem Wetter aber, namentlich wenn das Schiff vor dem Winde segelt, unter gewissen Umständen viel Arbeit verursacht und auch die Reise verzögert. Hierdurch wird es erklärbar, weshalb das Loth auf Kauffahrteischiffen nicht so oft gebraucht wird, als es vernünftigerweise gebraucht werden sollte und auch gebraucht werden würde, wenn diese Uebelstände auf irgend eine Art beseitigt werden könnten. Deshalb musste der Apparat von Burt, welcher, zweckmässig gebraucht, das Beilegen des Schiffes oft entbehrlich macht, den Schiffsführern willkommen sein. Dieser Apparat ist äusserst einfach und auch billig; er wird etwa 12 Mark kosten.

Burt's Apparat, von dem in Fig. 31. rechts die Seitenansicht, links die Ansicht der Rückseite dargestellt ist, besteht aus der Klemme *bc* und der daran befestigten Boje, auch Lothsack genannt, in der Form *porq* oder *PORq*. Die Klemme besteht aus dem viereckigen abgerundeten Stückchen Holz *ba*, den auf beiden Seiten angebrachten Messingplatten *ce*, zwischen welchen die messingene Rolle *fg* mit den Schrauben *m* und *n* befestigt ist, und der langen, auf der Rückseite des Holzes *ab*, zwischen

h und *k* festgeschraubten Messingplatte *hi*, die als Feder dient, und mittelst der Schraube *k* mit ihrem Ende *i* der Rolle *fg* genähert oder auch davon entfernt werden kann. Die eine Seitenplatte *ce* mit dem Einschnitte bei *l* ist um den Zapfen *m* drehbar, die andere mit den Schrauben *v* und *n* an das Holz *ab* und die Rolle *fg* festgeschraubt. Die erstere heisst Klappe. Die Klemme nennt man geschlossen, wenn die Klappe durch die Seitenschraube *l* festgeschraubt ist, geöffnet, wenn die Schraube *l* gelöst und die Klappe so weit zurückgeschlagen wird, dass über die Rolle *fg* eine Lothleine gelegt werden kann. Die Lothleine kann nur in der Richtung von *T* nach *u* über die Rolle *fg* gezogen werden; eine entgegengesetzte Bewegung wird durch die Feder *hi* verhindert.

Die zu diesem Apparate gehörige Boje ist gewöhnlich ein bramtuchener, dreieckiger Beutel, in Fig. 31. durch *PORq* dargestellt, der bei *P* mit einer kleinen hölzernen Röhre *x* und dazu passendem Stöpsel *y* versehen ist. Diesen Beutel legt man einige Minuten in's Wasser, wodurch er ziemlich luftdicht wird, dann nimmt man die Röhre *x* in den Mund, bläst durch dieselbe so viel Luft in den Beutel, dass er möglichst hart wird, und verschliesst ihn hiernach mit dem Stöpsel *y*. Dieser Beutel ist bei *q* mit einer kurzen Leine versehen, welche durch das Loch in der Klemme bei *h* gesteckt und auf diese Weise ersterer an letztere in 6 bis 8 Zoll Entfernung befestigt wird.

Das Lothen mit dem Burt'schen Apparate ist einfach. Man macht sowohl das schwere Loth als auch die dazu gehörige Lothleine wie beim gewöhnlichen Lothen fertig, nur die Fahrt des Schiffes mindert man nicht. Man füllt den Beutel von Burt's Apparat mit Luft, öffnet die Klemme, legt die Lothleine, mit einem Bott zwischen Loth und Apparat von ungefähr der halben Wassertiefe, auf der sich muthmaasslich das Schiff befindet, so in dieselbe hinein, dass die Rückseite des Burt'schen Apparates dem Lothe zugekehrt ist, wie in Fig. 31., und verschliesst die Klemme. Will man das Lothen mit diesem Apparate selbst machen, so nimmt man hiernächst die Lothleine und Burt's Apparat auf dem Hintertheil des Schiffes selbst in die Hand, sieht danach, dass die Lothleine klar zum Laufen liegt und commandirt dann: „wirf!" Nachdem das Loth geworfen ist, wirft man auch den erwähnten Apparat über Bord und steckt von der Lothleine gehörig nach. Sobald das Loth die Lothleine über die Rolle des Apparates zieht, wird sie mit einer Geschwindigkeit durch die Hand laufen, die grösser als die Fahrt des Schiffes ist, und dann erst langsamer auslaufen, wenn das Loth den Grund erreicht hat. Während dieser Zeit wird der mit Luft angefüllte Beutel des Apparates, auf dem Wasser schwimmend, sehr nahe vertical über dem am Grunde befindlichen Lothe stehen, und die zwischen Apparat und Loth eine Gerade bildende Lothleine die Wassertiefe sein. Wenn man merkt, dass das Loth den Grund erreicht hat, wird die Leine an Bord festgehalten und eingeholt. In diesem Augenblicke wird der Apparat durch die Schwere des Lothes und die Fahrt des Schiffes unter's Wasser gezogen, dadurch an die Leine festgeklemmt und die Luft durch den Wasserdruck aus dem Beutel gepresst, in Folge dessen das Einholen der Lothleine bedeutend erleichtert wird. Wenn das Loth, bevor es ausgeworfen, in der angegebenen Art mit Talg bestrichen worden ist, so wird man daran ersehen können, ob es den Grund erreicht hat, und der Punkt, an welchem sich der Apparat an die Leine beim Einholen des Lothes festgeklemmt findet, ergiebt die Wassertiefe.

Bei grosser Tiefe und Fahrt (über 30 Faden und 5 Seemeilen stündlich) hat häufig der eine mit Luft gefüllte Beutel nicht Tragfähigkeit genug; in diesem Falle nimmt man einen zweiten zu Hülfe.

§. 50.

Vom Schiffsjournal.

In das Schiffsjournal (Schiffstagebuch) werden Ereignisse, die auf das Schiff, dessen Reise und Schiffsbesatzung Bezug haben, der Wahrheit gemäss leserlich und reinlich niedergeschrieben. Die gebräuchlichste und geeigneteste Form eines solchen Buches ist das Folio- oder Quartformat. Ein gut geführtes Schiffsjournal gewährt dem Führer des Schiffes einen zweifachen Nutzen, ein Mal, dass er auf See zu jeder Zeit den wahrscheinlichen Ort des Schiffes daraus ersehen, das andere Mal, dass er sich bei den betreffenden Behörden, seinem Rheder, oder sonst Interessirten am Schiffe bezw. an der Ladung, besonders bei eingetretenen Unglücksfällen, über seine Handlungen ausweisen kann. Der leichteren Führung und Uebersicht wegen hat man in dem Schiffsjournal mehrere Rubriken mit passenden Ueberschriften angebracht, worin das Dahingehörige vermerkt wird. Ueber Einrichtung und Führung des Schiffsjournals hat der verstorbene vormalige Navigationsschul-Director zu Danzig, Contre-Admiral von Bille, seinerzeit Manches geschrieben, von dem hier zum Theil Gebrauch gemacht wird.

Die rubricirten Blätter sind für den Gebrauch, wenn das Schiff unter Segel ist, eingerichtet, sie können aber auch, wenn dasselbe vor Anker oder im Hafen liegt, benutzt werden.

Jede Blattseite dieser Blätter umfasst 24 Stunden, welchen Zeitraum von einem wahren Mittage bis zum nächstfolgenden Seeleute ein Etmal nennen, und zwar, wenn das Schiff während desselben unter Segel ist, Segel- oder See-Etmal, wenn es vor Anker oder im Hafen liegt, Anker-Etmal. Die Segel-Etmale nehmen nach alter Sitte bei den Seeleuten ihren Anfang mit dem wahren Mittage und enden somit am nächstfolgenden.

Die Anker-Etmale beginnen gewöhnlich um Mitternacht, umfassen also einen bürgerlichen Tag.

Einrichtung und Gebrauch der Anker-Etmale für Kauffahrteischiffe.

Jede rubricirte Blattseite kann zu vier Anker-Etmalen eingerichtet werden. Zu diesem Behuf ziehe man drei gerade Linien querüber auf der Blattseite, und zwar die erste unter der oberen 6, die zweite unter der mittleren 12, und die dritte unter der unteren 6, welche Ziffern in der zweiten Rubrik — von der Linken nach der Rechten — stehen, ändere sodann die Ziffern in dieser Rubrik um, und zwar 1 in 4, 2 in 8, 3 in 12, 5 in 8, 6 in 12, 7 in 4, 9 in 12, 10 in 4 und 11 in 8.

Hiernach schreibe man Tag und Datum in die erste Rubrik neben der oberen 4 in der zweiten Rubrik eines jeden Anker-Etmals. Die so umgeänderten Ziffern in der Rubrik bezeichnen dann jede 4te Stunde von Mitternacht anfangend. Die dritte Rubrik, mit Wind und Wetter überschrieben, behält ihre Bestimmung; die vierte dagegen, sonst für den gesteuerten Curs bestimmt, kann, wenn das Schiff vor Anker liegt, zur Notirung der Richtung und Fahrt des Stromes benutzt werden.

Die beiden folgenden kleinen Rubriken mit den Ueberschriften „Abtrift" und „Localdeviation" können, wenn das Schiff vor Anker liegt, zur Eintragung der Wassertiefe, besonders wo Fluth und Ebbe läuft, benutzt werden. Die nun noch folgenden Rubriken sind sämmtlich zu der letzten grossen zu nehmen, und darin alle an Bord vorkommende Arbeiten und sonstige Ereignisse neben den Stunden, in welchen sie stattgefunden haben, zu vermerken.

Einrichtung und Gebrauch des rubricirten Journal-Schema's bei Segel-Etmalen.

Die Datirung des Segel-Etmals und die Ueberschrift der Journal-Seiten.

Wie bereits früher bemerkt ist, fangen die Segel-Etmale im wahren Mittage an, und reichen bis zum nächstfolgenden. Die obere Hälfte einer rubricirten Journal-Seite gehört somit dem Nachmittage des einen, und die untere dem Vormittage des darauf folgenden Tages nach bürgerlicher Zeitrechnung an. Nach diesem letzteren Tage wird gewöhnlich das Etmal benannt. Links oben über den beiden ersten Rubriken wird Jahrzahl und Monat geschrieben. MN. auf der halben Länge der Blattseite in der ersten Rubrik, bedeutet Mitternacht, und der darunter befindliche Strich bildet die Scheidewand zwischen den beiden auf einander folgenden Tageshälften des Segel-Etmals. Unter diesen Strich setzt man das Datum (Wochen- und Monatstag) des hier beginnenden bürgerlichen Tages. Bei der Datirung des Journals ist jedoch in Bezug auf die Ueberfahrt über den Meridian von 180° Ost- oder Westlänge zu bemerken, dass, sobald man von Osten nach Westen oder umgekehrt über den gedachten Meridian fährt, auch die Länge von 180° Ost auf 180° West oder umgekehrt gesetzt werden muss; denn, da man die geographische Länge vom ersten Meridian, sowohl nach Osten, als auch nach Westen herum, bis 180° zählen kann, so muss ein und derselbe Meridian durch 180° Ost- und 180° Westlänge gehen. Sobald aber der gedachte Uebergang statthat, oder vielmehr, wenn man eine Veränderung in der Bestecklänge in dieser Beziehung vornimmt, muss diese dadurch ausgeglichen werden, dass das Datum im Journal um einen Tag verändert wird, und zwar muss, sobald das Besteck von 180° Ost- auf 180° Westlänge übertragen wird, das Datum um eins verkleinert oder einen Tag zurückgenommen werden; wird dagegen das Besteck von 180° West- auf 180° Ostlänge gesetzt, so muss das Datum um eins vermehrt, oder einen Tag vorausgenommen werden. Durch diese Uebergänge von Ost- auf Westlänge und die gedachte Veränderung des Datums, wird es bewirkt, dass, wenn man bei einer Umsegelung der Erde wieder nach dem Meridian der Abfahrt zurückkommt, das Datum des Schiffs-Journals mit dem Datum des Meridians übereinstimmend sein muss, welches nicht der Fall sein würde, wenn man den Uebergang der Länge von Ost nach West oder umgekehrt über den Meridian von 180° Länge zwar berücksichtigt, das Datum aber diesem gemäss nicht geändert hätte. Ferner wird durch die in Rede stehende Veränderung des Datums und der Zeit bewirkt, dass man durch Anwendung der Länge, in Zeit ausgedrückt, auf die Schiffszeit, und zwar mit + wenn West- und mit — wenn Ostlänge, immer die der Schiffszeit entsprechende Zeit des ersten Meridians, gewöhnlich des Meridians von Greenwich erhält, welche in der nautischen Astronomie sehr häufig zur Anwendung kommt.

Ueberschrift der Journal-Seiten.

Man beginne mit der Bezeichnung der Gattung des Schiffes (als Schooner, Brigg, Bark u. s. w.) und Angabe seines Namens, dann schreibe man hinter den Worten „auf der Reise von" den Abgangsort, und hinter dem Worte „nach" den Bestimmungsort des Schiffes, und endlich hinter dem Worte „in" den Namen des Gewässers und mitunter auch noch den ungefähren Ort in demselben, auf welchem das Schiff sich zu der Zeit befindet.

Die übrigen Rubriken des Segel-Etmals.

1. Die mit „U" bezeichnete Rubrik enthält die vollen Stunden nach bürgerlicher Zeitrechnung gezählt.

2. In die mit „Wind und Wetter" bezeichnete Rubrik wird zuerst der nächstvolle Compassstrich, von dem der Wind herweht, geschrieben, daneben die Kühlte (Stärke des Windes) durch eine Ziffer bemerkt, deren Bedeutung nach bestimmten Annahmen festgestellt, und aus den dem Journal vorgehefteten desfallsigen Notizen zu ersehen ist. Hierneben in dieselbe Rubrik wird die Beschaffenheit des Wetters kurz angegeben, und zwar mit: hell, trübe, bewölkt u. s. w. oder durch Zeichen, die einfach, und vorhergehend erklärt sein müssen.

Zweckmässig wird auch die Bezeichnung der Wolken nach Howard's Klassificirung sein. Diese ist folgende:

1) Die Federwolke (cirrus), die sich gewöhnlich zuerst am Himmel zeigt und das Ansehen feiner Streifen oder Flocken hat.

2) Die Haufenwolke (cumulus). Diese Wolken sieht man, besonders im Sommer, wie grosse, schwere Massen am Himmel schweben; von der Sonne beschienen, erscheinen sie weiss und in der Nähe des Horizontes haben sie das Ansehen ferner Gebirge.

3) Die Schichtwolke (stratus) bedeckt, scheinbar wagerecht ausgebreitet, grosse Strecken des Himmels.

4) Die Regenwolke (nimbus) ist bekannt genug.

Uebergangswolken sind: die federige Haufenwolke (cirro-cumulus), Schäfchen genannt, die federige Schichtwolke (cirro-stratus) und die geschichtete Haufenwolke (cumulo-stratus).

Die Stärke des Windes geben Seeleute nach dem obersten Raasegel an, das ein Schiff, wenn es beim Winde segelt, noch gut führen kann. Verträgt z. B. ein Brigg-, Bark- oder dreimastiges Schiff beim Winde segelnd noch die Oberbramsegel, so sagt man, es ist Oberbramsegels-Kühlte; kann es aber nur die Bram- oder Marssegel tragen, so nennt man dies im ersten Falle Bramsegels-, im letzten Marssegels-Kühlte. Die Raasegel bezeichne man im Journal, von oben bis unten gezählt, mit den Ziffern von 1 bis 9 oder 12; die Stärke des Windes mit denselben Ziffern. Es bedeutet dann:

0 Windstille,
1 Oberbramsegels-Kühlte,
2 Bramsegels-Kühlte,
3 Bramsegels-Kühlte mit 1 Reef,

4 Marssegels-Kühlte,
5 Marssegels-Kühlte mit 1 Reef,
6 Marssegels-Kühlte mit 2 Reefen,
7 Marssegels-Kühlte mit 3 Reefen,
8 Untersegels-Kühlte,
9 gereefte Untersegels-Kühlte oder Sturm,
10 starker Sturm,
11 harter Sturm,
12 Orkan.

Wer sich dieser Zeichen nicht bedienen will, wird die Stärke des Windes mit Worten verkürzt schreiben müssen.

Die Richtung des Seeganges, d. h. nach welchem Compassstrich hin sich die Wellen bewegen, sowie auch, ob sie der Stärke des Windes angemessen sind, sollte ebenfalls in dieser Rubrik vermerkt werden; da hierzu aber der Raum mangelt, so werden Notizen dieser Art in der grossen Rubrik für Ereignisse ihren Platz finden. Hat man Barometer und Thermometer an Bord, so schreibe man auf See mindestens jede vierte Stunde den Stand derselben in die erste Rubrik, nämlich unter „Bar." den des Barometers, unter „Ther." den des Thermometers, dieses im Freien und Schatten beobachtet. Die Temperatur des oberen Meerwassers sollte man gleichfalls jede vierte Stunde untersuchen, und im Journal in der grossen Rubrik vermerken.

Das öftere Beobachten des Barometers ist zu empfehlen, denn ein allmäliges Steigen desselben deutet auf ruhiges, ein Fallen dagegen auf unruhiges Wetter. Ein schnelles Fallen des Barometers hat meistens Sturm zur Folge; ebenso ein schnelles bedeutendes Steigen.

Die Scale von Admiral Beaufort, betreffend die Windstärke, folgt hier, weil sie dem Seemanne nicht unbekannt sein darf. Es bedeutet:

0	Windstille, ...	Geschwindigkeit	1,5	Meter	in der	Secunde,	
1	leiser Zug, ...	»	3,5	»	»	»	»
2	leichter Wind, . .	»	6	»	»	»	»
3	schwacher Wind, .	»	8	»	»	»	»
4	mässiger Wind, . .	»	10	»	»	»	»
5	frischer Wind, . .	»	12,5	»	»	»	»
6	starker Wind, . . .	»	15	»	»	»	»
7	harter Wind, . . .	»	18	»	»	»	»
8	stürmischer Wind,	»	21,5	»	»	»	»
9	Sturm, ...	»	25	»	»	»	»
10	starker Sturm, . .	»	29	»	»	»	»
11	harter Sturm, . . .	»	33	»	»	»	»
12	Orkan, ...	»	40	»	»	»	».

3. Die Rubrik mit „Gesteuert" bezeichnet, dient zur Aufnahme des nach dem Steuer-Compasse während einer Stunde, oder eines Bruchtheiles derselben gesteuerten Curses. Dieser Curs giebt den Strich der Windrose an, auf den der Steuerstrich während der in Betracht kommenden Zeit gezeigt, oder, wie man es beim Seewesen nennt, den das Schiff angelegen hat. Zeigt z. B. von 1 bis 2 Uhr der Steuerstrich des Compasses auf den NWzW $\frac{1}{2}$ W-Strich der Windrose, so schreibt man gegen 2 Uhr in diese Rubrik NWzW $\frac{1}{2}$ W.

Wenn der Wachhabende verhindert sein sollte, das, was das Schiff anliegt, gehörig zu beobachten, so wird der Mann am Ruder hierüber Auskunft geben können. Findet vor Ablauf der vollen Stunde eine bedeutende Veränderung im gesteuerten Curse statt, etwa 3 Strich und

mehr, so sind beide in dieser Zeit gesteuerten Curse zu notiren, und die ihnen entsprechenden Distanzen. Finden aber mehrere Veränderungen statt, was fast immer nur bei geringer Fahrt zu geschehen pflegt, so bestimmt man nach Schätzung den mittleren Curs und die Distanz. Der gesteuerte Curs wird auf viertel Striche genau angegeben.

4. In die mit „Abtrift" überschriebene Rubrik wird die Abtrift — auf viertel Striche nach Peilung des Kielwassers oder nach Schätzung bestimmt — neben den gesteuerten Curs geschrieben und zwar links oder rechts in dieselbe, je nachdem sie auf den gesteuerten Curs links oder rechts hin anzuwenden ist, wobei man sich mit dem Auge im Centrum der Windrose gegen den gesteuerten Strich gekehrt, zu denken hat.

5. Die Rubrik für Localdeviation des Steuer-Compasses. In dieselbe wird die Localdeviation des Steuer-Compasses — mit dem gesteuerten Curse aus der Deviationstabelle genommen — auf viertel Striche genau nach links oder rechts in die Rubrik geschrieben, je nachdem die Deviation westlich oder östlich war.

Die Rubriken 4 und 5 können in eine zusammengezogen werden, in welchem Falle die Abtrift über, die Localdeviation unter der Linie der Stundenzahl querdurch gezogen, ihren Platz findet.

6. In die Rubrik „gesegelter missweisender Curs" überschrieben, wird der für Abtrift und Localdeviation verbesserte gesteuerte Curs nach dem Steuer-Compasse gesetzt. Die Summe von Abtrift und Localdeviation, wenn beide rechts oder links in ihren respectiven Rubriken stehen, ist rechts oder links hin auf das Gesteuerte anzuwenden; die Differenz dagegen, wenn die eine links, die andere rechts in ihrer Rubrik steht, und zwar links oder rechts hin, je nachdem das Grössere dieser beiden links oder rechts in der respectiven Rubrik sich befindet. Bei dieser Berichtigung hat man sich wieder mit dem Auge im Centrum der Windrose gegen den gesteuerten Strich gekehrt, zu denken.

7. In die Rubrik „gesegelte Distanz" bezeichnet, werden die Seemeilen (Ganze und Zehntel) geschrieben, die das Schiff während des gesegelten Curses zurückgelegt hat. Gilt dieser Curs für die ganze Stunde, so ist die Distanz die halbe Summe zwischen der Fahrt des Schiffes am Anfange und Ende der Stunde; gilt er aber nur für die halbe Stunde, so ist die Distanz die halbstündliche Fahrt. Die Fahrt des Schiffes wird bei jeder vollen Stunde mit dem gewöhnlichen Logg bestimmt.

8. In die Rubrik „Tiefe und Grund" bezeichnet, wird die Wassertiefe in Faden und daneben die Beschaffenheit des Meeresgrundes geschrieben. Diese Rubrik wird besonders auf Kauffahrteischiffen häufig nicht genug benutzt. Das Loth sollte namentlich in der Ost- und Nordsee viel häufiger gebraucht werden, als es gewöhnlich gebraucht wird. Es bleibt immer bei nebligem oder sonst trübem Wetter das einzige Mittel, das Besteck, welches durch nicht bekannte Strömungen oder durch unvermeidliche Fehler im Loggen und Steuern unsicher wird, zu berichtigen. Die diesfällige Berichtigung ist aber mit Umsicht vorzunehmen und besonders dann sehr vorsichtig dabei zu Werke zu gehen, wenn die Genauigkeit der benutzten Seekarten nicht ganz zweifellos erscheint. Zur Bestimmung der Wassertiefe ist das gewöhnliche Loth, mit dem Burt'schen Apparate versehen, jedenfalls ein's der besten Mittel, welche bis jetzt bekannt sind.

Zur Bezeichnung der Beschaffenheit des Grundes können in der „Tiefen-Rubrik" folgende Zeichen gebraucht werden: | roth, — blau, ⊥ violet, || grün, : gelb, · schwarz, ⌒ weiss, ⌣ grau, ∽ bunt, ¦ rothbraun, ⁖ gelbbraun, ··· Sand, ·· grober Sand, ∷ feiner Sand, ⁙ ganz feiner Sand, ○ Kiesel, △ Stein, ▽ Lehm, ▭ Kalk, + Felsen, (Muscheln, ς gebrochene Muscheln, *m* Schlamm, ∠ Seegras. Wer diese Zeichen nicht benutzen will, kann die Beschaffenheit des Meeresgrundes neben der Tiefe wörtlich abgekürzt bemerken.

9. Die Rubrik „Segelführung" überschrieben, enthält drei feine von oben nach unten gehende gerade Linien, welche die drei Masten des Schiffes, und zwar von der Rechten nach der Linken gehend, den Fockmast, Grossmast und Besahnsmast vorstellen. Rechts von jeder Mastlinie ist Steuerbord, links Backbord. In jede Mastlinie wird die das Raasegel bezeichnende Ziffer geschrieben, und zwar der Stunde oder Bruchstunde gegenüber, in der es beigesetzt worden ist. Auf diese Weise wird das Beisetzen eines Raasegels angedeutet. Das Wegnehmen desselben wird ganz ähnlich bezeichnet; man schreibt nämlich die Ziffer des Segels mit einem Bogen darunter in die Mastlinie gegenüber der Stunde oder Bruchstunde, in der man das Segel wegnimmt.

Die Zeichen der Raasegel sind: 1 Oberbramsegel, 2 Bramsegel, 3 gereeftes Bramsegel, 4 Marssegel, 5 Marssegel mit einem Reef eingebunden, 6 Marssegel mit zwei Reefen eingebunden, 7 Marssegel mit drei Reefen eingebunden, 8 Untersegel, 9 gereeftes Untersegel. Die Zeichen der Klüver, Stag- und Gaffelsegel sind: *a* der Aussenklüver, *b* der Klüver, *c* das Stagsegel, *u* die Besahn oder das Gaffelsegel oder Unterstagsegel, *n* das Gross-Stängenstagsegel oder Kreuz-Stängenstagsegel oder Gafftoppsegel. Die Zeichen für Leesegel an Back- und Steuerbord sind: /\ Bramleesegel an beiden Seiten, | | Oberleesegel und \/ Unterleesegel an beiden Seiten. Das Beisetzen und Wegnehmen der Klüver-, Stag-, Gaffel- und Leesegel wird mit diesen Zeichen in der Segelführungs-Rubrik ebenso angedeutet, als in Betreff der Raasegel gezeigt ist, nur ist noch zu bemerken, dass die Zeichen der backbordschen Leesegel dicht links und die der steuerbordschen dicht rechts an die resp. Mastlinie gesetzt werden müssen. Die Zeichen des Klüvers, Aussenklüvers und Vorstagsegels werden rechts von der Fockmastlinie und in grösserer Entfernung von derselben als die der Leesegel gesetzt. Die Zeichen der Gaffel- und Stagsegel am Fockmast, Grossmast und Besahnsmast werden links von den Mastlinien notirt, aber ebenfalls weiter entfernt, als die der Leesegel.

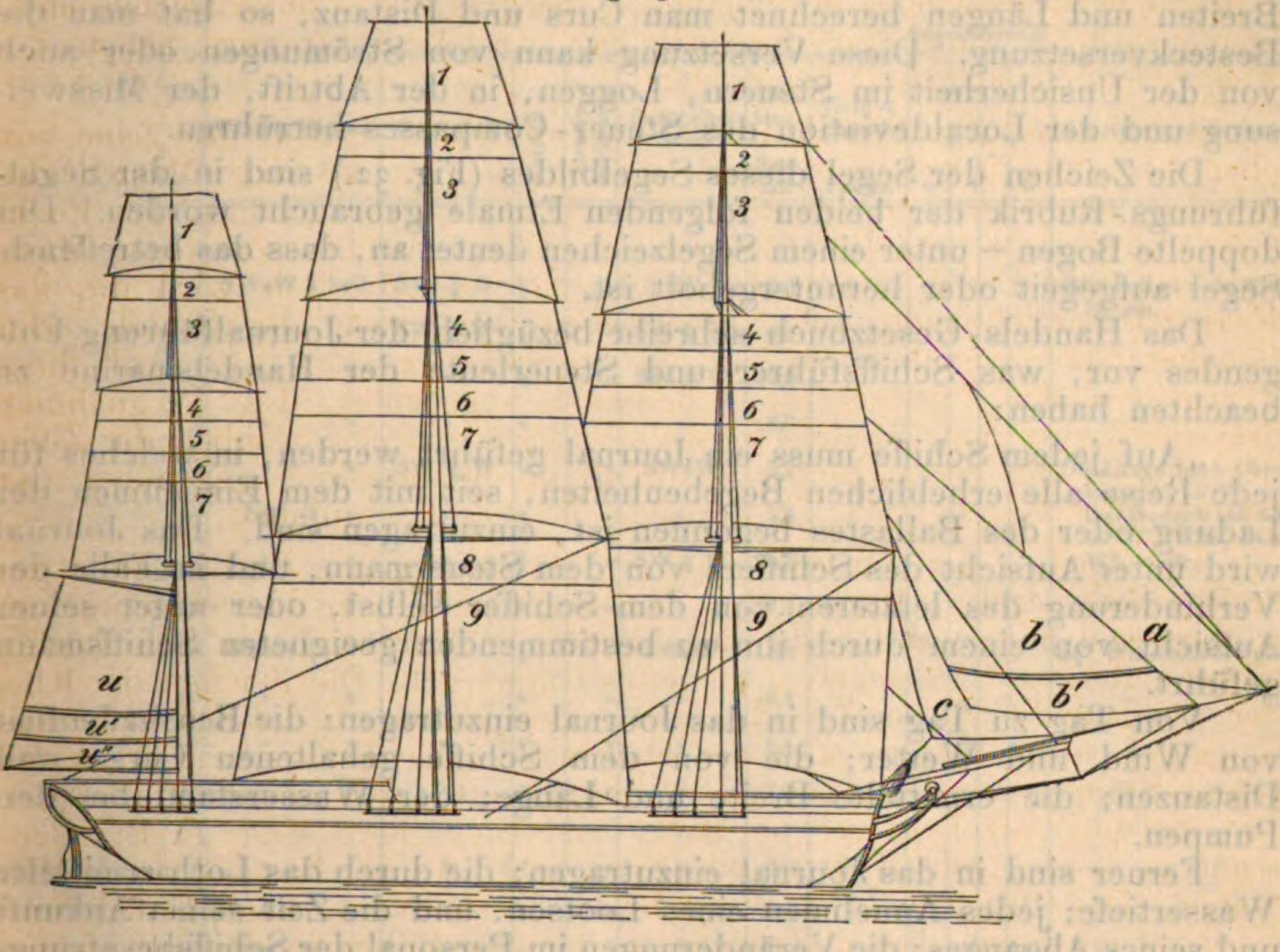
Um jeder Verwechselung der Segelzeichen vorzubeugen, wird es zweckmässig sein, vorn im Journalbuche ein kleines Bild von dem Schiffe mit allen gewöhnlich geführten Segeln und deren Zeichen zu entwerfen, wie das nachstehende (Fig. 32.).

Die in der angegebenen Art im Journal verzeichnete Segelführung gewährt durch ihre Veranschaulichung dieses Gegenstandes jedenfalls die beste Uebersicht in dieser Beziehung, welche die sofortige Angabe der Segelmasse ermöglicht, die ein Schiff zu irgend einer Zeit beigehabt hat. Die leichte und sichere Ermittelung dieses Umstandes führt zu Aufschlüssen über das Schiff selbst.

Zur Controlle der in der Segelführungs-Rubrik enthaltenen Angaben werden die Zeichen derjenigen Segel, die darnach das Schiff am Ende des Etmals führte, auf die folgende Blattseite dicht unter das Wort „Segelführung" gesetzt und das hierdurch entstandene Segelbild mit den Segeln, die das Schiff wirklich beihat, verglichen. Ergeben sich hierbei Differenzen, so ist das Segelbild darnach zu berichtigen. Wer diese Ru-

brik und die dazu gehörigen Zeichen nicht gebrauchen will, der kann erstere zu der letzten. grossen Rubrik nehmen und darin das Beisetzen und Wegnehmen der Segel wörtlich vermerken.

Fig. 32.



10. In die letzte grosse Rubrik, die in anderen Schiffsjournalen mit „Bemerkungen" oder „Begebenheiten" bezeichnet ist, wird dasjenige geschrieben, was in den nebenstehenden Rubriken nicht Platz gefunden, aber doch Bezug auf das Schiff und die Reise hat. Die Schiffsarbeiten, welche die Mannschaft verrichtet, werden gewöhnlich auch darin vermerkt. Die Peilungen der Landobjecte vom Schiffe aus, die Resultate derjenigen Beobachtungen, die zur Ortsbestimmung des Schiffes gemacht werden, finden in dieser Rubrik ihren Platz. Alles dies, sowie sonst hierher Passendes, wird hier der vollen Stunde oder Bruchstunde gegenüber, in der es stattgefunden hat, geschrieben; nimmt das Betreffende aber mehr als eine Zeile ein, so kann man, wenn unter dieser kein Raum zur Fortsetzung des zu Bemerkenden ist, abbrechen und das Weitere unten auf derselben Blattseite, mit einem Hinweisungszeichen anfangend, anführen.

11. Der Wachhabende, auf Kauffahrteischiffen der Schiffsführer oder Steuermann, hat seinen Namen in die erste Rubrik, schräg gegen die Wache, während welcher er das Commando gehabt hat, zu schreiben, wodurch sich derselbe gleichsam für die Richtigkeit des von ihm Journalisirten verantwortlich macht.

12. Der missweisende Gesammt-Curs seit irgend einer Zeit des Etmals, dessen Distanz, der rechtweisende Curs, die verlassene Breite und Länge, die erreichte Breite und Länge u. s. w., dies Alles kommt in die Rubriken, welche unter dem Etmal querüber angebracht sind. Unter die erreichte Breite und Länge (die Breite und Länge des Mittagsbestecks) wird noch die durch astronomische Beobachtungen bestimmte gesetzt, und aus

Breiten- und Längendifferenz derselben die Versetzung des Bestecks berechnet und diese darunter vermerkt. Bei Bestimmung der Besteckversetzung wird die nach der Besteckrechnung gefundene Breite und Länge als die verlassene und die durch astronomische Beobachtungen erhaltene als die erreichte angesehen werden müssen. Mit diesen beiden Breiten und Längen berechnet man Curs und Distanz, so hat man die Besteckversetzung. Diese Versetzung kann von Strömungen oder auch von der Unsicherheit im Steuern, Loggen, in der Abtrift, der Missweisung und der Localdeviation des Steuer-Compasses herrühren.

Die Zeichen der Segel dieses Segelbildes (Fig. 32.) sind in der Segelführungs-Rubrik der beiden folgenden Etmale gebraucht worden. Der doppelte Bogen ⌣ unter einem Segelzeichen deutet an, dass das betreffende Segel aufgegeit oder heruntergeholt ist.

Das Handels-Gesetzbuch schreibt bezüglich der Journalführung Folgendes vor, was Schiffsführer und Steuerleute der Handelsmarine zu beachten haben:

„Auf jedem Schiffe muss ein Journal geführt werden, in welches für jede Reise alle erheblichen Begebenheiten, seit mit dem Einnehmen der Ladung oder des Ballastes begonnen ist, einzutragen sind. Das Journal wird unter Aufsicht des Schiffers von dem Steuermann, und im Falle der Verhinderung des letzteren von dem Schiffer selbst, oder unter seiner Aufsicht von einem durch ihn zu bestimmenden geeigneten Schiffsmann geführt.

Von Tag zu Tag sind in das Journal einzutragen: die Beschaffenheit von Wind und Wetter; die von dem Schiffe gehaltenen Curse und Distanzen; die ermittelte Breite und Länge; der Wasserstand bei den Pumpen.

Ferner sind in das Journal einzutragen: die durch das Loth ermittelte Wassertiefe; jedes Annehmen eines Lootsen, und die Zeit seiner Ankunft und seines Abganges; die Veränderungen im Personal der Schiffsbesatzung; die im Schiffsrathe gefassten Beschlüsse; alle Unfälle, die dem Schiffe oder der Ladung zustossen, und die Beschreibung derselben.

Auch die auf dem Schiffe begangenen strafbaren Handlungen und die verhängten Disciplinarstrafen, sowie die vorgekommenen Geburts- und Sterbefälle sind in das Journal einzutragen. Die Eintragungen müssen, so weit die Umstände nicht hindern, täglich geschehen. Das Journal ist von dem Schiffer und dem Steuermann zu unterschreiben.

Das Journal, wenn es ordnungsmässig geführt und in der Form unverdächtig ist, liefert für die Begebenheiten der Reise, so weit darüber weder eine Verklarung erforderlich noch die Beibringung anderer Belege gebräuchlich ist, in der Regel einen unvollständigen Beweis, welcher durch den Eid oder andere Beweismittel ergänzt werden kann. Jedoch hat der Richter nach seinem durch die Erwägung aller Umstände geleiteten Ermessen zu entscheiden, ob dem Inhalte des Journals ein grösseres oder geringeres Maass der Beweiskraft beizulegen ist."

In Betreff der Geburten und Sterbefälle bestimmt das Gesetz vom 6. Februar 1875, dass dieselben spätestens am nächsten Tage von dem Schiffer und zwei Schiffs-Offizieren im Tagebuche zu beurkunden sind. Die muthmaassliche Ursache des Todes ist zu bemerken. Zwei beglaubigte Abschriften jeder Urkunde sind demjenigen Seemannsamte zu übergeben, bei dem es zuerst geschehen kann. Ist der Schiffer verhindert, so liegt dem Steuermann die Verpflichtung ob. Sobald das Schiff in den inländischen Hafen eingelaufen ist, in welchem es seine Fahrt beendet, ist das Tagebuch der für den Standesbeamten des Hafenortes zuständigen Aufsichtsbehörde vorzulegen.

1844. Juni.		Corvette „Amazone" auf der Reise von Danzig nach Lissabon im Atlantischen Ocean in 49° 8′ NBr., 5° 28′ WL. v. Gr.							Segelführung.				
Barom. Therm.	U.	Wind u. Wetter.	Gesteuert.	Abtrift.	Local-deviation.	Gesegelter Curs.	Distanz. Seeml.	Tiefe u. Grund. Faden.	u	2-4	2-4-8	2-4-8 b	Arbeiten und Ereignisse.
30″,16 E. 68° F.	1	NWzW 3 hell	SW ¼ S	½	¾	SW	4,6						Wir holten viele Mitsegler ein.
	2	» »	SW ¼ W	»	»	SW ½ W	6,0						
W	3	» »	»	¼	»	SW ¾ W	9,0						
	4	» »	»	»	»	»	8,0						
	5	» »	SW ½ W	»	»	SWzW	5,7						Die Länge nach Chronometer 5° 53′ W. v. Gr. Das Besteck um 5 Uhr 48° 37′,9 NBr., 5° 50′,4 WL. v. Gr.
30″,21 E. 66° F.	6	NW 3 »	»	»	»	»	5,6						
	7	» »	»	½	»	SW ¾ W	6,7						
G	8	» »	»	»	»	»	7,4						
	9	NWzN 3 »	»	¼	»	SWzW	7,8						5½″ Wasser b. d. Pumpe.
W	10	» »	»	»	»	»	8,4						
	11	» »	»	»	»	»	8,4						
M. N.	12	» »	»	»	»	»	7,5						
Sonnabend Morgen, den 15ten.	1	» »	»	»	»	»	9,0						
	2	» »	»	»	»	»	7,4						
G	3	NNO 2 »	»	»	»	»	5,0				8	b	
	4	» »	»	»	»	»	6,0						Passirten ein beim Winde segelndes Schiff.
	5	N 2 »	»	0	»	SWzW ¼ W	5,7						
F	6	» »	»	0	»	»	5,0						Das Schiff reingemacht.
	7	» »	»	0	»	»	5,5						7½ Uhr in 7° 18′ WL. v. Gr. nach dem Chronometer. Das Besteck in 47° 12′,7 NBr. und 7° 3′,5 WL. v. Gr.
	8	» »	»	0	»	»	5,0						
	9	NNO 2 »	»	0	»	»	4,0		2	\|	\	/	
W	10	» »	»	0	»	»	4,5		u 4				
	11	» »	»	0	»	»	5,0						
30″,32 E. 67° F.	12	» »	»	0	»	»	5,8						Machten Breiten-Beobachtungen.

Seit Mittag mw. G. Curs S 56° W, Missw. = 26° W, » » rw. G. Curs S 30° W.	G. Dist. Seemeilen 152,7.	verlassene Breite = 49° 8′ N, veränd. Breite = 2 12,2 S, erreichte Breite = 46 55,8 N. Beobacht. Breite = 46 50 N.	Abw. Seemeilen 76,4 W.	verlassene Länge = 5° 28′ W, veränd. Länge = 1 54,2 W, erreichte Länge = 7 22,2 W. Beobacht. Länge = 7 35,5 W, nach der Beobachtung um 7½ Uhr Morgens.

Vom 14ten bis 15ten Juni Mittags ist das Besteck rechtweisend S 58° W 11 Seemeilen versetzt.

1844. Juni.		Corvette „Amazone" auf der Reise von Danzig nach Lissabon im Atlantischen Ocean in 46° 50′ NBr., 7° 35′,5 WL. v. Gr.								
Barom. Therm.	U.	Wind u. Wetter.	Gesteuert.	Abtrift.	Local-deviation.	Gesegelter Curs.	Distanz. Seeml.	Tiefe u. Grund. Faden.	Segelführung. 4 · 2 4 8 · 2 4 b 8	Arbeiten und Ereignisse.
	1	NOzO 2 hell	SW ½ W	0	¾	SWzW ¼ W	6,7			
	1½	» »	»			»	3,3			
	2	» »	SWzW	»	»	SWzW ¾ W	3,3			Es wurden astronomische Beobachtungen gemacht.
G	3	» »	»	»	»	»	6,3			
	4	» 3 »	»	»	»	»	6,1			
	5	» »	»	»	»	»	7,3			
30″,29 E. 64° F.	6	» »	»	»	»	»	7,8			
W	7	» »	»	»	»	»	7,0			
	8	» »	»	»	»	»	8,1			Das Schiff schlingerte sehr, heissten deshalb die Quarterboote höher.
	9	ONO 3 »	»	»	»	»	9,5		4 8	
G	10	» »	»	»	»	»	9,8		2 b	
	11	» »	»	»	»	»	9,3			
M. N.	12	» »	»	»	»	»	9,5			
Sonntag Morgen, den 16.	1	» »	»	»	»	»	9,8			
	2	» »	»	»	»	»	9,6			
W	3	» »	»	»	»	»	9,8			
	4	» »	»	»	»	»	10,0			
	5	OzN 4 bewölkt	»	»	»	»	9,8			Das Schiff reingemacht.
	6	» »	»	»	»	»	11,0		b	
F	7	» »	»	»	»	»	10,5		2 2 2 c	Das Besteck in 44° 40′ NBr. u. 10° 1′,2 WL. v. Gr.; nach Chronom. in 10° 7′,5 WL.
	8	» 5 trübe	SSW ¾ W	»	»	SW ½ S	8,6			
	9	ONO 5 »	»	»	½	SW ¾ S	11,5		5 5 5	
	9¼		SzW	»	»	SzW ½ W	2,5		8	
G	10	O 6 »	S	¼	¼	S ½ W	6,0		u 9	Das Schiff nahm viel Wasser über.
	11	» bewölkt	»	»	»	»	9,5		6 6 6	
30″,10 E. 68° F.	12	» »	»	»	»	»	9,5			Breiten - Beobachtungen gemacht.

Seit Mittag mw. G. Curs S 55° W, Missw. = 26° W, » » rw. G. Curs S 29° W.	G. Dist. Seemeilen 199,5.	verlassene Breite = 46° 50′ N, veränd. Breite = 2 54,5 S, erreichte Breite = 43 55,5 N. Beobacht. Breite = 43 56,5 N.	Abw. Seemeilen 96,8 W.	verlassene Länge = 7° 35′,5 W, veränd. Länge = 2 17,7 W, erreichte Länge = 9 53,2 W. Beobacht. Länge = 10 0,8 W, nach der Beobachtung um 7 Uhr Morgens.

Vom 15ten bis 16ten Juni Mittags ist das Besteck rechtweisend N 79° W 5,5 Seemeilen versetzt.

Berechnung der Mittags-Bestecke der beiden vorstehenden Etmale.

Freitag, Abends 5 Uhr, wird beobachtet, deshalb ist für diese Zeit das Besteck zu berechnen. Freitag Mittag steht das Besteck auf 49° 8' NBr., 5° 28' WL. von Greenwich; von diesem Zeitpunkte bis 5 Uhr Abends sind die gesegelten missweisenden Curse:

	Seem.	S.	W.
SW	4,6	3,3	3,3
SW $\frac{1}{2}$ W . .	6,0	3,8	4,6
SW $\frac{3}{4}$ W . .	17,0	10,1	13,7
SWzW . .	5,7	3,2	4,7
		20,4	26,3

Mw. C. = S 52° W.
Missweis. = 26° W.
rw. C. = S 26° W, Dist. = 33,4 Seem., Abw. = 14,7 Seem. W,

	Mittelbr. = 48° 53'	
veränd. Br. = 0° 30',1 S,		veränd. Lng. = 0° 22',4 W,
verlass. Br. = 49° 8',0 N,		verlass. Lng. = 5° 28',0 W,
$\frac{14}{6}$ 44 um 5 U. Abds. erreich. Br. = 48° 37',9 N.		erreich. Lng. = 5° 50',4 W.

Von 5 Uhr Abends am Freitage bis 7$\frac{1}{2}$ Uhr Morgens am Sonnabende sind die gesegelten missweisenden Curse:

	Seem.	S.	W.
SW z W .	5,6	3,1	4,7
SW $\frac{3}{4}$ W .	14,1	8,4	11,3
SW z W .	59,5	33,1	49,5
SWzW $\frac{1}{4}$ W	18,7	9,6	16,0
		54,2	81,5

Mw. C. = S 56° W.
Missweis. = 26° W.
rw. C. = S 30° W, Dist. = 98,3 Seem., Abw. = 49,1 Seem. W,

	Mittelbr. = 47° 55'	
veränd. Br. = 1° 25',2 S,		veränd. Lng. = 1° 13',1 W,
verlass. Br. = 48° 37',9 N,		verlass. Lng. = 5° 50',4 W,
$\frac{15}{6}$ 44 um 7$\frac{1}{2}$ U. Mg. erreich. Br. = 47° 12',7 N.		erreich. Lng. = 7° 3',5 W.

Von 7$\frac{1}{2}$ Uhr Morgens bis Mittag ist der gesegelte missweisende Curs: SWzW $\frac{1}{4}$ W 21,8 Seem., d. i. auch

mw. C. = S 59° W.
Missweis. = 26° W.
rw. C. = S 33° W, Dist. = 21,8 Seem., Abw. = 11,9 Seem. W,

	Mittelbr. = 47° 4'	
veränd. Br. = 0° 18',3 S,		veränd. Lng. = 0° 17',5 W,
verlass. Br. = 47° 12',7 N,		verlass. Lng. = 7° 3',5 W,
$\frac{15}{6}$ 44 Mittags ist erreich. Br. = 46° 54',4 N.		erreich. Lng. = 7° 21',0 W.
» » » nach d. Beobacht. um 7$\frac{1}{2}$ U. Mgs.		» » = 7° 35',5 W.

Von Freitag Mittag bis Sonnabend Mittag:

S.	W.
20.4	26.3
54.2	81.5
11.2	18.7
85.8	126.5

Mw. G.—C. = S 56° W.
Missweis. = 26° W.
rw. G.—C. = S 30° W, Dist. = 152,7 Seem., Abw. = 76,4 Seem. W,

veränd. Br. = 2° 12',2 S,	Mittelbr. = 48° 2'	veränd. Lng. = 1° 54',2 W,
verlass. Br. = 49° 8',0 N,		verlass. Lng. = 5° 28',0 W,
erreich. Br. = 46° 55',8 N.		erreich. Lng. = 7° 22',2 W.

Nach der Besteckrechnung war das Schiff den $\frac{15}{6}$ Mtgs. auf 46° 55',8 NBr. und 7° 22' 2 WL v. Gr.
und nach der Beobachtung war das Schiff den $\frac{15}{6}$ Mtgs. auf 46° 50',0 NBr. und 7° 35',5 WL v. Gr.

Br.-U. = 5',8 S.	Mittelbr. = 46° 53'	L.-U. = 13',3 W.
		Abw. = 9,1 Seem. W.

Dieser Breitenunterschied = 5',8 S. und Abweichung = 9,1 Seem. W. geben die Besteckversetzung rechtweisend S 58° W 11 Seemeilen, und zwar vom $\frac{14}{6}$ Mittags bis zum $\frac{15}{6}$ Mittags.

Vom $\frac{15}{6}$ Mittags bis 7 Uhr Morgens den $\frac{16}{6}$ sind die gesegelten misseweisenden Curse:

	Seem.	S.	W.
SWzW ¼ W	10,0	5,1	8,6
SWzW ¾ W	154,5	66,1	139,6
		71,2	148,2

Mw. C. = S 64° W.
Missweis. = 26° W.
rw. C. = S 38° W, Dist. = 165 Seem., Abw. = 101,6 Seem. W,

veränd. Br. = 2° 10' S,	Mittelbr. = 45° 45'	veränd. Lng. = 2° 25',7 W,
verlass. Br. = 46° 50' N,		verlass. Lng. = 7° 35',5 W,
$\frac{16}{6}$ 44 um 7 U. Mg. ist erreich. Br. = 44° 40' N.		erreich. Lng. = 10° 1',2 W.

Von 7 Uhr Morgens bis Mittags den $\frac{16}{6}$ 44 sind die gesegelten missweisenden Curse:

	Seem.	S.	W.
SW $\frac{1}{2}$ S . .	8,6	6,7	5,5
SW $\frac{3}{4}$ S . .	11,5	9,2	6,8
SzW $\frac{1}{2}$ W .	2,5	2,4	0,7
S $\frac{1}{2}$ W . . .	25,0	24,9	2,4
		43,2	15,4

Mw. C. = S 20° W.
Missweis. = 26° W.
rw. C. = S 6° O, Dist. = 46 Seem., Abw. = 4,8 Seem. O,

		Mittelbr. = 44° 17'	
	veränd. Br. = 0° 45',7 S,		veränd. Lng. = 0° 6',7 O,
	verlassene Br. = 44° 40',0 N,		verlas. Lng. = 10° 1',2 W,
$\frac{16}{6}$ 44 Mittags ist erreichte	Br. = 43° 54',3 N.		erreich. Lng. = 9° 54',5 W.

$\frac{16}{6}$ 44 Mtgs. ist nach der Beobachtung um 7 U. Mg. erreichte Lng. = 10° 0',8 W.

Von Sonnabend Mittag bis Sonntag Mittag:

S.	W.
71,2	148,2
43,2	15,4
114,4	163,6

Mw. G.—C. = S 55° W.
Missweis. = 26° W.
rw. G.—C. = S 29° W, Dist. = 199,5 Seem., Abw. = 96,8 Seem. W,

	Mittelbr. = 45° 23'	
veränd. Br. = 2° 54',5 S,		veränd. Lng. = 2° 17',7 W,
verlassene Br. = 46° 50',0 N,		verlas. Lng. = 7° 35',5 W,
erreichte Br. = 43° 55',5 N.		erreich. Lng. = 9° 53',2 W.

Nach der Besteckrechnung soll das Schiff sein den $\frac{16}{6}$ Mtgs. auf 43° 55',5 NBr. und 9° 53',2 WL v. Gr.
und nach der Beobachtung ist das Schiff den $\frac{16}{6}$ Mtgs. auf 43° 56',5 NBr. und 10° 0',8 WL v. Gr.

	Mittelbr. = 43° 56'	
Br.-U. = 1',0 N.		L.-U. = 7',6 W.
		Abw. = 5',5 Seem. W.

Der Breitenunterschied 1,0 N. und die Abweichung 5,5 W. geben die Besteckversetzung vom $\frac{15}{6}$ Mittags bis zum $\frac{16}{6}$ Mittags:

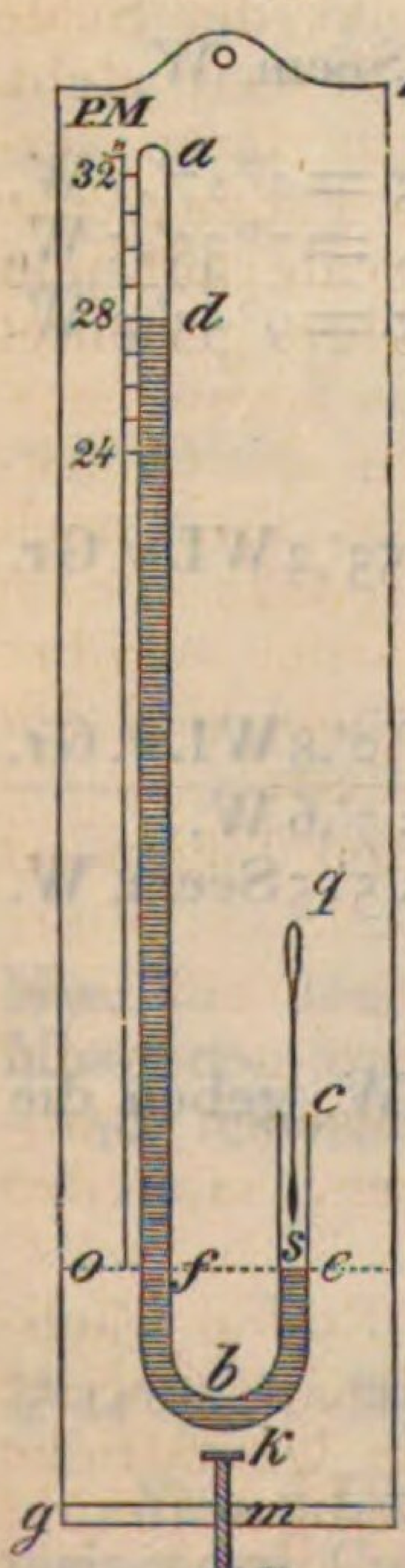
rechtw. N 79° W 5,5 Seem.

Localdeviations-Tabelle des Steuer-Compasses der Corvette „Amazone", nach den an Bord dieses Schiffes angestellten Untersuchungen.

Curs.	Local-deviation Ost.	Curs.	Local-deviation West.
NNW	0 Strich.	SSO	0 Strich.
NWzN	¼ „	SOzS	¼ „
NW	¼ „	SO	¼ „
NWzW	½ „	SOzO	½ „
WNW	½ „	OSO	½ „
WzN	¾ „	OzS	¾ „
West	¾ „	Ost	¾ „
WzS	¾ „	OzN	¾ „
WSW	¾ „	ONO	¾ „
SWzW	¾ „	NOzO	¾ „
SW	¾ „	NO	¾ „
SWzS	¾ „	NOzN	¾ „
SSW	½ „	NNO	½ „
SzW	½ „	NzO	½ „
S	¼ „	N	¼ „
SzO	¼ „	NzW	¼ „
SSO	0 „	NNW	0 „

Bemerkung.
In nebenstehender Tabelle ist die Localdeviation des Steuer-Compasses an Bord der „Amazone", wie sie im Jahre 1844 in Swinemünde vor dem Anfange der Reise bestimmt wurde, enthalten, und aus derselben die in den vorstehenden Etmalen vorkommende Localdeviation genommen.

Fig. 33.



§. 51.
Barometer.

Das Barometer ist ein Instrument, womit der Druck der Luft gemessen wird. Es sei Fig. 33. eine bei *a* zugeschmolzene, bei *c* offene, heberartig umgebogene, gläserne Cylinderröhre, die im Lichten 1,5 bis 2 Linien Durchmesser hat, und deren Schenkel $ab = 36$ Zoll, $bc = 9$ Zoll ist. Füllt man diese Röhre mit gereinigtem Quecksilber von *a* bis *b*, stellt sie sodann genau vertical — *a* nach oben —, so wird das Quecksilber aus dem langen Schenkel in den kurzen treten, in ersterem aber ungefähr 28 Zoll höher stehen bleiben als in letzterem. Steigt es z. B. von *b* bis *e* in dem kurzen Schenkel, so fällt es in dem langen von *a* bis *d*, und der Raum zwischen *a* und *d* bleibt luftleer. Bei dieser Erscheinung drängt sich die Frage auf: welche Kraft hält der 28 Zoll langen Quecksilbersäule *df* das Gleichgewicht? Diese Kraft wird nur in dem Drucke der Luftsäule zu suchen sein, die über dem Quecksilber in der kurzen Röhre steht. Ist diese Erklärung richtig, so muss auf hohen Bergen die Quecksilbersäule *df* kürzer werden. Versuche haben dies auch bestätigt.

Torricelli nahm die erwähnte Erscheinung wahr und erklärte sie richtig aus dem Drucke der Luft auf das Quecksilber in dem kurzen Schenkel. Deshalb hat man denn auch ihm zu Ehren die Röhre und die über dem

Quecksilber befindliche Leere nach seinem Namen benannt. Da die Quecksilbersäule *df* das Gewicht der Luftsäule angiebt, die über *e* steht, und der Quecksilbersäule *df* das Gleichgewicht hält, so hat man diesen Apparat Barometer und die Höhe der Quecksilbersäule *df* Barometerhöhe genannt. Um letztere auf eine leichte Art zu jeder Zeit genau ermitteln zu können, befestigt man die Röhre an ein vertical hängendes Brett *hg*, nachdem auf diesem eine Eintheilung in Millimeter, oder Pariser Zolle und Linien, oder in Englische Zolle und zehntel Zolle von 0 bis etwa 30 oder 32 Zoll Höhe gehend, aufgetragen oder daran eine solche Eintheilung auf Messing oder Elfenbein befestigt ist.

Diese Eintheilung am Barometer nennt man Barometerscale.

An das Brett *hg* ist ferner bei *m* eine feine Schraube *nk* anzubringen, vermittelst welcher die Röhre in verticaler Richtung erhöht und niedergelassen werden kann, bis die Oberfläche (*e*) des Quecksilbers in dem kurzen Schenkel mit dem Nullpunkte der Barometerscale gleich hoch steht, wenn man die Barometerhöhe auf der Scale ablesen will. Diese Art Barometer nennt man Heberbarometer. Die feineren Heberbarometer haben zwar eine gleiche Röhre wie das vorhin beschriebene, diese ist aber hier in ein Kästchen fest eingeschlossen, damit sie nicht leicht zerbrechen kann, und der Kasten hat bei *d* und *e* etwa 8 bis 10 Zoll lange Durchschnitte, durch welche der Stand des Quecksilbers in beiden Röhren beobachtet wird, wenn das Barometer vertical hängt. An der Aussenseite dieses Kastens, zwischen den Schenkeln der Röhre, wird die auf Messing getheilte, vermittelst einer Schraube in verticaler Richtung bewegbare Barometerscale befestigt. Diese Scale ist bei ihrem Nullpunkte rechts mit einem Arm versehen, der ein Microscop mit einem Fadenkreuze darin trägt, das mit dem Nullpunkte der Theilung in gleicher Höhe befestigt ist, und auf den kurzen Schenkel der Röhre stets gerichtet bleiben muss, wenn man die Scale auf und nieder bewegt, damit, wenn die Scale so gestellt ist, dass das Fadenkreuz die Oberfläche des Quecksilbers in dem kurzen Schenkel berührt, auch der Nullpunkt der Scale in dem Niveau der letztern, d. h. in gleicher Höhe mit diesem, steht. Oben, in der Höhe von 28 Zollen, ist die Scale mit einem daran verschiebbaren Nonius versehen, der ein Microscop mit einem Fadenkreuze in demselben trägt, welches, wenn der Nonius an der Scale auf und nieder bewegt wird, stets auf den langen Schenkel der Röhre gerichtet bleiben und mit dem Nullpunkte des Nonius in gleicher Höhe liegen muss. Stellt man nun dieses Fadenkreuz so, dass es die Oberfläche des Quecksilbers in dem langen Schenkel berührt, während vorher die Scale nach den vorstehenden Angaben so gestellt ist, dass sich ihr Nullpunkt in dem Niveau der Oberfläche des in dem kurzen Schenkel der Barometerröhre stehenden Quecksilbers befindet, so wird man auf dem Nonius und der Scale die Barometerhöhe auf 0,05 Linien genau ablesen können.

Die Eintheilung der Barometerscale in ganze und halbe Linien ist erst von 24 Zoll an erforderlich.

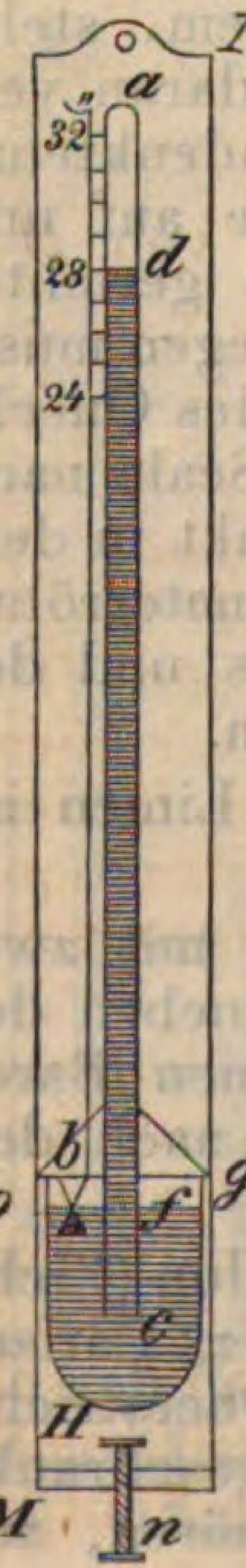
Das hier beschriebene Heberbarometer ist in der Regel mit zwei Thermometern versehen, das eine an der Scale, das andere neben der Barometerröhre befestigt, welche dazu dienen, den abgelesenen Barometerstand auf die Temperatur des Eispunktes zu reduciren, nach den zu diesem Behuf vorhandenen Tafeln.

Zur Rectificirung (Berichtigung) dieser Scale gehört ein Etalon (Eichmaass), bestehend in einem messingenen Maassstabe, auf dem 28 Pariser Zolle genau abgetragen und deren Endpunkte durch feine Querstriche bezeichnet sind. Nachdem die Scale von dem Barometer abgeschraubt ist, wird sie auf zwei Klötzchen, die zu dem Eichmaass gehören, auf

dieses gelegt, der Nonius auf 28 Zoll genau eingestellt, und nun die Scale so lange auf dem Eichmaass hin und her bewegt, bis das Fadenkreuz an dem Nonius den einen Querstrich des Etalons genau deckt, und demnächst die Scale auf diesem festgeschraubt. Deckt das andere Fadenkreuz beim Nullpunkte der Scale den anderen Querstrich des Etalons, so ist die Scale richtig; findet diese Deckung nicht statt, so muss dieses Fadenkreuz vermittelst der zu diesem Behuf beim Nullpunkte der Scale angebrachten Correctionsschraube auf diesen Querstrich gebracht werden. Auf die Temperatur der Scale ist gleichfalls Rücksicht zu nehmen, denn die Entfernung zwischen den Querstrichen des Etalons ist nur bei einem darauf vermerkten Thermometerstande 28 Pariser Zoll.

Um das Heberbarometer vor dem Eindringen des Staubes in den kurzen Schenkel zu schützen, hat man in demselben das Fischbeinstäbchen *qs* angebracht, das unten bei *s* mit Federholz umgeben und mit Seide umwunden ist. Wenn man das Barometer transportiren will, so bringt man es ein wenig aus der verticalen Lage, bis das Quecksilber den langen Schenkel ausfüllt, schiebt demnächst das Fischbeinstäbchen in den kurzen Schenkel bis an's Quecksilber, welches, da die Röhre in der Biegung enger ist, diese genau ausfüllt, und somit das Quecksilber darin verschliesst. Das Stäbchen *qs* wird mittelst einer Schraube, die durch *q* geht, in dieser Lage an das Kästchen des Barometers festgeschraubt. Hiernach legt man das Barometer horizontal hin, und zwar den langen Schenkel nach unten, und in dieser Lage wird es auch getragen. Ist es mit einem Futteral versehen, so wird es auch in dieser Lage in dasselbe gesteckt und so transportirt. Wenn man das Barometer wieder vertical hängen will, so hat man das Stäbchen *qs* zuerst so weit aus dem kurzen Schenkel zu ziehen und zu befestigen, dass dessen Spitze *s* von der Oberfläche des Quecksilbers in diesem Schenkel weit genug absteht, wenn es sich in verticaler Richtung befindet.

Fig. 33 a.



In neuerer Zeit ist dies Stäbchen *qs* ein hohles Glasstäbchen, das bei *q* geschlossen und bei *s* offen ist, damit das Quecksilber in der Barometerröhre während des Verschlusses diese nicht zersprengen kann, wenn es sich ausdehnt in höherer Temperatur, in welchem Falle es in das hohle Glasstäbchen entweichen wird.

Das Gefässbarometer (Fig. 33 a.) besteht aus der geraden, etwa 36 Zoll langen, bei *a* geschlossenen, mit Quecksilber gefüllten gläsernen Cylinderröhre *ac*, die in das gleichfalls mit Quecksilber gefüllte Gefäss *Hg* reicht, das oben verschlossen ist, damit der Staub nicht eindringt, und welche beide an ein Brett *MN* befestigt sind.

Das Gefäss kann ein gläsernes sein, in welchem der Stift *b* angebracht ist, von dessen nach unten gekehrter Spitze die Theilung der Barometerscale nach oben zu beginnt. Der Boden des Gefässes ist elastisch, damit derselbe durch die Schraube bei *n* auf und nieder bewegt, und somit die Oberfläche des Quecksilbers in dem Gefässe mit der Spitze des Stiftes *b* in Berührung gebracht werden kann, was immer geschehen muss, wenn man die Barometerhöhe *df* auf der Scale genau ablesen will. Diese Art Barometer sind auch zur Transportirung (Fortbringung) eingerichtet. Bei den leicht tragbaren Gefässbarometern ist die Röhre mittelst Harz an dem Gefässe befestigt. Dieses muss so beschaffen sein, dass es zwar die Luft, aber nicht das Quecksilber durchlässt. Ist das Gefäss ein gläsernes,

so muss es einen porösen Deckel haben, damit die Luft durch denselben dringen kann, oder wäre der Deckel dies nicht, so muss er mit einer verschliessbaren Oeffnung versehen sein, die nur beim Transport geschlossen wird. Bei diesen Gefässbarometern, wenn das Gefäss ein hölzernes ist, kann man die Oberfläche des Quecksilbers in dem Gefässe nicht in das Niveau des Nullpunktes der Scale bringen, d. h. beide jedes Mal waagrecht stellen.

Ist nun auch die Scale an diesem Barometer so befestigt, dass es z. B. den Barometerstand von 28 Zoll Französisch = 29,84 Zoll Englisch = 757,96 Millimeter richtig angiebt, so wird dasselbe doch einen höheren Barometerstand zu klein und einen niederen zu gross angeben; denn das Quecksilber in dem Gefässe wird im ersten Falle unter und im letzten über dem Nullpunkte der Scale stehen, was einfach daraus hervorgeht, dass beim Steigen dieses Barometers so viel Quecksilber in die Röhre tritt, als sich aus dessen Gefäss entfernt, und beim Fallen des Barometers ebenso viel Quecksilber die Röhre verlässt, als sich in dessen Gefäss ergiesst. Die Entfernung zwischen dem festen Nullpunkte der Scale und dem veränderlichen Stande des Quecksilbers in dem Gefässe ist sonach die Correction, welche mit + oder — auf die abgelesene Barometerhöhe dieses Instrumentes anzuwenden ist, je nachdem diese über oder unter 28 Zoll Französisch sein wird. Bezeichnet man den inneren Durchmesser der Röhre mit δ, ihren äusseren mit d, den inneren Durchmesser des Gefässes mit D, den Stand des Quecksilbers in der Röhre über oder unter 28 Zoll Französisch mit H, und die dieser Grösse entsprechende Correction (Entfernung des Nullpunktes der Scale von dem Quecksilber in dem Gefässe) mit h, so hat man zur Bestimmung der letzteren die Gleichung:

$$\delta^2 \frac{\pi}{4} H = (D^2 - d^2) \frac{\pi}{4} h,$$

woraus sich ergiebt

$$h = H \frac{\delta^2}{D^2 - d^2}.$$

Nimmt man nun, wie es bei den meisten Barometern dieser Art der Fall sein wird, $\delta = 2$ Linien, $d = 3$ Linien und $D = 12$ Linien an, so ist $h = H \cdot \frac{4}{135}$, oder nahe $h = \frac{H}{34}$, und weil das Maximum von $H =$ 2 Zoll angenommen werden kann, so würde das Maximum von $h = \frac{24}{34}$ Linien = 0,7 Linien Französisch werden können, eine Grösse, die bei genauen Barometer-Beobachtungen nicht unberücksichtigt bleiben darf. Fehlen zur Berechnung dieser Correction h die Grössen δ, d, D und der normale Barometerstand — welcher letztere zur Ermittelung von H erforderlich ist —, so bleibt nichts weiter übrig, als das in Rede stehende Gefässbarometer mit einem guten Heberbarometer bei verschiedenen Barometerständen zu vergleichen, um zu den respectiven Correctionen, welche auf die entsprechenden Stände angewandt, die richtigen geben, zu gelangen.

Die Röhre dieser Barometer ist gewöhnlich mit einer hölzernen Cylinderröhre umgeben, die an das Gefäss festgeschraubt ist, und bei d einen etwa 8 Zoll langen Durchschnitt hat, in den die eben so lange Barometerscale befestigt wird. Bevor dies geschieht, ist das Gefässbarometer neben ein Heberbarometer zu hängen, die Barometerhöhe auf dem letzteren abzulesen, und die Scale des ersteren dann so an dasselbe zu befestigen, dass es dieselbe Barometerhöhe angiebt. Gefässbarometer dieser Art haben manchmal einen elastischen Boden und eine Schraube

unter demselben, wie in Fig. 33a.; beide dienen dazu, das Quecksilber in der Röhre zu heben und zu senken, bis das Barometer richtig zeigt, oder es darin festzuschrauben, wenn das Barometer transportirt werden soll. Zu diesem letzteren Zwecke bringt man das Barometer ein wenig aus der verticalen Lage, in Folge dessen das Quecksilber in der Röhre steigt und sie füllt; hiernach schraubt man allmälig den elastischen Boden des Gefässes mittelst der Schraube *n* dem unteren Ende der Röhre zu, wodurch das Quecksilber in der Röhre fest wird und die Ausdehnung desselben durch die Wärme, wegen der Elasticität des Bodens, dem Instrument doch nicht sehr nachtheilig werden kann. Auf diese Weise verschlossen, kann das Barometer in horizontaler Lage transportirt werden. Will man es wieder aufstellen, so hängt man es vertical hin, und schraubt nun die Schraube *n* allmälig ganz zurück; wenn sie weit genug zurückgedreht ist, so erkennt man das daran, dass man sie nicht weiter linksum drehen kann. Das Quecksilber wird hierdurch allmälig in der Röhre bis auf einen bestimmten Punkt fallen, und nachdem es einige Minuten so gestanden hat, kann man die Barometerhöhe ablesen. Zu empfehlen ist diese Einrichtung mit dem elastischen Boden bei undurchsichtigen Gefässen gewiss nicht, denn Aenderungen in der Wärme und Feuchtigkeit der Luft können ihn heben und senken, somit das Barometer steigen und fallen machen bei unverändertem Luftdrucke. Daher sollten Seebarometer diesen elastischen Boden nicht haben.

Das Seebarometer, auch Marinebarometer genannt, ist ein Gefässbarometer der zuletzt beschriebenen Art, an welchem der untere, etwa 18 Zoll lange Theil der Röhre nur 0,4 Linien Durchmesser hat. Dieses Barometer wird an Bord etwas oberhalb seines Schwerpunktes nach Art der Cardanischen Lampe frei schwebend aufgehangen, wodurch dasselbe trotz der Bewegung des Schiffes in möglichst verticaler Lage bleibt.

Da durch die enge Röhre nur wenig Quecksilber in den oberen weiten Theil derselben dringen kann, wenn die Schwankungen des Schiffes das Barometer aus der verticalen Lage bringen, so wird das Quecksilber in diesem Theile der Röhre äusserst wenig Bewegung machen können, und dadurch nicht allein die Beobachtung des Barometers erleichtert werden, sondern auch dem Zerschlagen der Röhre durch das Anschlagen des Quecksilbers an den oberen Theil derselben vorgebeugt sein.

Die Behandlung dieses Barometers ist ganz so, wie die des Gefässbarometers. Die Seebarometer sind aber träger als die gewöhnlichen Gefäss- und Heberbarometer, d. h. das Quecksilber in jenen steigt und fällt langsamer als in diesen, was in der Capillarröhre (Haarröhre) der ersteren seinen Grund hat.

Etwas verschieden von dem vorstehend beschriebenen Marinebarometer ist die Einrichtung des von Adie verfertigten. Das Gefäss des letzteren hat keinen elastischen Boden, eine etwa 12 Zoll lange Capillarröhre, unter dieser die Bunton'sche Vorrichtung, welche die Form eines hohlen Kegels hat, dessen Spitze nach dem unteren Ende der Röhre gekehrt und mit einer feinen Oeffnung versehen ist; im Uebrigen ist es so wie die gewöhnlichen Marinebarometer beschaffen, aber empfindlicher und überhaupt besser als diese. Das Ende der Röhre im Gefässe bleibt immer mit Quecksilber bedeckt, wie dieses Barometer auch gehalten werden mag, und wenn dessenungeachtet Luft in die Röhre dringen sollte, so kann sie nur bis Bunton's Vorrichtung kommen, welche gleichsam als Sicherheits-Verschluss beim Transporte dient. Hängt dies Barometer und will man es transportiren, so neige man es etwa 45° gegen den Horizont, bis die Röhre oben ganz mit Quecksilber gefüllt ist,

dann kehre man es um, oder halte es horizontal und transportire es in der einen oder anderen Lage. Das Aufhängen dieses Barometers ist leicht, denn es darf nur vertical — dass Gefäss nach unten gekehrt — gehalten und das obere Ende an einem Gegenstande festgemacht werden, jedoch so, dass es genau vertical hängt und nicht von der Sonne beschienen werden kann. Kurze Zeit nachher — 5 bis 10 Minuten — wird man schon daran die Barometerhöhe ablesen können.

Da der Luftdruck sich in horizontaler Richtung gleichmässig fortpflanzt, so muss derselbe in nicht luftdicht verschlossenen Räumen ebenso gross als im Freien sein. Der Barometerstand kann sonach im Zimmer beobachtet werden. Er ist an der Oberfläche des Meeres im Mittel nahe 760 Millimeter, oder 29,9 Zoll Engl. = 28,05 Zoll Franz., schwankt aber an demselben Orte auf und ab, in der Aequatoreal-Gegend gewöhnlich nur 1 bis 2 Linien, in den gemässigten Zonen bis etwa 2 Zoll und in höheren Breiten bis 4 Zoll, weshalb die Scalen der Seebarometer von 26 bis 30 Zoll Französisch reichen. In der Aequatoreal-Gegend erreicht der Barometerstand regelmässig zweimal täglich ein Maximum und ein Minimum, jenes zwischen 9 und 10 Uhr, dieses zwischen 3 und 4 Uhr, sowohl Morgens als Abends. Heftige Stürme machen indess auch hier eine Ausnahme und verursachen einen bedeutend niedrigeren Barometerstand. In der Regel bringen Polar-Winde (NO in NBr., SO in SBr.) einen höheren und Aequatoreal-Winde (SW in NBr., NW in SBr.) einen niederen Barometerstand. Einem bedeutenden Fallen des Barometers folgt Sturm; dieser bleibt auch oft nicht aus, wenn das Barometer schnell und beträchtlich steigt.

Sonach ist dies Instrument dem Seemanne sehr nützlich, wenn er es sorgfältig beobachtet und seine Vorkehrungen darnach trifft. Zu astronomischen Beobachtungen, namentlich bei kleinen Höhen und Monddistanzen, bedarf er des Barometers zur Ermittelung der wahren astronomischen Refraction.

Auch zur Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Orte durch gleichzeitige Barometer-Beobachtungen (barometrische Höhenmessung oder Hypsometrie) kann es benutzt werden, denn je weiter es von der Meeresfläche entfernt aufgestellt wird, um so niedriger muss sein Stand werden. Bei 28 Zoll Französisch Barometerstand und 0° Reaumur Wärme ist die Luft ungefähr 10500 Mal leichter als Quecksilber, folglich muss man 10500 Linien = 73 Fuss mit dem Barometer höher oder niedriger steigen, wenn es 1 Linie fallen oder steigen soll. Da die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe abnimmt, so wird man in der Höhe bei 14 Zoll Barometerstand schon $2 \times 73 = 146$ Fuss steigen müssen, um das Barometer eine Linie fallen zu machen.

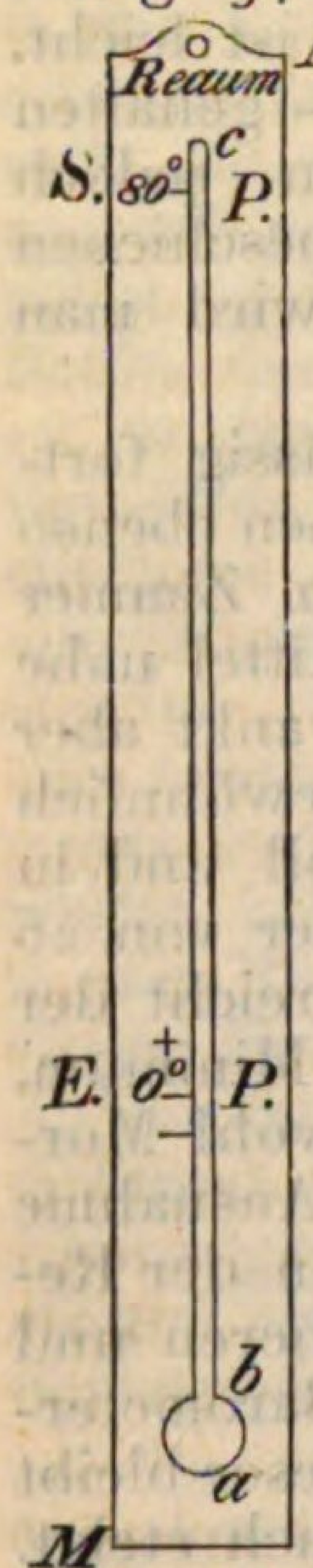
§. 52.

Thermometer und Psychrometer.

Das Thermometer ist ein Instrument, welches durch die gleichmässige Ausdehnung oder Zusammenziehung einer in einer Röhre eingeschlossenen Flüssigkeit das Steigen oder Fallen der Temperatur (Zustand der Wärme) anzeigt; es wird daher auch Wärmemesser genannt. Die gebräuchlichsten Thermometer sind die Quecksilber-Thermometer.

Das Quecksilber-Thermometer besteht aus der etwa 9 bis 12 Zoll langen und $\frac{1}{4}$ Linie Durchmesser habenden gläsernen Cylinderröhre, in Fig. 34. durch *bc* dargestellt, an der unten bei *b* die Glaskugel *a* angeblasen ist. Durch Erwärmung der Kugel und Röhre wird die darin befindliche Luft verdünnt, hierauf die Kugel und ein Theil der Röhre mit reinem, ausgekochtem Quecksilber gefüllt, demnächst die Kugel in aufthauenden Schnee oder in gestossenes, schmelzendes Eis gesteckt, und

Fig. 34.



der Stand des Quecksilbers in der Röhre an dieser bemerkt, welcher Punkt der ungefähre Eispunkt ist. Hierauf hat man die Kugel zu erwärmen und dann in kochendes Wasser zu tauchen, in Folge dessen das Quecksilber in der Röhre bis zu einem gewissen Punkte steigt, den man ebenfalls an der Röhre bezeichnet, und welcher der ungefähre Siedepunkt ist. Diese vorläufige, ungefähre Bestimmung dieser beiden Punkte dient nur dazu, die nöthige Länge der Röhre ermitteln zu können.

Durch eine noch stärkere Erhitzung des Quecksilbers wird dieses bis an's Ende der Röhre (*c*) getrieben und dann letztere zugeschmolzen. Darauf bestimmt man von Neuem den Eis- und Siedepunkt an der Röhre so genau wie möglich, befestigt letztere hiernach an ein messingenes, knöchernes oder elfenbeinernes Stäbchen (*MN*), bemerkt auf diesem den zuletzt bestimmten Eis- und Siedepunkt an der Röhre, und theilt den Abstand zwischen beiden in eine Anzahl gleicher Theile, wovon jeder Theil ein Thermometergrad heisst, und wenn die Grade auch unter dem Eispunkte abgetragen sind, die ganze Eintheilung Thermometerscale genannt wird. Auf dieser wird der Eispunkt mit *E. P.* und der Siedepunkt mit *S. P.*, wie in Figur 34., bezeichnet.

Die Entfernung zwischen dem Eis- und Siedepunkte hat Reaumur in 80, Celsius in 100, Fahrenheit in 180 und Reyger in 360 gleiche Theile getheilt. Reaumur und Celsius, beide haben den Eispunkt als Nullpunkt angenommen, Fahrenheit dagegen setzt den Nullpunkt 32 Fahrenheitsche Grade niedriger und Reyger 26 Reyger'sche Grade höher. Der Siedepunkt hat diesemnach auf Reaumur's Scale 80°, auf Celsius's 100°, auf Fahrenheit's 212° und auf Reyger's 334°. Die Grade auf jeder Scale über dem Nullpunkte derselben heissen Wärmegrade, die unter dem Nullpunkte Kältegrade; erstere bezeichnet man auch mit +, letztere mit —. Die drei erstgenannten Thermometerscalen sind die gebräuchlichsten, andere kommen selten vor. Reyger's Scale wird zu wissenschaftlichen Zwecken nicht benutzt und scheint nur in Danzig Eingang gefunden zu haben in früherer Zeit.

Die Verwandlung des Thermometerstandes nach der einen Scale in den nach einer anderen wird nun leicht zu bewirken sein.

Bezeichnet man nämlich den Reaumurschen Grad mit R, den Celsiusschen mit C, den Fahrenheitschen mit F, den Reygerschen mit Rg, so hat man zu dieser Verwandlung die allgemeinen Formeln:

$$xR = \tfrac{5}{4}xC = (\tfrac{9}{4}x + 32)\,F = (\tfrac{9}{2}x - 26)\,Rg \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$
$$xC = \tfrac{4}{5}xR = (\tfrac{9}{5}x + 32)\,F = (\tfrac{18}{5}x - 26)\,Rg \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$
$$xF = \tfrac{4}{9}(x - 32)\,R = \tfrac{5}{9}(x - 32)\,C = (2x - 90)\,Rg \; . \; . \; . \; (3)$$
$$xRg = \tfrac{1}{2}(x + 90)\,F = \tfrac{5}{18}(x + 26)\,C = \tfrac{2}{9}(x + 26)\,R \; . \; . \; . \; (4).$$

Es wird z. B. nach (1) der Thermometerstand $+ 10°\,R = + 12°{,}5\,C = + 54°{,}5\,F = + 19°\,Rg$ sein, nach (2) ist der Thermometerstand $+ 4°\,C = + 3°{,}2\,R = + 39°{,}2\,F = - 11°{,}6\,Rg$, nach (3) der $+ 16°\,F = - 7\tfrac{1}{9}°\,R = - 8\tfrac{8}{9}°\,C = - 58°\,Rg$, und nach (4) ist $- 40°\,Rg = + 25°\,F = - 3\tfrac{8}{9}°\,C = - 3\tfrac{1}{9}°\,R$.

Der Siedepunkt und Eispunkt des reinen Wassers sind Punkte von möglichst beständiger Wärme, nur ist bei der Bestimmung des Siedepunktes noch Rücksicht auf den Stand des Barometers zu nehmen, weil bei niedrigem Barometerstande das Wasser leichter kocht, als bei hohem. Der Siedepunkt wird auf den Barometerstand von 28 Pariser Zoll reducirt. Ein Unterschied von einer Linie verrückt den Siedepunkt 0°,08 *C*.

Die Ausdehnung des Quecksilbers vom Eis- bis zum Siedepunkte des reinen Wassers ist eine gleichmässige und bleibt es auch noch über diese Punkte hinaus nach den darüber angestellten Untersuchungen. Deshalb ist das Quecksilber zur Füllung der Thermometer die geeignetste Flüssigkeit. Bei — 40° *C* geht indess das Quecksilber aus dem flüssigen in den festen Zustand über, und so sind Quecksilber-Thermometer zu Temperatur-Beobachtungen in so grosser Kälte nicht geeignet. Man bedient sich dann der Weingeist-Thermometer, weil der wasserfreie Weingeist (absoluter Alkohol) auch bei der grössten künstlichen Kälte nicht fest geworden ist. Bei — 79° *C* soll er noch flüssig geblieben sein, bei + 79° *C* aber zu sieden beginnen. Reaumur in Frankreich füllte die Thermometer mit Weingeist, und da er hierbei fand, dass 1000 Theile dieser Füllung bei der Erwärmung desselben vom Eispunkte bis zum Siedepunkte sich um 80 Theile ausdehnten, so theilte er die Entfernung zwischen Eis- und Siedepunkt in 80 gleiche Theile.

Fahrenheit in Danzig füllte die Thermometer mit Quecksilber und setzte seinen Nullpunkt auf die Temperatur, die entsteht, wenn man drei Theile Schnee mit einem Theile Kochsalz vermischt.

Der Seemann gebraucht das Thermometer zur Beobachtung der Temperatur der Luft und des Wasser aussenbords. Zu ersterem Zwecke muss es im Freien im Schatten hängen, entfernt von Gegenständen an Bord, und am Lande einige Meter vom Boden, mindestens $\frac{1}{3}$ Meter von der Wand entfernt, und gegen Zugluft geschützt sein. Zu letzterem Zwecke muss seine Kugel mindestens zwei Zeitminuten in das Wasser gehalten und so erst der Thermometerstand abgelesen werden, denn, hebt man es aus dem Wasser, so werden die Wassertheilchen an der Kugel verdampfen, wozu Wärme dem Quecksilber entzogen wird, was zur Folge hat, dass sich letzteres zusammenzieht, also das Thermometer einige Grade heruntergeht. Aus den stündlichen Ständen des freien Thermometers in 24 Stunden das arithmetische Mittel genommen, giebt die mittlere Temperatur des Tages. Das Maximum der Tages-Temperatur erfolgt $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Uhr Nachmittags und das Minimum gegen Sonnen-Aufgang; jedoch finden Ausnahmen statt.

Das Psychrometer, von Professor August in Berlin vorgeschlagen, besteht aus zwei ganz gleichen, sehr genauen, neben einander hängenden Thermometern — 8 bis 10 Centimeter von einander entfernt —, von welchen die Kugel des einen mit Mousselin umwickelt ist und mit reinem Wasser angefeuchtet wird, was dadurch geschieht, dass man ein Glas mit Wasser diesem Thermometer von unten so nähert, dass die umwickelte Kugel ganz im Wasser ist und dann das Glas entfernt. Grosse Wassertropfen dürfen aber nicht hängen bleiben. Bei dieser Anfeuchtung liest man den Stand (t) des Thermometers mit der trockenen Kugel ab und etwa 5 Minuten nach der Anfeuchtung auch den (t') des Thermometers mit der nassen Kugel, wenn nämlich dies nicht mehr fällt. Der erstere Thermometerstand zeigt die Temperatur der Luft an, der letztere die des verdunsteten Wassers, und dieser wird, wenn die Luft nicht ganz mit Feuchtigkeit gesättigt ist, immer etwas niedriger als jener sein. Sind aber beide Stände gleich, so ist die Luft ganz mit Feuchtigkeit gesättigt, vermag also bei der Temperatur nicht mehr Wasserdampf aufzunehmen. Ist die Luft sehr trocken, so geht die Verdunstung rasch vor sich und die dadurch bewirkte Abkühlung der nassen Kugel wird um so grösser, folglich auch die Differenz der beiden Thermometerstände bedeutender. Da die Verdunstung nicht blos von der Trockenheit der Luft, sondern auch von der Stärke des Windes abhängig ist, so muss das Psychrometer an einer, gegen Zugluft und auch gegen Sonnenstrahlen geschützten Stelle beobachtet werden.

Den Feuchtigkeitsgehalt der Luft kann man nun mit Hülfe der zu diesem Zwecke berechneten Tabellen und den beobachteten Thermometerständen berechnen. Die folgende Tafel I. enthält die der Temperatur des nassen Thermometers (t') entsprechende Elasticität e des Wasserdampfes im Maximum der Dichtigkeit, die andere II. die der Differenz der beiden Thermometer ($t - t'$) entsprechende Veränderung e' dieses Wasserdampfes, und zwar in Pariser Linien, folglich giebt $e - e'$ die Elasticität des vorhandenen Wasserdampfes, woraus sich auch die Dichtigkeit desselben berechnen lässt, da diese $\frac{5}{8}$ von der Dichtigkeit einer Luftmasse von gleicher Elasticität und Temperatur ist. Will man die Procente des Wasserdampfes in der Luft haben, so nehme man mit t (dem Stande des trockenen Thermometers) die Elasticität E des Wasserdampfes im Maximum der Dichtigkeit aus Tafel I., und berechne:

$$\frac{100\,(e-e')}{E} = X\,\%\ \text{Wasserdampf in der Luft.}$$

Tafel I.

t'	e	t'	e	t'	e	t'	e
— 10°	1,10	0°	2,24	10°	4,35	20°	8,07
9	1,18	+ 1	2,40	11	4,64	21	8,57
8	1,27	2	2,57	12	4,94	22	9,09
7	1,37	3	2,75	13	5,26	23	9,64
6	1,47	4	2,94	14	5,60	24	10,22
5	1,58	5	3,14	15	5,96	25	10,82
4	1,69	6	3,36	16	6,34	26	11,46
3	1,82	7	3,59	17	6,74	27	12,13
2	1,95	8	3,83	18	7,16	28	12,84
1	2,09	9	4,08	19	7,61	29	13,58

Tafel II.

$t-t'$	e'
1°	0,26
2	0,53
3	0,79
4	1,06
5	1,32
6	1,58
7	1,84
8	2,10
9	2,36
10	2,61

Diese Tafeln sind Koppe's Physik entlehnt. Sie gelten für Celsius's Scale. Ein Beispiel wird nicht überflüssig erscheinen. Ist nämlich am Psychrometer beobachtet: das trockene Thermometer $t = 27°$ C, das feuchte $t' = 22°$ C, also $t - t' = 5°$, dann giebt:

Tafel I. $e = 9{,}09$ Linien,

Tafel II. $e' = 1{,}32$ » also die Elasticität des vorhandenen Wasserdampfes $(e - e') = 7{,}77$ Linien.

Zur Ermittelung der Procente des in der Luft vorhandenen Wasserdampfes giebt:

Tafel I. mit t $E = 12{,}13$ Linien, die Elasticität des Wasserdampfes im Maximum der Dichtigkeit bei der Temperatur der Luft, folglich sind die Procente des in der Luft vorhandenen Wasserdampfes

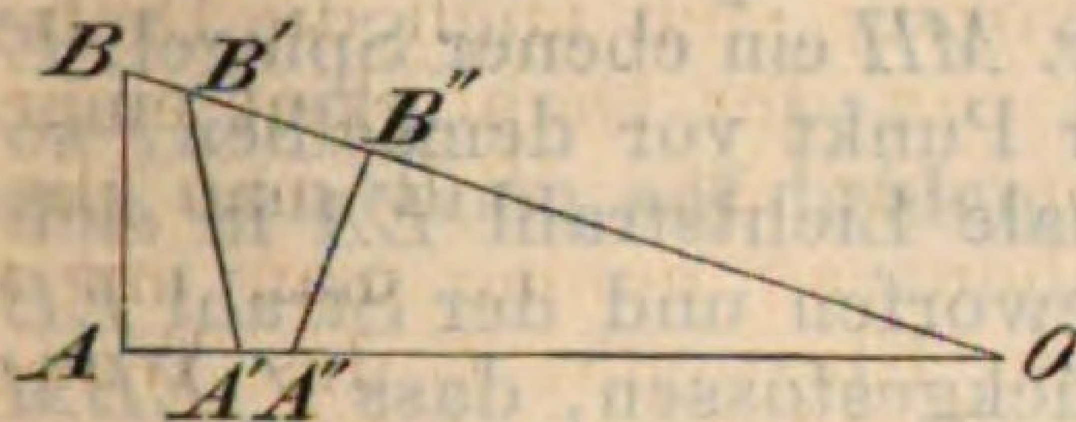
$$= 100 \cdot \frac{e-e'}{E} = \frac{100 \cdot 7{,}77}{12{,}13} = 64{,}06.$$

Den Thaupunkt zu bestimmen, gehe man mit der Elasticität des vorhandenen Wasserdampfes ($e - e'$), hier $= 7{,}77$ Linien, in Tafel I., und entnehme daraus die dieser entsprechende Temperatur, so ist dies die des Thaupunktes, in diesem Falle $+ 19°{,}4$ C. Würde nämlich ein trockener Körper von höherer Temperatur allmälig erkaltet, bis zu $+ 19{,}4°$ C, so müsste sich auf demselben ein Niederschlag der in der Luft vorhandenen Dämpfe zeigen, und die Temperatur, bei der dieser Niederschlag zuerst erfolgt, wird Thaupunkt genannt.

§. 53.

Einige Sätze aus der Optik.

Fig. 35.



Wenn man sich in Fig. 35. unter AB ein Object und bei O das Auge eines Beobachters vorstellt, dem dies Object unter dem Winkel AOB erscheint, so heisst dieser Winkel der Sehwinkel des Objectes oder auch seine scheinbare Grösse. Alle Objecte, die zwischen denselben Schenkeln des Sehwinkels liegen, als $A'B'$ und $A''B''$, haben dieselbe scheinbare Grösse. Wenn das Object AB normal auf AO steht, so ist

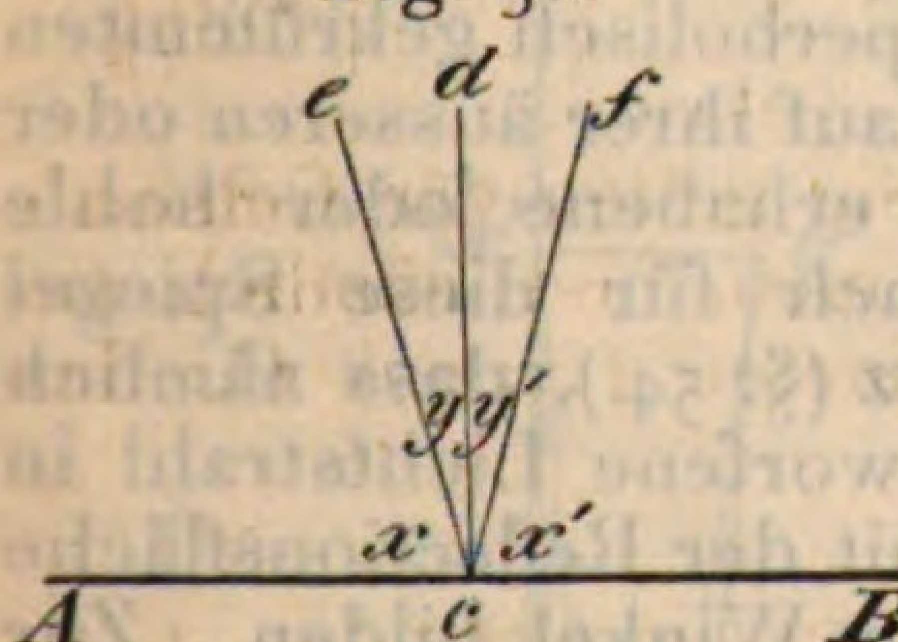
$$h = a \cdot \operatorname{tang} \angle O,$$

worin h die Höhe des Objectes AB, a der Abstand AO und $\angle O$ der Sehwinkel des Objectes ist. Wenn von diesen drei Grössen zwei gegeben sind, so kann die dritte gefunden werden. Der Sehwinkel, bei welchem ein Object verschwindet, heisst der kleinste und ist für das blosse Auge eine Minute, bei scharfen Augen 40 Secunden und weniger.

§. 54.

Fällt ein Lichtstrahl auf die glatte Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, so wird derselbe von dieser zurückgeworfen, und zwar so, dass der zurückgeworfene Lichtstrahl mit der Fläche denselben Winkel macht, als der einfallende, und beide Strahlen in einer Ebene liegen.

Fig. 36.



Es sei in Fig. 36. AB eine solche glatte ebene Fläche, ec der einfallende und cf der zurückgeworfene Lichtstrahl, so wird der Einfallswinkel x gleich dem Zurückstrahlungswinkel x' sein. Zieht man noch das Einfallsloth dc, so ist $\angle y = \angle y'$, welche Winkel auch Einfalls- und Zurückstrahlungswinkel genannt werden. Die beiden Strahlen ec und cf und das Einfallsloth dc liegen in einer Ebene, die normal auf der Ebene AB steht.

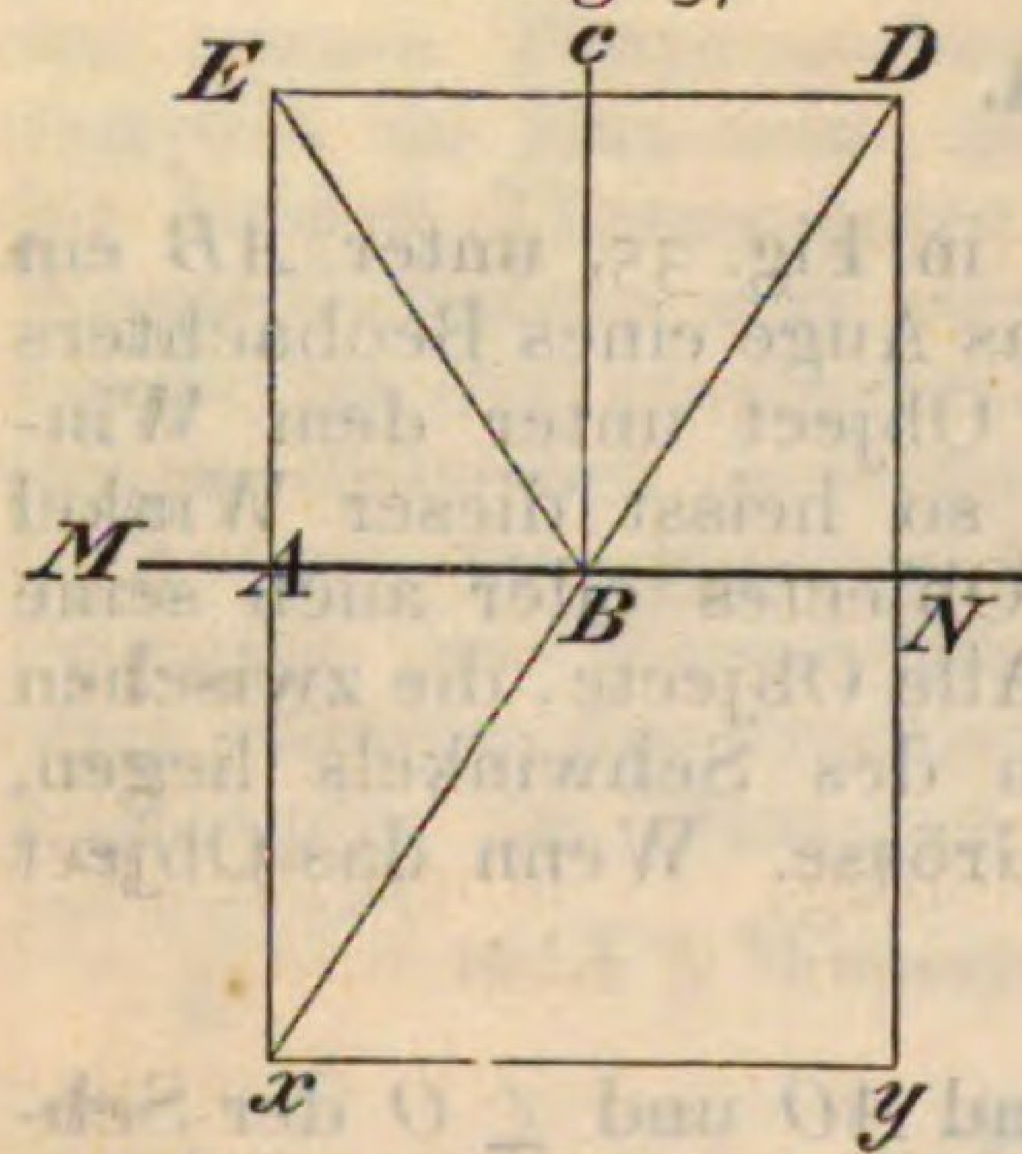
In der Mechanik findet dasselbe Gesetz statt. Wirft man nämlich einen elastischen Körper von e nach c gegen den harten AB, so wird jener von diesem nach f zurückgeworfen, und wirft man ihn von d nach c, so wird er nach d zurückgeworfen.

Der Körper, dessen Oberfläche die auf ihn auffallenden Lichtstrahlen zurückwirft, wird Spiegel genannt, und dieser ist um so vollkommener, je glatter seine Oberfläche. Solche Spiegel bilden die Oberfläche der in dunkelen Gefässen stehenden Flüssigkeiten, blank polirte Metallplatten und polirte, auf einer Seite mit einer von Quecksilber durchfressenen Zinnplatte belegte Glasplatten.

Selbst der vollkommenste Spiegel wirft nicht so viel Licht zurück, als er empfängt, weil ein Theil des letzteren in ersteren dringt und von diesem verschluckt wird. Die gläsernen Spiegel, deren Flächen parallel sind, geben wenigstens zwei Bilder von nahen Gegenständen, wenn die Lichtstrahlen unter einem schiefen Winkel auffallen, dagegen nur ein Bild, wenn sie den Spiegel normal treffen.

§. 55.

Fig. 37.

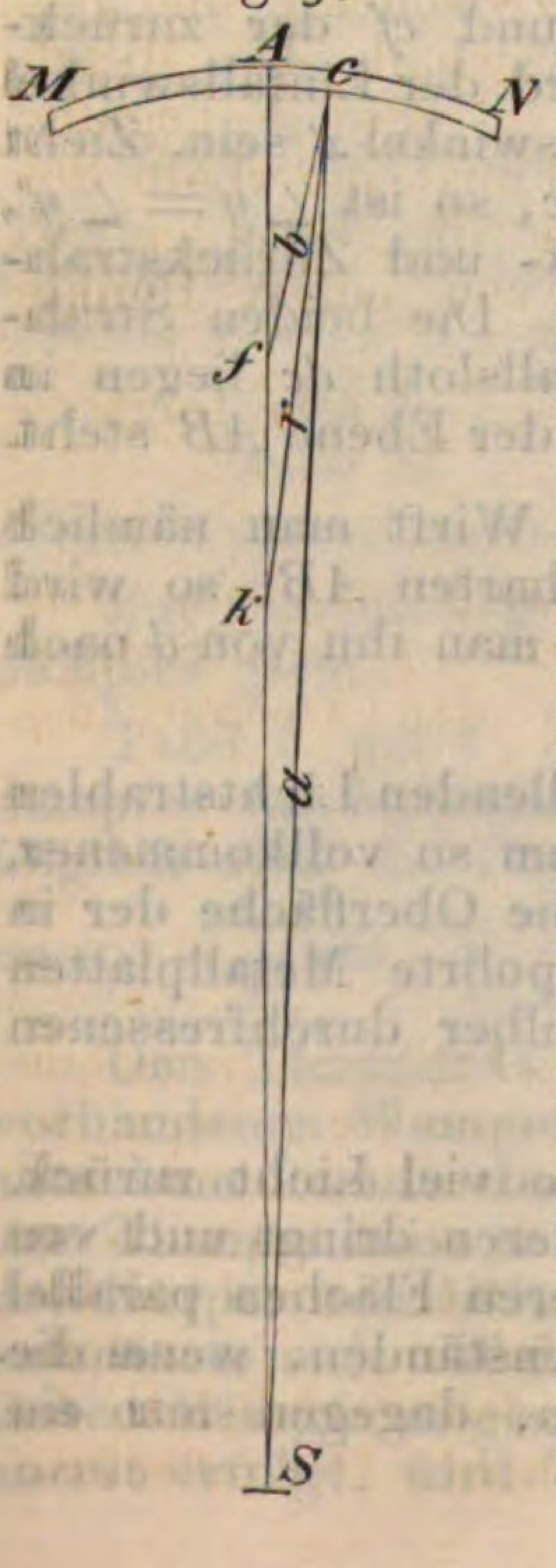


Die Wirkung eines ebenen Spiegels ist die, dass alle Objecte in ihm in ihrer natürlichen Grösse abgespiegelt werden, und das Bild ebenso weit hinter der Spiegelfläche liegt, als das Object vor derselben. Es sei in Fig. 37. *MH* ein ebener Spiegel, *E* ein leuchtender Punkt vor demselben, so wird der normale Lichtstrahl *EA* in sich selbst zurückgeworfen und der Strahl *EB* so nach *D* zurückgestossen, dass $\angle EBM = \angle DBH$ ist. Dem Auge in *D* wird daher der leuchtende Punkt *E* in *x* — dem Durchschnittspunkte der verlängerten Strahlen *EA* und *DB* — zu sein scheinen.

Da $\angle EBM = \angle DBH = \angle MBx$, $\angle EAB = \angle xAB = 90°$ und $AB = AB$ ist, so muss $\triangle ABE \cong \triangle ABx$ und $EA = Ax$ sein. Alle von *E* kommenden Lichtstrahlen werden diesemnach so von dem Spiegel *MH* reflectirt, dass sie aus dem Punkte *x* zu kommen scheinen. Was hier von dem Punkte *E* und seinem Bilde *x* nachgewiesen ist, lässt sich auch von jedem leuchtenden Punkte des Objectes *ED* nachweisen. Ist nämlich *Dy* normal auf *MH* und $DN = Ny$, so ist *y* das Bild von *D* aus *E* gesehen. Das Bild von *ED* wird daher *xy* sein und von *D* aus in dem Theile des Spiegels *BN* gesehen werden. Dieses Bild *xy* ist nur ein Scheinbild.

§. 56.

Fig. 38.



Gekrümmte Spiegel sind Abschnitte von Kugeln, elliptisch, parabolisch und hyperbolisch gekrümmten Körpern, die, je nachdem sie auf ihrer äusseren oder inneren Oberfläche spiegeln, erhabene oder hohle Spiegel genannt werden. Auch für diese Spiegel gilt das Zurückstrahlungsgesetz (§. 54.), dass nämlich der einfallende und zurückgeworfene Lichtstrahl in derselben Ebene liegen und mit der Reflectionsfläche oder dem Einfallslothe gleiche Winkel bilden. Zur Auffindung dieser Winkel ist durch den Berührungspunkt in der Spiegelfläche an diese eine Tangente zu ziehen und auf letztere im Berührungspunkte eine Normale zu errichten. Die sphärischen Spiegel kommen am häufigsten vor.

Es sei in Fig. 38. *MN* der Durchschnitt eines sphärischen Hohlspiegels (Sammelspiegels), *k* der Mittelpunkt der Krümmung, *A* der Mittelpunkt des Spiegels, so ist *SA* die Axe des Spiegels. Der Lichtstrahl *SA* wird in sich selbst zurückgeworfen und heisst Hauptstrahl. Der Lichtstrahl *Sc* wird so zurückgeworfen nach *f*, dass der Winkel *Scf*, den diese beiden Strahlen mit einander bilden, durch die von dem Mittelpunkte *k* nach dem Berührungspunkte *c* gezogene Gerade *kc* halbirt, also $\angle Sck = \angle kcf$ wird. In *f* ist nun das Bild des leuchtenden Punktes *S*. Jener Punkt kann bei Strahlen, die einen kleinen

Winkel mit dem Hauptstrahl machen, leicht gefunden werden. Es wird, wenn $\angle ASc$ klein genug ist, $Sc = SA$ und $fc = fA$ gesetzt werden können. Das Dreieck Scf liefert:

$$Sc : cf = Sk : kf,$$

daher auch

$$SA : Af = Sk : kf.$$

Bezeichnet man Af mit b, SA mit a und kA mit r, so ist

$$a : b = a - r : r - b,$$

oder

$$ar - ab = ab - br,$$

oder

$$2ab = ar + br,$$

und wenn man auf beiden Seiten mit $2abr$ dividirt, erhält man

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

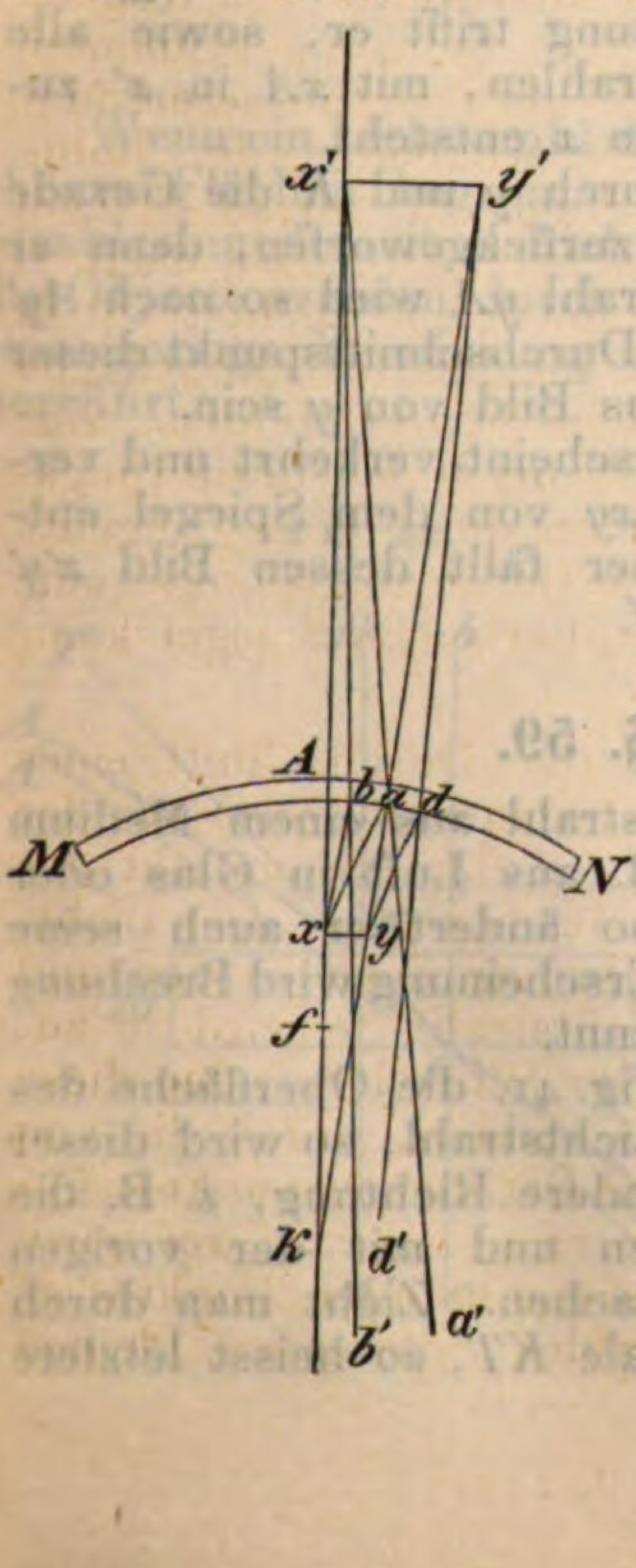
Dem Vorstehenden nach ist diese Formel richtig, so lange die einfallenden Strahlen mit dem Hauptstrahl einen kleinen Winkel bilden.

Wird $a = \infty$ gesetzt, so giebt (1) $b = \frac{1}{2}r$, d. h. wenn die Strahlen von einem unendlich entfernten Punkte kommen, also mit einander parallel auf den Hohlspiegel fallen, so vereinigen sich die zurückgeworfenen Strahlen in einem Punkte, der um den halben Radius von dem Spiegel entfernt ist und Brennpunkt heisst.

Wenn $a = \frac{1}{2}r$ ist, so ist $b = \infty$, d. h. liegt der leuchtende Punkt in dem Brennpunkte, so laufen die reflectirten Strahlen mit einander parallel. Dieses sind Leuchtspiegel (Reverberen) und selbige bringt man auf Leuchtthürmen an.

Wenn $a = r$, so ist auch $b = r$, d. h. ist der leuchtende Punkt in dem Mittelpunkte der Krümmung, so fallen auch die reflectirten Strahlen in diesen Punkt.

Fig. 39.



Wenn $a < r$ und $> \frac{1}{2}r$, so ist $b > r$, d. h. liegt der leuchtende Punkt innerhalb des Mittelpunktes der Krümmung — zwischen k und f — so fällt der Bildpunkt ausserhalb des Mittelpunktes. Wenn $a < \frac{1}{2}r$, so wird b negativ, d. h. liegt der leuchtende Punkt innerhalb des Brennpunktes, so werden die Strahlen so reflectirt, als kämen sie von einem Punkte hinter dem Spiegel.

Aus der Gleichung $2ab = ar + br$ folgt:

$$b = \frac{ar}{2a - r} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}r}{a - \frac{1}{2}r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Nach dieser Formel kann man aus dem Abstande a — des Objectes von dem Spiegel — und der Brennweite $\frac{1}{2}r$ den Abstand des Bildes b genau finden.

§. 57.

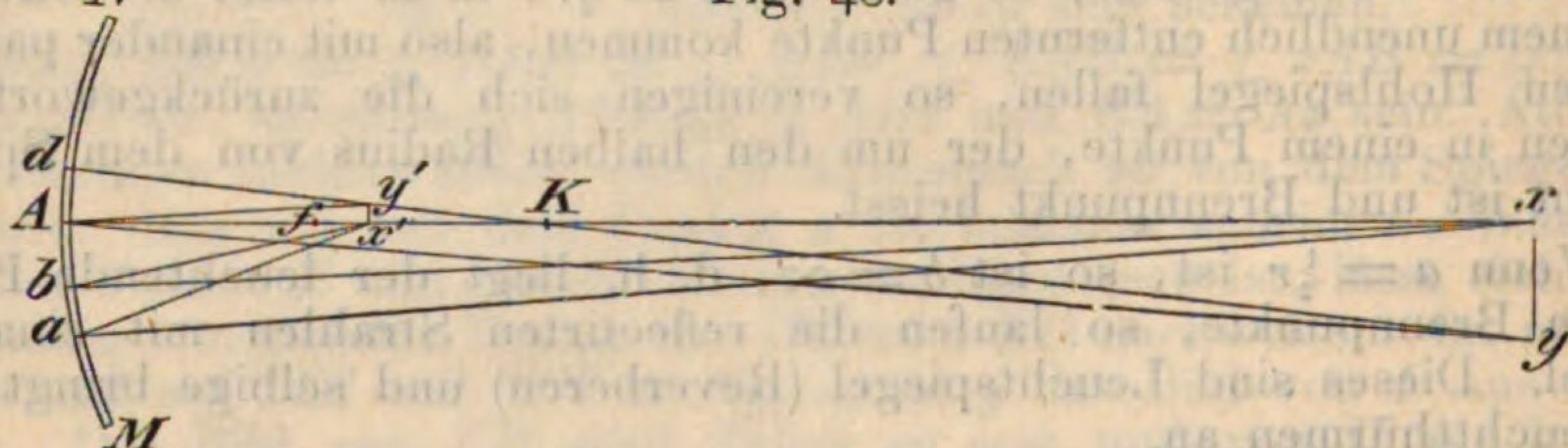
Wenn ein Object xy (Fig. 39.) zwischen dem Spiegel und dem Brennpunkte f liegt, so erscheint es im Spiegel aufrechtstehend und vergrössert. Der Strahl xA wird nämlich in sich selbst zurückgeworfen, der Strahl xa hat nach der Reflection die Richtung aa', welche erhalten wird, wenn man das Einfallsloth ka zieht und $\angle kaa' = \angle kax$ macht. Der reflectirte

Strahl aa' scheint von dem Punkte x' in der Axe hinter dem Spiegel herzukommen, und da alle übrigen Strahlen, welche wie bb' nicht zu weit von der Axe sich entfernen, ebenfalls nach der Reflection aus dem Punkte x' zu kommen scheinen, so wird x' das Scheinbild des Punktes x sein.

Um das Bild von y zu bestimmen, ziehe man ky, welches der Hauptstrahl dieses Punktes ist, und untersuche, wo Strahlen wie yd, die ausser der Richtung yy' liegen, ky hinter dem Spiegel schneiden, wenn man die reflectirten Strahlen rückwärts verlängert. Das Bild $x'y'$ wird dann aufrecht stehen und in dem Verhältnisse vergrössert erscheinen, als kx in kx' enthalten ist; es wird auch um so weiter hinter dem Spiegel zu liegen scheinen, je näher xy an f sich befindet.

§. 58.

Fig. 40.

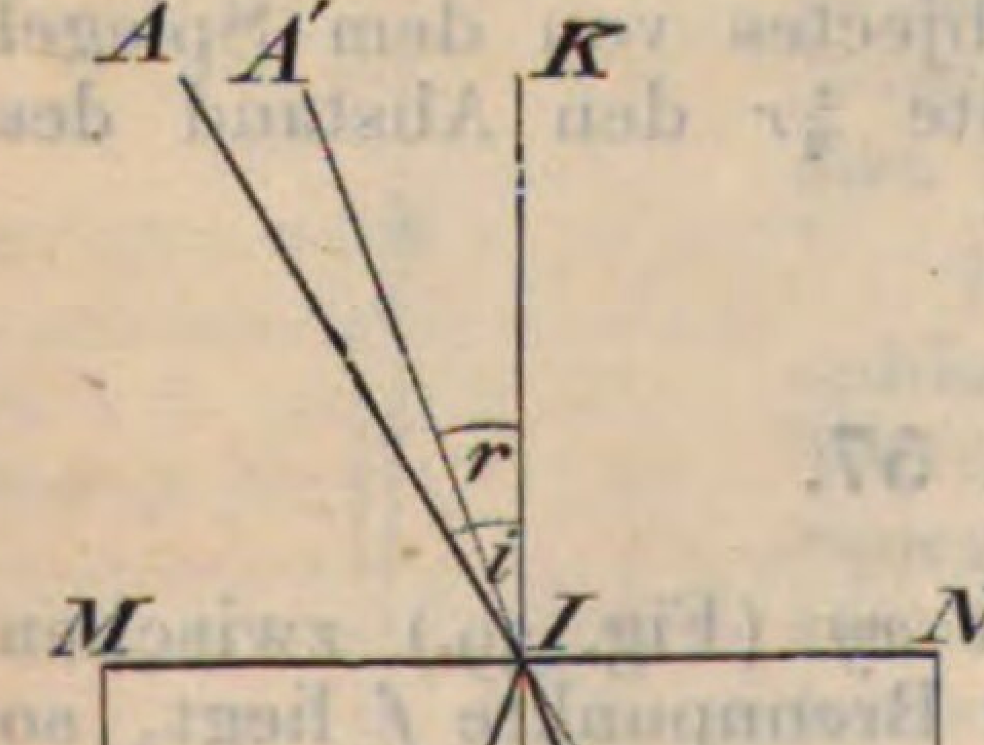


Wenn das Object xy (Fig. 40.) weiter von dem Spiegel entfernt ist, als der Mittelpunkt K, so entsteht durch die Reflection das verkleinerte verkehrte Bild $x'y'$ zwischen dem Mittelpunkte K und Brennpunkte f. Es sei x der in der Axe xA liegende strahlende Punkt, der die Strahlen xA, xa, xb auf den Spiegel sendet. xA wird in sich selbst zurückgeworfen, xa hat aber nach der Reflection die Richtung $x'a$, weil $\angle xaK = x'aK$ sein muss, und vermöge dieser Richtung trifft er, sowie alle anderen von x kommenden und reflectirten Strahlen, mit xA in x' zusammen, so dass in diesem Punkte ein Bild von x entsteht.

Das Bild von y findet man, wenn man durch y und K die Gerade yd zieht, so wird dieser Strahl in sich selbst zurückgeworfen, denn er steht normal auf der Spiegelfläche, und der Strahl yA wird so nach Ay' zurückgeworfen, dass $\angle yAx = \angle xAy'$ ist. Der Durchschnittspunkt dieser beiden reflectirten Strahlen y' wird demnach das Bild von y sein.

Das Bild von xy ist also $x'y'$, und dieses erscheint verkehrt und verkleinert. Je weiter xy von dem Spiegel entfernt ist, desto näher fällt dessen Bild $x'y'$ an den Brennpunkt f.

Fig. 41.



§. 59.

Wenn ein Lichtstrahl aus einem Medium in ein anderes, z. B. aus Luft in Glas oder Wasser übergeht, so ändert er auch seine Richtung, und diese Erscheinung wird Brechung oder Refraction genannt.

Es sei MN in Fig. 41. die Oberfläche des Glases MS, AI ein Lichtstrahl, so wird dieser in dem Glase eine andere Richtung, z. B. die Richtung IB nehmen und mit der vorigen den Winkel BIB' machen. Zieht man durch I auf MN die Normale KT, so heisst letztere

das Einfallsloth, der Winkel *AIK* Einfallswinkel und Winkel *A'IK* oder *TIB* der Brechungs- oder Refractionswinkel.

Die Gesetze der Brechung in Bezug auf die Richtung des gebrochenen Strahles *IB* sind folgende:

1. Das Einfallsloth *KI*, der einfallende Strahl *AI* und der gebrochene Strahl *IB* liegen immer in einer Ebene.

2. Bei derselben brechenden Materie hat der Sinus des Einfallswinkels *AIK* zum Sinus des Brechungswinkels *A'IK* immer dasselbe Verhältniss und dieses wird das Brechungsverhältniss genannt.

Der Brechungswinkel *TIB* ist entweder kleiner oder grösser als der Einfallswinkel *AIK*. Im ersten Falle sagt man, der Strahl werde dem Lothe zu, im anderen Falle aber, er werde von dem Lothe weg gebrochen. Beim Uebergange aus Luft in Glas, sowie in alle andere feste und flüssige Körper, wird ein Lichtstrahl dem Lothe zu und folglich beim Uebergange aus Glas in Luft vom Lothe weg gebrochen.

Für Glas ist das Brechungsverhältniss in runder Zahl wie 3 : 2, d. h. es ist $\sin AIK : \sin TIB = 3 : 2$.

Wird allgemein das Brechungsverhältniss mit $m : n$, der Einfallswinkel mit i, der Brechungswinkel mit r bezeichnet, so ist aus Luft in Glas

$$\sin i : \sin r = m : n.$$

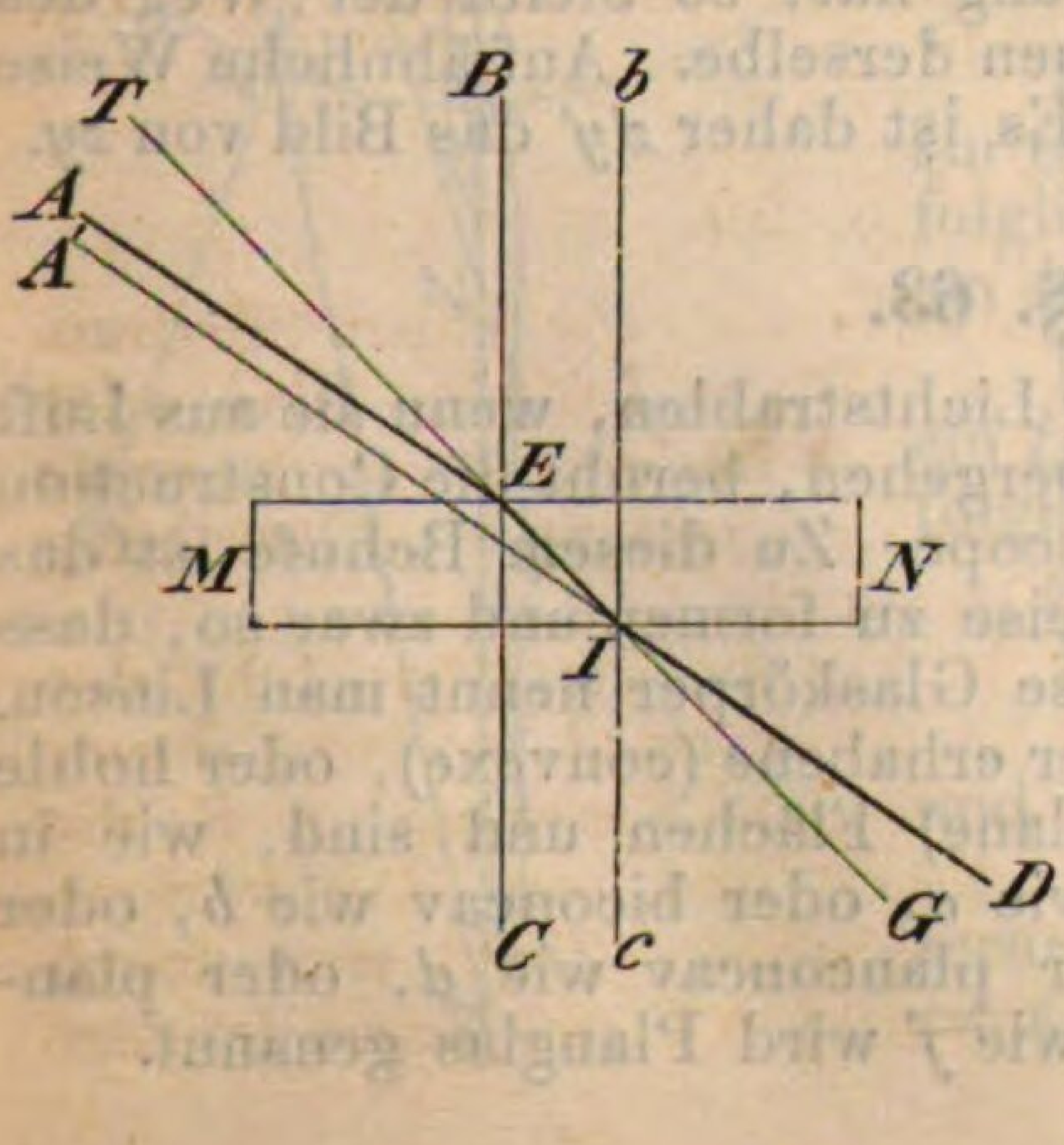
Für Wasser ist das Brechungsverhältniss nahe wie 4 : 3.

Wenn ein Lichtstrahl aus einem durchsichtigen Körper in Luft übergeht, so wird die Brechung leicht unmöglich und geht dann in Spiegelung über. Denn es ist $\sin AIK = \frac{3}{2} \cdot \sin BIT$; wird nun $\angle BIT$ so gross, dass $\frac{3}{2} \cdot \sin BIT > 1$, welches der Fall sein wird, wenn $\angle BIT$ grösser als 42° ist, so ist $\sin AIK$ eine unmögliche Grösse, und in diesem Falle kehrt der Strahl *BI* von *I* nach der Richtung *IB''* so zurück, dass *IB''* und *IB* in einer Ebene liegen und $\angle TIB'' = \angle TIB$ ist.

§. 60.

Wenn ein Lichtstrahl durch ein Glas geht, welches von zwei parallelen ebenen Flächen begrenzt wird, so treten aus einem solchen Glase die Strahlen in derselben Richtung aus, in welcher sie eingetreten sind, und die Objecte werden durch dasselbe ebenso gesehen, als mit freiem Auge, eine geringe Verrückung abgerechnet, die von der Dicke des Glases herrührt.

Fig. 42.



Es sei in Fig. 42. *MN* ein normaler Durchschnitt eines solchen Glases, *AE* ein Lichtstrahl, *BE* das Einfallsloth und $m : n$ das Brechungsverhältniss aus Luft in Glas, so ist

$$\sin IEC = \frac{n}{m} \cdot \sin AEB.$$

Bei *I* findet nun die zweite Brechung statt, und wenn man hier das Einfallsloth *cI* zieht, so ist

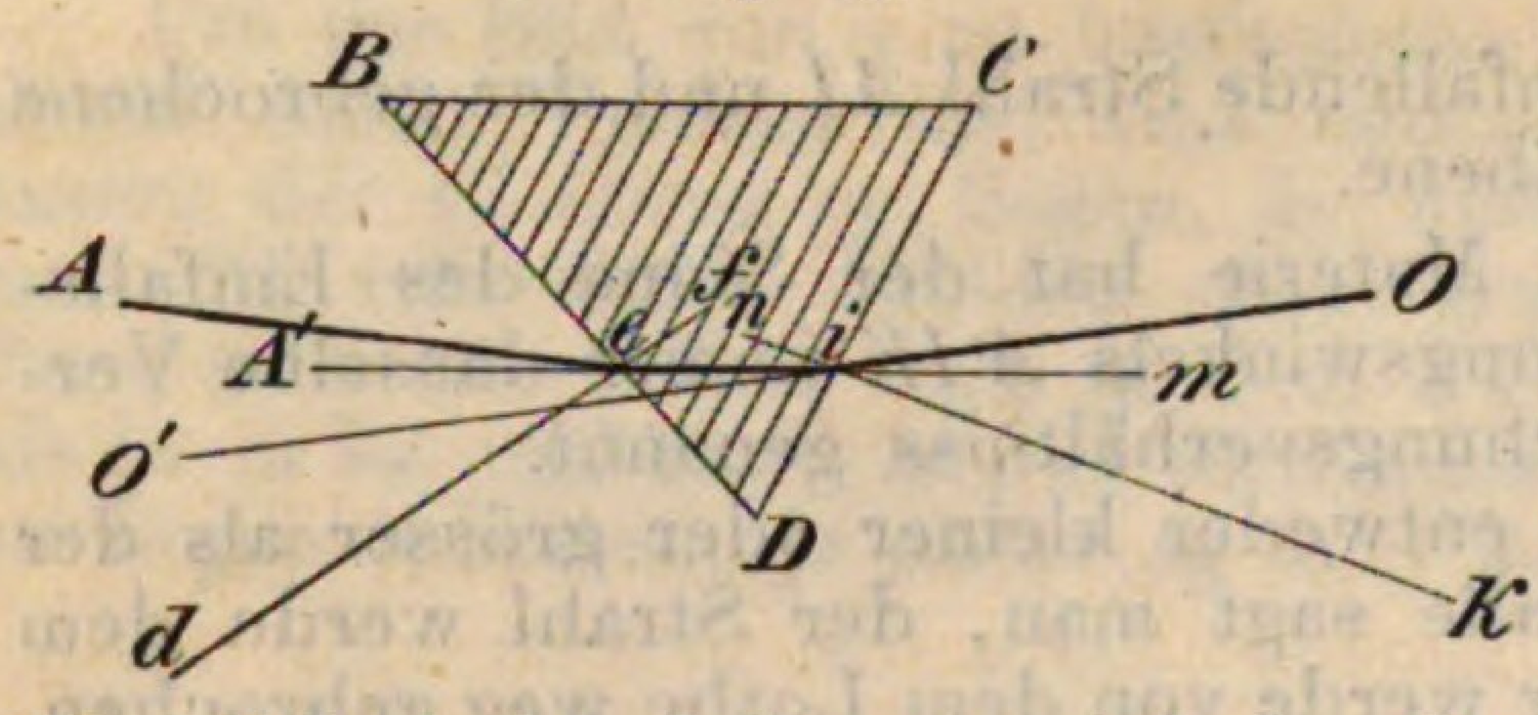
$$\sin cID = \frac{m}{n} \cdot \sin IEC = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} \cdot \sin AEB,$$

also

$\angle cID = \angle AEB$, d. h. der einfallende Strahl ist mit dem ausfallenden parallel, und das Auge in *D* wird den Gegenstand *A* in *A'* sehen.

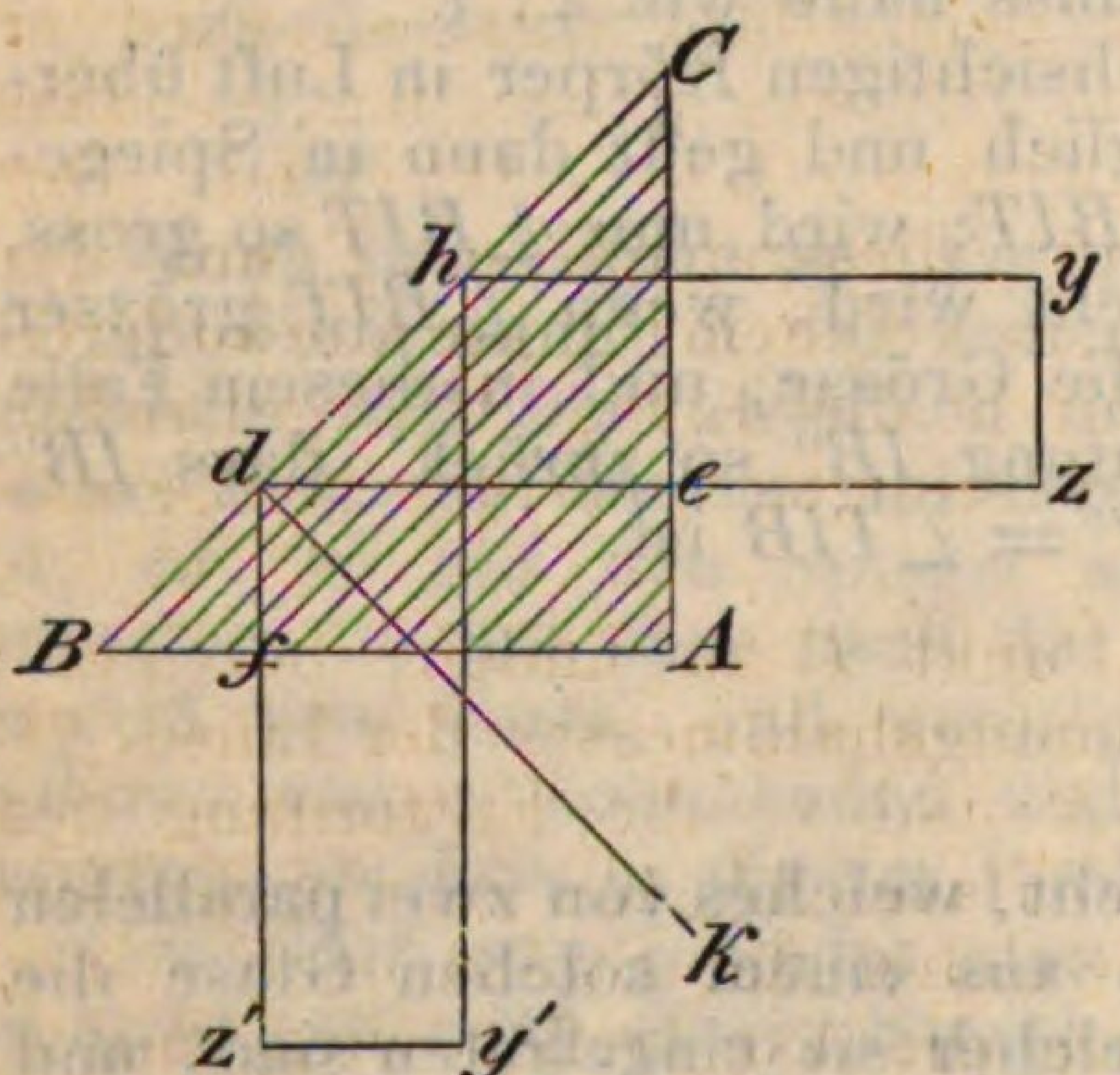
§. 61.

Fig. 43.



Es sei BCD (Fig. 43.) ein auf die Axe eines dreiseitigen gläsernen Prismas normaler Durchschnitt und Ae ein auf BD auffallender Lichtstrahl. Zieht man nun durch e das Einfallsloth df, so wird der Strahl nach diesem zu gebrochen und nimmt etwa die Richtung ei an, in welcher er bis i an die Fläche DC gelangt. Wenn man durch i das Einfallsloth kn zieht, so wird der Strahl ei, dessen Verlängerung im ist, bei seinem Austritt aus dem Glase vom Lothe kn weg gebrochen und nimmt etwa die Richtung iO an, in der man den Gegenstand erblickt, wenn man das Auge in O bringt. Der Gegenstand A wird demnach von O aus in O' gesehen. Von den Winkeln des Prismas hat hierauf nur der Winkel D Einfluss, weshalb er auch der brechende Winkel des Prismas genannt wird. Durch ein solches Prisma gesehen, erscheinen die Objecte, ausserdem, dass sie verrückt sind, auch noch mit bunten Rändern umgeben, also farbig.

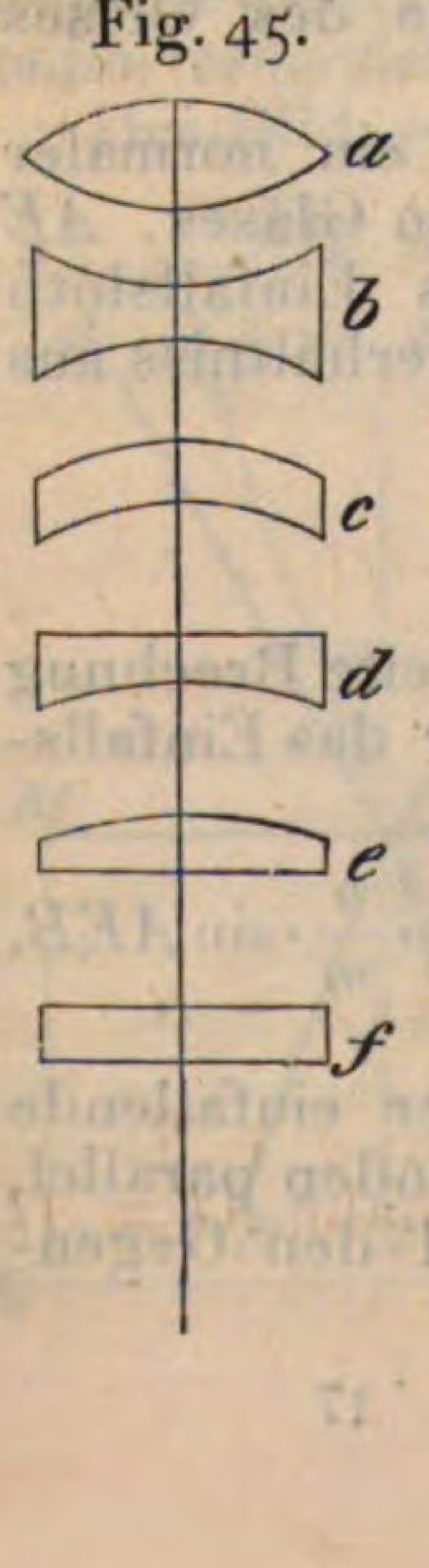
Fig. 44.



§. 62.

In Fig. 44. sei ABC ein normaler Durchschnitt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Prismas, zy ein leuchtendes Object, von dem die Strahlen zd und yh normal auf AC fallen, so gehen diese Strahlen ungebrochen nach d und h. Zieht man nun durch d auf BC das Einfallsloth dk, so ist der Einfallswinkel $kdz = 45°$, sein sinus $= 0{,}707$. Da der Strahl aus Glas in Luft übergeht, so wird der sinus des Brechungswinkels $= \frac{3}{2} \cdot 0{,}707 = 1{,}06$, und deshalb geht nach §. 59. die Brechung in Spiegelung über. Der Strahl ed wird demnach in der Richtung df, welche normal auf AB ist, ungebrochen nach z' reflectirt. Ein Auge in z' wird daher z in d erblicken. Wenn ze gegen AC auch eine kleine Neigung hat, so bleibt der Weg des Lichtstrahls im Wesentlichen derselbe. Auf ähnliche Weise wird y nach y' reflectirt. Es ist daher $z'y'$ das Bild von zy.

Fig. 45.

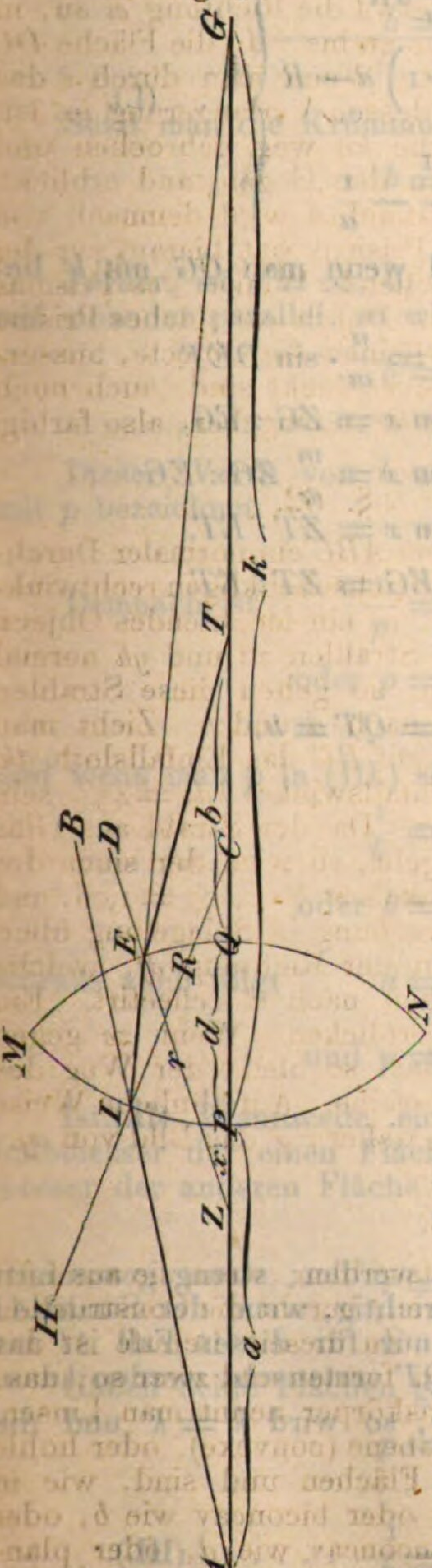


§. 63.

Auf der Brechung der Lichtstrahlen, wenn sie aus Luft in Glas oder umgekehrt übergehen, beruht die Construction der Fernröhre und Microscope. Zu diesem Behufe ist das Glas in einer gewissen Weise zu formen und zwar so, dass es kugelförmig wird. Diese Glaskörper nennt man Linsen. Die Linsen haben entweder erhabene (convexe), oder hohle (concave), oder ebene (plane) Flächen und sind, wie in Fig. 45., theils biconvex wie a, oder biconcav wie b, oder convexconcav wie c, oder planconcav wie d, oder planconvex wie e. Ein Glas wie f wird Planglas genannt.

Der Rand der Linsen muss kreisrund gearbeitet werden und zwar so, dass er allenthalben gleich dick ist, in welchem Falle die Linie ZC (Fig. 46.), welche die Mittelpunkte der beiden Kugeloberflächen mit einander verbindet, die Axe heisst, auch durch die Mitte der Linse geht. Ein auf diese Weise geformtes Glas heisst centrirt; nur centrirte Gläser sind zu optischen Werkzeugen brauchbar. Die Mitte einer Linse ist ihr optischer Mittelpunkt.

Fig. 46.



§. 64.

Die Wirkung einer Linse wird Fig. 46. deutlich machen, wenn man sich in der Axe, etwa in A, einen leuchtenden Punkt denkt, der Strahlen nach der Linse aussendet. Der mit der Axe zusammenfallende Strahl AP geht ungebrochen durch die Linse hindurch, denn er fällt mit dem Einfallslothe zusammen; der Strahl AI aber, der mit dem Einfallslothe IC den Einfallswinkel $AIH = BIC$ macht, wird bei I so gebrochen, dass der Brechungswinkel $CIE < BIC$ ist. Wenn der Strahl IE bei E aus dem Glase tritt, so wird er von dem Lothe DE weg gebrochen, so dass der Brechungswinkel $DET > DEG$ ist. Der Strahl ET trifft diesemnach in T mit der Axe zusammen, in welchem Punkte alle anderen von A aus durch die Linse MN gehenden Strahlen sich vereinigen und hier von A das Bild machen.

Um den Punkt T zu finden, bezeichne man die Krümmungshalbmesser der Linse, IC und ZE mit R und r, die Entfernung des Objectes vom Glase AP mit a, die Entfernung PG, in welcher der Strahl nach seiner ersten Brechung die Axe treffen wird, mit k, den Abstand des Bildes T vom Glase QT mit b, die Dicke des Glases PQ mit d und das Brechungsverhältniss aus Luft in Glas sei $m:n$, so ist

$$\sin GIC = \frac{n}{m} \cdot \sin HIA.$$

Im Dreieck ICG ist

$\sin GIC : \sin ICQ = GC : GI$,

folglich auch

$\sin HIA : \sin ICQ = m \cdot GC : n \cdot GI$.

Im Dreieck ICA ist

$\sin HIA : \sin ICQ = AC : AI$,

folglich

$$m \cdot GC : n \cdot GI = AC : AI.$$

Es ist aber

$$CG = PG - PC = k - R$$

und

$$AC = AP + PC = a + R;$$

ferner ist, wenn $\angle A$ klein, sehr nahe $AI = AP = a$ und $GI = GP = k$,

folglich

$$m(k-R):nk = a+R:a,$$

oder

$$\frac{m}{n}a(k-R) = k(a+R),$$

oder

$$\frac{m}{n}ak - ak - Rk = \frac{m}{n}aR,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{\frac{m}{n}aR}{\left(\frac{m}{n}-1\right)a - R} \\[2ex] \text{oder} \quad \dfrac{\frac{m}{n}}{k} = \dfrac{\frac{m}{n}-1}{R} - \dfrac{1}{a} \end{array}\right\} \ldots \text{(I.)}.$$

Nach (I.) kann k berechnet werden, und wenn man QG mit k' bezeichnet, so ist $k' = k - d$.

Um b zu finden, hat man erst $\sin DEG = \frac{n}{m} \cdot \sin DET$.

Ferner ist im Dreieck ZEG, $\sin DEG : \sin x = ZG : EG$,

folglich $\sin DET : \sin x = \frac{m}{n} ZG : EG$,

und im Dreieck EZT ist, $\sin DET : \sin x = ZT : ET$,

also auch $\frac{m}{n} ZG : EG = ZT : ET$.

Da aber $ZG = ZQ + QG = r + k'$

und $ZT = ZQ + QT = r + b$,

ferner sehr nahe $EG = QG = k'$ und $ET = QT = b$,

so ist $\frac{m}{n}(r+k') : k' = r + b : b$,

oder $k'(r+b) = \frac{m}{n} b (r+k')$,

oder $\frac{m}{n} br + \frac{m}{n} bk' - bk' = rk'$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{folglich } b = \dfrac{rk'}{\left(\frac{m}{n}-1\right)k' + \frac{m}{n}r} \\[2ex] \text{oder } \dfrac{1}{b} = \dfrac{\frac{m}{n}-1}{r} + \dfrac{\frac{m}{n}}{k'} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.)}.$$

Nach dieser Gleichung kann b berechnet werden; streng genommen giebt sie aber nur dann den Werth von b richtig, wenn der Strahl AI mit der Axe sehr nahe zusammenfällt, weil nur für diesen Fall AI mit PA, GI mit PG, EG mit QG und ET mit QT vertauscht werden kann.

Setzt man die Dicke des Glases $d = 0$, so wird $k = k'$ und die Gleichungen (I.) und (II.) geben folgende:

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{m}{n}-1}{r} + \frac{\frac{m}{n}-1}{R} - \frac{1}{a} \ldots\ldots\ldots \text{(III.)}.$$

Diese dioptrische Grundformel enthält alle Bestimmungen, die auf die Brechung der Strahlen, welche durch eine Linse gehen, Bezug haben.

§. 65.

Den Abstand des Bildes von der Linse (b) nennt man auch Vereinigungsweite und sie ist für eine biconvexe Linse nach (III.), wenn man nämlich diese Gleichung in 1 = 1 dividirt,

$$b = \frac{aRr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right) a (R + r) - rR} \ldots (\text{IV.}).$$

Setzt man die Krümmungshalbmesser einander gleich, so wird

$$b = \frac{aR}{2a\left(\frac{m}{n} - 1\right) - R} \ldots\ldots\ldots (\text{V.}).$$

Ferner, ist $a = \infty$, d. h. laufen die auf die Linse fallenden Strahlen mit einander parallel, so wird nach (III.)

$$b = \frac{Rr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)(R + r)} \ldots\ldots\ldots (\text{VI.}).$$

Dieser Werth von b wird auch Brennweite der Linse genannt und mit p bezeichnet.

Demnach ist
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{\frac{m}{n} - 1}{r} + \frac{\frac{m}{n} - 1}{R} \\ \text{oder } p &= \frac{Rr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)(R + r)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\text{VII.}),$$

und wenn man p in (III.) setzt, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{a} \\ \text{oder } b &= \frac{ap}{a - p} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{VIII.}),$$

woraus auch folgt
$$a = \frac{bp}{b - p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{IX.}),$$

$$\text{und } p = \frac{ab}{a + b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{X.}).$$

Ist die Brennweite einer Linse bekannt, sowie der Krümmungshalbmesser der einen Fläche, so ist nach (VII.) der Krümmungshalbmesser der anderen Fläche

$$r = \frac{\left(\frac{m}{n} - 1\right) Rp}{R - \left(\frac{m}{n} - 1\right) p} \ldots\ldots\ldots (\text{XI.}).$$

Haben beide Flächen gleiche Halbmesser, so geht (VII.) über in:

$$p = \frac{r}{2\left(\frac{m}{n} - 1\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{XII.}) \text{ und}$$

$$r = 2p\left(\frac{m}{n} - 1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{XIII.}).$$

§. 66.

Für die planconvexe Linse ist der eine Halbmesser $= \infty$, und ist dies r, so wird (III.) geben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{\frac{m}{n} - 1}{R} - \frac{1}{a} \\ \text{oder } b &= \frac{aR}{\left(\frac{m}{n} - 1\right) a - R} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (XIV.).$$

Wenn $a = \infty$, so ist $b = p$ und die vorstehende Gleichung geht über in:

$$p = \frac{R}{\frac{m}{n} - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (XV.)$$

$$\text{und } R = p\left(\frac{m}{n} - 1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (XVI.).$$

§. 67.

Für eine concav-convexe Linse ist von den beiden Krümmungen die eine negativ zu setzen, und zwar die hohle. Bei der Bestimmung der Vereinigungsweite dieser Linse hat man den Radius r der hohlen Fläche ebenfalls negativ zu setzen und dann wird (III.) übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{\frac{m}{n} - 1}{R} - \frac{\frac{m}{n} - 1}{r} - \frac{1}{a} \\ \text{oder } b &= \frac{aRr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right) a(r - R) - Rr} \end{aligned}\right\} \ldots . (XVII.).$$

Wenn $a = \infty$, so ist $b = p$ und

$$p = \frac{Rr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)(r - R)} \ldots\ldots\ldots (XVIII.).$$

Für convergente Strahlen wird a negativ und dann ist nach (XVII.)

$$b = \frac{aRr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right) a(r - R) + rR} \ldots\ldots (XIX.).$$

§. 68.

Bisher sind die auf eine Linse auffallenden Strahlen parallel oder divergirend gewesen, mit Ausnahme bei (XIX.) §. 67.; fallen sie aber convergirend auf eine Convexlinse, welches nur dann der Fall sein wird, wenn sie von einer anderen Linse kommen, so werden die vorstehenden Gleichungen auch für diesen Fall passen, wenn man darin a negativ nimmt. Gleichung (IV.) geht dann über in:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{aRr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right) aR + \left(\frac{m}{n} - 1\right) ar + Rr} \\ \text{und (VIII.) in:} \quad b &= \frac{ap}{a + p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (XX.).$$

Für die gleichseitige Linse hat man nach (V.)

$$b = \frac{aR}{2a\left(\frac{m}{n} - 1\right) + R} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XXI.)}.$$

Für die planconvexe Linse ergiebt sich aus (XIV.)

$$b = \frac{aR}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)a + R} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XXII.)}.$$

Da für die Linse $R = p\left(\frac{m}{n} - 1\right)$ [§. 66. (XVI.)], so giebt die letzte Gleichung auch

$$b = \frac{ap}{a + p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXIII.)}.$$

Für die Concavconvexlinse gilt (XIX.).

§. 69.

Die Concavlinsen haben keine wirkliche Brennweite wie die Convexlinsen, d. h. keine solche, die hinter der Linse liegt, wenn die einfallenden Strahlen auf ihre Vorderfläche fallen, sondern eine negative, welche ihrer Lage nach jener der Convexlinsen entgegengesetzt ist, indem sie mit den einfallenden Strahlen auf derselben Seite liegt. Die vorhergehenden Gleichungen passen auch für diese Linsen, wenn die Halbmesser der hohlen Flächen in denselben negativ genommen werden.

Für eine biconcave Linse folgt aus (III.)

$$b = \frac{aRr}{-\left(\frac{m}{n} - 1\right)ar - \left(\frac{m}{n} - 1\right)aR - Rr} \quad \ldots \text{(XXIV.)},$$

und die Brennweite

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{Rr}{-\left(\frac{m}{n} - 1\right)(R + r)} \\ \text{oder } -p &= \frac{Rr}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)(R + r)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(XXV.)},$$

also wie in (VII.) für die Convexlinse, nur negativ.

Die Formeln für die Convexlinse, in welchen p vorkommt, gelten daher auch für die Concavlinsen, wenn p negativ genommen wird.

§. 70.

Von dem Fernrohr.

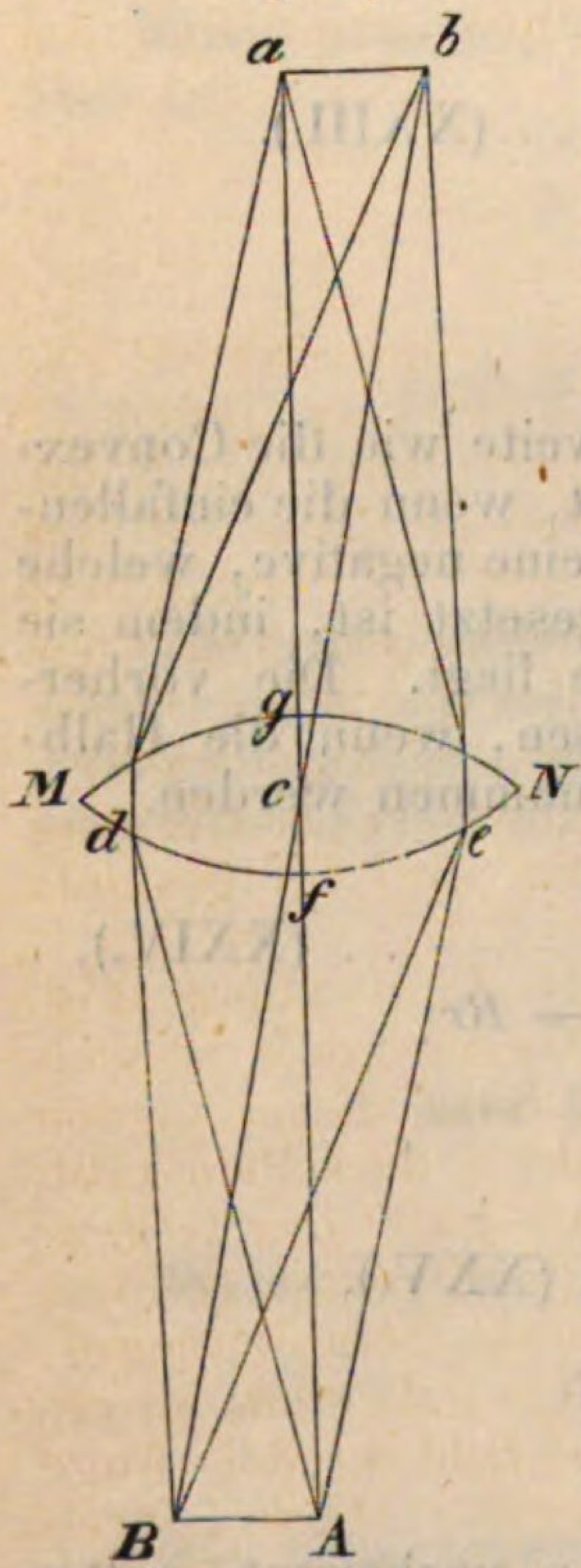
Die Fernröhre theilt man ihrer inneren Einrichtung nach in zwei Hauptklassen, nämlich in dioptrische und catoptrische. Die grossen dioptrischen Fernröhre nennt man Refractoren, die kleineren Tuben und die grossen catoptrische Reflectoren; letztere heissen auch Spiegel-Telescope. Hier wird nur von dem dioptrischen Fernrohr die Rede sein und zwar von dem astronomischen oder Kepler'schen, dem terrestrischen und dem Galilei'schen.

I. Darstellung des Bildes durch die Linse.

Die Strahlen, welche in Fig. 46. von dem Punkte A ausgehen nach allen Theilen der Linse und sich nach der Brechung durch die Linse

wieder alle in dem Punkte *T* vereinigen oder, wenn sie parallel auf die Linse fallen, sich in dem Brennpunkte derselben vereinigen, werden in diesen Vereinigungspunkten das Bild des Gegenstandes, von dem die Strahlen kommen, bilden. Da nun von jedem Punkte des Gegenstandes solche Strahlen ausgehen, die das Bild dieser Punkte hinter der Linse machen, so werden alle diese Punkte zusammen das Bild des Gegenstandes selbst hinter der Linse darstellen. Bei den Verzeichnungen über den Fortgang der Strahlen durch die Linse wird der Gegenstand hier als eine gerade Linie betrachtet, deren äusserster und mittelster Punkt Strahlen aussenden.

Fig. 47.



Es stehe (Fig. 47.) ein Gegenstand *AB* normal auf der Axe *Aa* der Linse *MN* und alle von *A* ausgehenden Strahlen, als *Ae*, *Ad* u. s. w., vereinigen sich in dem Punkte *a*. Der Punkt *b* sendet auch einen Strahlenkegel nach der Linse, welche sich ebenfalls hinter der Linse, jedoch ausserhalb der Axe, in einem Punkte vereinigen. Der durch den Mittelpunkt der Linse *c* gehende Strahl *Bb* wird nicht gebrochen, weil die Flächen der Linse hier als mit einander parallellaufend anzusehen sind, weshalb er auch der Hauptstrahl des Punktes *B* genannt wird. Der Vereinigungspunkt der von *B* kommenden Strahlen liegt in dem Hauptstrahle *Bb* und wird gefunden, wenn man in *a* auf *Aa* eine Normale errichtet, die *Bb* schneidet; dieser Schnittpunkt, der hier *b* ist, ist dann der Vereinigungspunkt und somit in ihm das Bild von *B*.

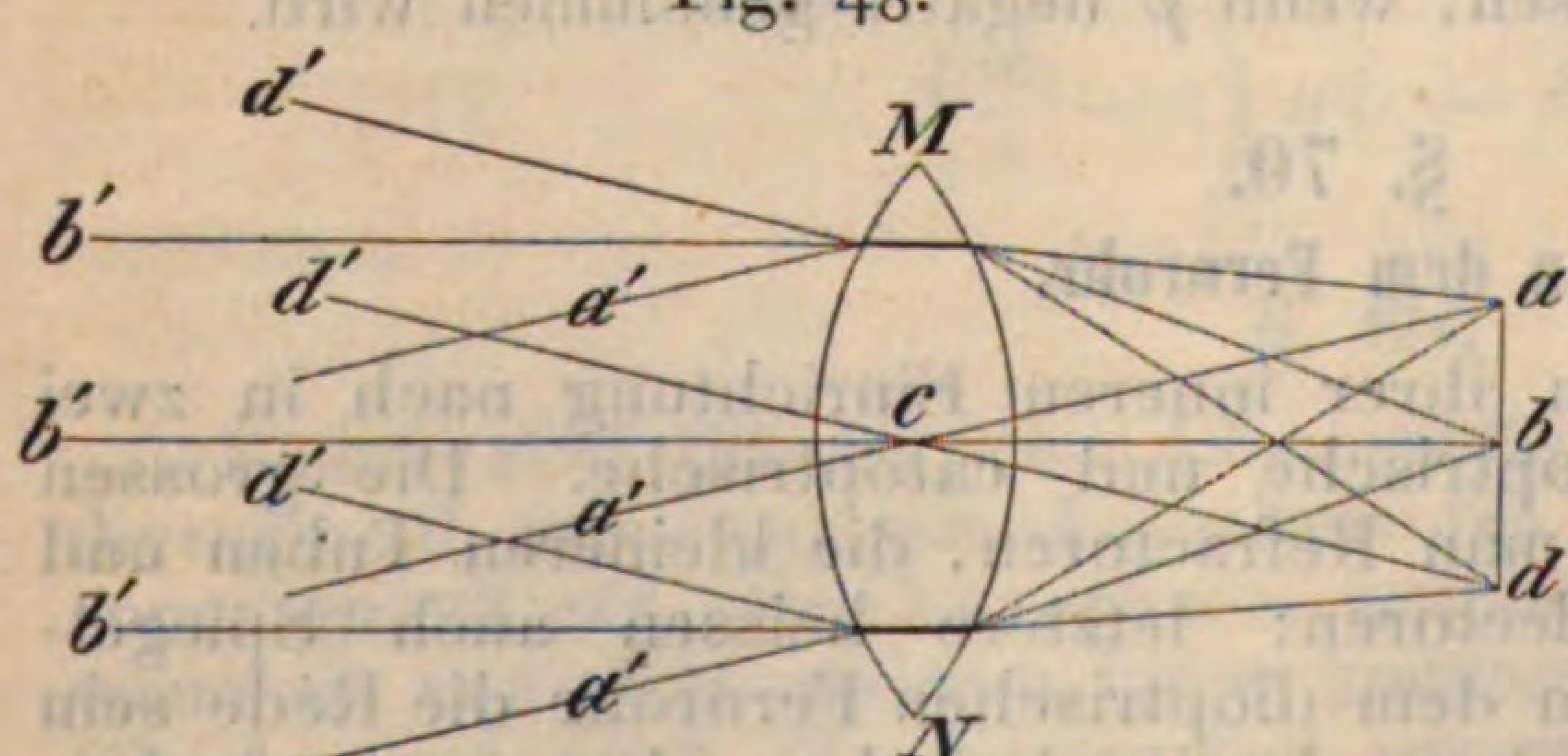
Die Linie *ab* bezeichnet also die Grösse des durch die Linse *MN* dargestellten Bildes des Gegenstandes *AB*.

Da die Dreiecke *AcB* und *acb* ähnlich sind, so ist

$$AB : ab = Ac : ac,$$

d. h. der Gegenstand und das Bild, beide verhalten sich zu einander, wie ihre Entfernungen von dem Mittelpunkte der Linse.

Fig. 48.



In Fig. 48. sind die von dem Gegenstande, sowohl aus der Axe, als auch von den Seiten kommenden Strahlen, wie sie in ihrer Vereinigungsweite das Bild *abd* des Gegenstandes geben, verzeichnet. Die Strahlen *d'cd* und *a'ca* gehen durch die Mitte der Linse *MN* so gut wie ungebrochen hindurch, weil die Tangenten an den Punkten der Linse gedacht, auf welche diese Strahlen fallen, als parallel anzusehen sind; sie bleiben immer in der Mitte der ihnen zugehörigen Strahlenkegel, weshalb sie, wie bereits bemerkt ist, Hauptstrahlen genannt werden. In dieser Figur ist der Gang der parallelen Strahlen dargestellt. Ist nämlich der Gegenstand *d'b'a'* sehr weit entfernt, so dass der Durchmesser der Linse gegen diese Entfer-

nung verschwindend angesehen werden kann, so werden die aus einem Punkte des Gegenstandes nach der Linse gehenden Strahlen mit einander parallel sein.

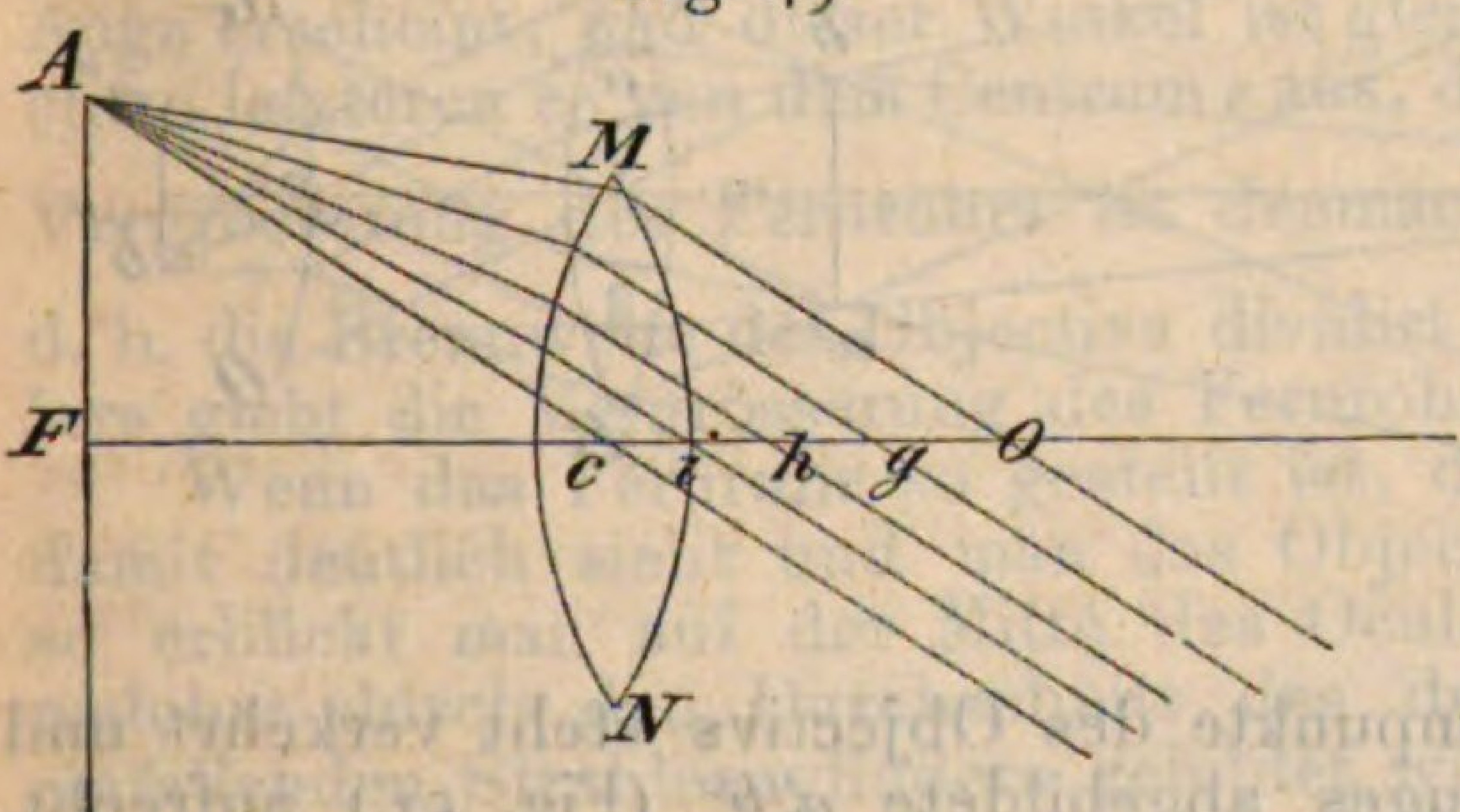
Es sind hier *d'd'd'* die Parallelstrahlen, welche von dem Punkte *d'* des Gegenstandes, *b'b'b'* jene, welche von dem Punkte *b'* und *a'a'a'* diejenigen, welche von dem Punkte *a'* kommen. Wenn, wie hier in diesem Falle, der Gegenstand so weit von der Linse entfernt ist, dass die von einem Punkte desselben auf die Linse fallenden Strahlen mit einander parallel sind, so muss man, um die Grösse des Bildes zu bestimmen, statt der wirklichen Grösse des Gegenstandes *d'b'a'* den Sehwinkel *d'ca'* nehmen. Es sei dieser *n* Secunden, die Vereinigungsweite, in diesem Falle Brennweite der Linse $= p$, so ist, da der Radius $= 206265''$, der Durchmesser des Bildes $ad = \frac{n}{206265} \cdot p$.

II. Das Sehen durch die Linsen.

Wenn ein gesundes Auge von den Punkten des Gegenstandes Parallelstrahlen empfängt, so wirkt dasselbe wie ein Convexglas, indem es diese Strahlen nach dem Durchgange durch die Pupille und durch die Krystalllinse auf der Netzhaut zu einem Bilde vereinigt. Das auf der Netzhaut entstandene Bild des Gegenstandes verursacht die Empfindung des Sehens und der damit zusammenhängenden Erscheinungen. Das Auge misst demnach die scheinbare Grösse des Gegenstandes durch die Grösse des Winkels, welchen die äussersten Strahlen desselben am Auge machen.

Das Auge einer jeden Person sieht in einer gewissen Entfernung kleine Gegenstände am deutlichsten. Diese Entfernung wird für gesunde Augen etwa 8 bis 10 Zoll sein.

Fig. 49.



Wird die Convexlinse (Fig. 49.) dem Gegenstande so weit genähert, dass dieser in den Brennpunkt *F* derselben fällt, in welchem Falle der Gegenstand am deutlichsten gesehen wird, weil die Strahlen parallel in's Auge gelangen, so erscheint das Bild *AF* dem Auge unter demselben Winkel durch das Glas, als wenn es aus dem Mittelpunkte der Linse ohne Glas gesehen würde, denn $\angle\, Moc = \angle\, AcF$.

Der Gegenstand *AF* erscheint also so viel mal durch die Linse vergrössert, als die Entfernung der Linse von dem Gegenstande, in der deutlichen Sehweite von 8 bis 10 Zoll enthalten ist.

Wird die Convexlinse so gehalten, dass der Brennpunkt der Strahlen von entfernten Gegenständen in's Auge fällt, so erhält dieses kein Bild, sondern das Glas zeigt ein verworrenes weisses Licht.

III. Das astronomische Fernrohr und Ocular.

Objectiv und Ocular (Linse dem Gegenstande und Linse dem Auge zugekehrt) bilden die Hauptbestandtheile des Fernrohrs. Durch das Ocular betrachtet man das von dem Objectiv dargestellte Bild des Gegenstandes. Die Oculare sind entweder einfach und bestehen aus einer convexen Linse, oder doppelt, indem sie aus zwei convexen Linsen zusammengesetzt sind. Das einfache aus einer convexen Linse bestehende

Ocular bildet, mit einem Objectiv zusammengestellt, das sogenannte astronomische Fernrohr, an welchem die Eigenschaften eines jeden Fernrohrs nachgewiesen werden können, indem jedes zusammengesetzte Ocular immer durch eine einfache gleiche Linse vorgestellt werden kann, d. i. eine solche, welche mit dem zusammengesetzten Ocular gleiche Brennweite hat.

In den Fig. 50. und 51. seien die beiden Linsen *MN* und *AB* normalstehend auf der Axe der Objectivlinse *MN*, um die Summe ihrer Brennweiten von einander entfernt, in einem Rohre befestigt, so ist dieses das astronomische Fernrohr mit einem einfachen convexen Ocular. Der Weg der Strahlen bei dieser Zusammensetzung ist in den Figuren verzeichnet.

Fig. 50.

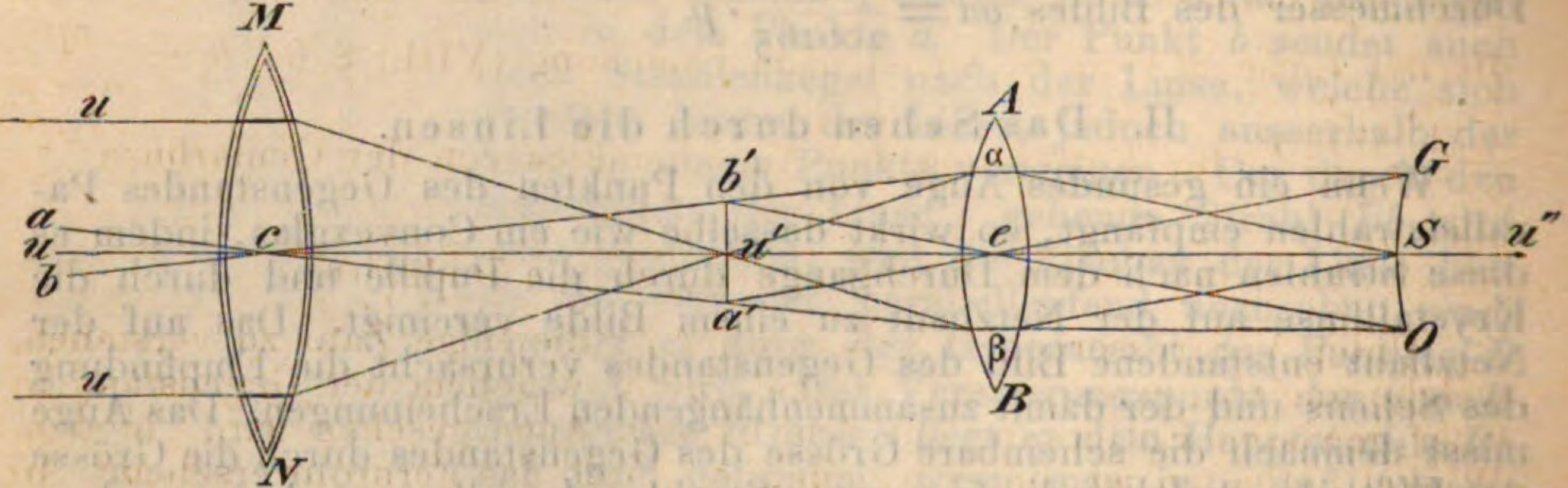
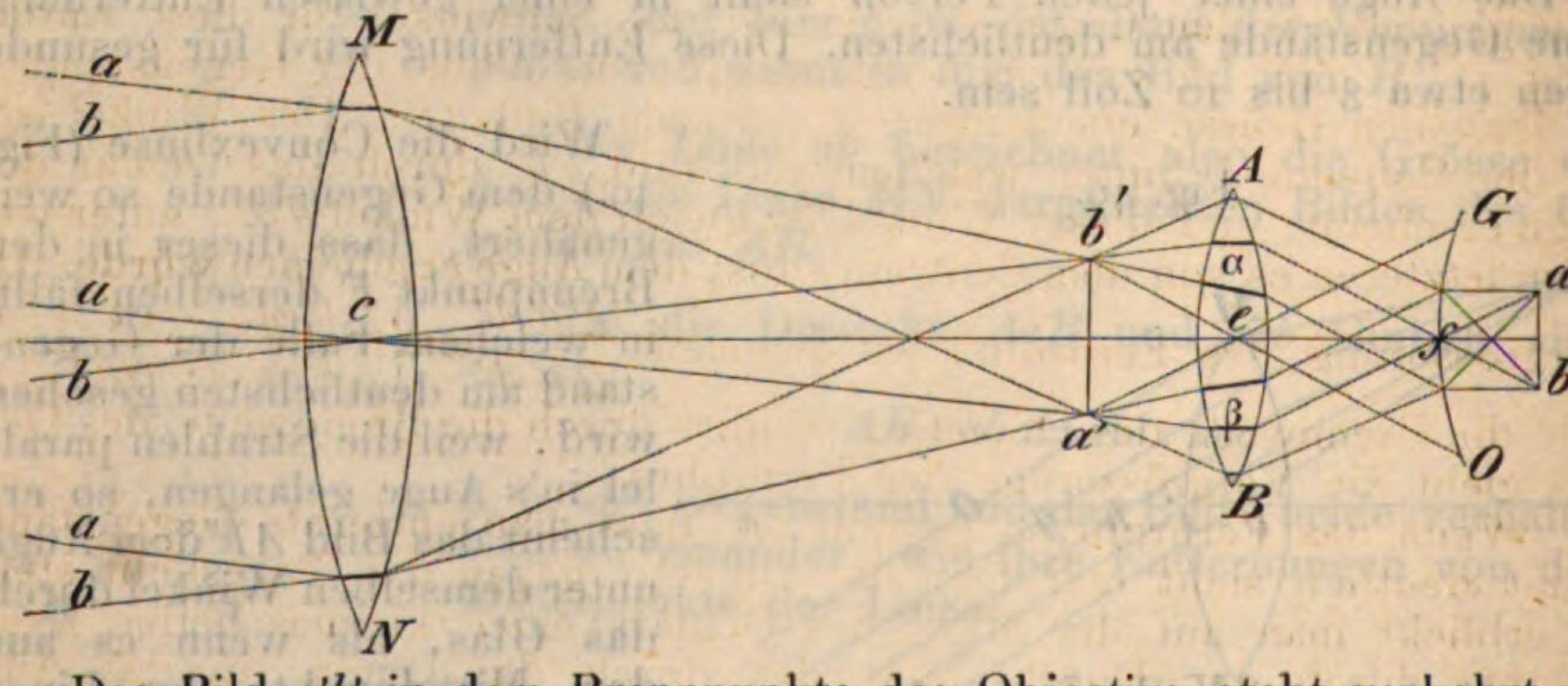


Fig. 51.



Das Bild *a'b'* in dem Brennpunkte des Objectivs steht verkehrt und das auf der Netzhaut des Auges abgebildete *a''b''* (Fig. 51.) aufrecht. Das Auge sieht also den Gegenstand *ab* verkehrt, weil es gewohnt ist, den Ort eines Punktes, von welchem sich Strahlen auf der Netzhaut vereinigen, nach der Richtung dieser Strahlen anzunehmen. Da nämlich die Strahlen, welche den Punkt *a''* bilden, von dem unteren Punkte *a'*, also in der Richtung *Ba''* und jene, welche den Punkt *b''* geben, von dem oberen Punkte *b'*, also in der Richtung *Ab''* zu kommen scheinen, so erhält das Auge dieselbe Empfindung, als wenn es den Gegenstand *ab* ohne Gläser wirklich umgekehrt betrachtete.

Sind die auf das Objectiv fallenden Strahlen nicht parallel, sondern divergirend, indem sie von nahen Gegenständen kommen, so ist die Vereinigungsweite des Objectivs grösser als die Brennweite *cu'* (Fig. 50.) und deshalb muss das Ocular weiter von dem Objectiv entfernt werden, damit der Vereinigungspunkt des Objectivs mit dem Brennpunkte des Oculars zusammenfällt, in welchem Falle nur ein deutliches Sehen möglich ist.

Das Auge muss sich in dem Punkte S befinden, wenn dessen Pupille die Strahlen auffangen soll, welche von den Gläsern durchgelassen, sich hier vereinigen; denn die Fig. 51. zeigt, dass, wenn das Auge dem Ocular näher liegt, die äusseren Strahlen der von den äusseren Punkten des Gegenstandes kommenden Strahlen-Cylinder nicht mehr in die Pupille eintreten können, und dass dasselbe stattfindet, wenn das Auge weiter von demselben entfernt ist. Der Verlust dieser Strahlen vermindert das Gesichtsfeld und auch die Helligkeit des Gegenstandes. Der Augenpunkt S kann auf folgende Weise gefunden werden. Der Punkt c des Objectivs (Fig. 50.), in welchem die Hauptstrahlen sich durchschneiden, kann als der leuchtende Punkt für die auf die Ocularlinse AB fallenden Strahlen angesehen werden, für welche die Vereinigungsweite Se ist. Setzt man nun $ce = a$, $Se = b$, die Brennweite der Linse $AB = p$ und die der Linse $MN = P$, so ist nach Gleichung (VIII.) §. 65. $b = \frac{ap}{a-p}$ $= \frac{(P+p)\,p}{P}$, die Entfernung des Augenpunktes von der Ocularlinse.

IV Die Vergrösserung des Fernrohrs.

Unter Vergrösserung des Fernrohrs ist diejenige Zahl zu verstehen, welche angiebt, wie oft der Winkel, unter welchem der Gegenstand in einer gewissen Entfernung mit dem blossen Auge gesehen wird, in dem Winkel enthalten ist, unter welchem er durch das Fernrohr erscheint. In Fig. 50. ist der Winkel, unter welchem das Auge aus der Mitte des Objectivglases c den Gegenstand sieht, der Sehwinkel für diese Entfernung $acb = a'cb'$, d. h. dem Auge würde von c aus der Gegenstand ab in derselben Grösse erscheinen, als dessen Bild $a'b'$. Der Winkel $\alpha S \beta$ ist der Sehwinkel, unter welchem das Bild $a'b'$ durch das Ocular dem Auge erscheint, und dieser Winkel ist gleich dem Winkel $b'ea'$, unter welchem letzteren es von dem Centrum e aus, dem Auge erscheinen würde. Die Vergrösserung des Fernrohrs ist demnach $\frac{\angle\, a'eb'}{\angle\, a'cb'} = \frac{\angle\, b'eu'}{\angle\, b'cu'} = \frac{cu'}{eu'} = \frac{P}{p}$, d. h. die Brennweite des Objectivs dividirt durch die Brennweite des Oculars giebt die Vergrösserung des Fernrohrs.

Wenn das Fernrohr so gestellt ist, dass man entfernte Gegenstände damit deutlich sieht und man das Objectiv gegen das Tageslicht stellt, so erblickt man auf der Mitte des Oculars einen kleinen hellen Kreis, welcher durch den Durchschnitt des durch das Ocular in das Auge einfallenden Strahlencylinders gebildet wird und eigentlich das Bild ist, welches das Ocular von dem Objectiv macht. Die Entfernung dieses Bildes von der einfachen Ocularlinse ist nach (VIII.) in §. 65. $= \frac{(P+p)\,p}{P}$, worin P die Brennweite des Objectivs und p die des Oculars bezeichnet.

Bezeichnet man den Durchmesser der Einfassung des Objectivs mit D, den ihres Bildes hinter dem Ocular mit d, ihre Abstände von dem Ocular mit A und a, so ist

$$D : d = A : a;$$

da aber $A = P + p$ und $a = \frac{(P+p)\,p}{P}$,

so ist auch $A : a = P : p$,

folglich $D : d = P : p$, oder $\frac{D}{d} = \frac{P}{p}$.

Die Vergrösserung des Fernrohrs wird also auch erhalten, wenn man den Durchmesser der Einfassung des Objectivs mit dem des Licht-

kreises auf dem Ocular dividirt, vorausgesetzt, dass das Fernrohr zum deutlichen Sehen entfernter Objecte gestellt ist. Die Genauigkeit dieser Methode hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher der Durchmesser des Lichtkreises auf dem Ocular gemessen wird, zu welcher Messung Ramsden's Dynameter besonders geeignet ist. Der Lichtkreis entsteht bei allen dioptrischen Fernröhren, mit Ausnahme des Holländischen. Die Bestimmung der Vergrösserung des Fernrohrs nach dieser Methode ist besonders dann vorzunehmen, wenn das Ocular ein doppeltes ist.

Das Dynameter von Ramsden besteht aus drei kleinen Röhren, von welchen die erste eine convexe Linse von ungefähr 8 Linien Brennweite enthält und sich in die zweite hineinschieben lässt, bis man die darin befindliche Scale auf einer durchsichtigen Scheibe von Horn oder Glas, die in Hunderttheile von Zollen getheilt ist, deutlich sieht. Die zweite Röhre lässt sich wieder in einer dritten, welche an die Ocularröhre gesetzt wird, so lange verschieben, bis man die Scale und das helle Bild von der Oeffnung des Objectivs zugleich deutlich sieht. Man zählt nun die Anzahl Theile der Scale, welche auf den Durchmesser des Bildes gehen, drückt den Durchmesser der Einfassung des Objectivs in Hunderttheile desselben Zolles aus und dividirt die Anzahl der letzteren durch die der ersteren, so hat man die Vergrösserung.

Bei Fernröhren von geringer Vergrösserung kann diese auch so bestimmt werden. Man stelle das Ocular so, dass man die Ziegel eines Daches durch das Fernrohr deutlich sieht, betrachte nun durch dasselbe mit dem einen Auge die obere Reihe von Ziegeln, mit dem anderen blossen Auge dieselben Ziegel, und bewege das Fernrohr so lange, bis das Ende eines Ziegels, den man durch das Fernrohr sieht, auf dasselbe Ende des mit blossem Auge gesehenen Ziegels fällt. Nun zähle man die Anzahl der mit blossem Auge gesehenen Ziegel, die von einem oder mehreren durch das Fernrohr gesehenen bedeckt werden, so ist die Vergrösserung des Fernrohrs gleich der Summe der ersteren, dividirt durch die Summe der letzteren. Diese Vergrösserung gilt aber nur für Gegenstände, welche sich in gleicher Entfernung wie die beobachteten Ziegel befinden. Ferner ist hierbei vorausgesetzt, dass die Ziegel von gleicher Grösse sind.

Das folgende Verfahren ist von dieser Einschränkung frei.

Betrachtet man, nachdem ein farbiges Glas vor das Ocular des Fernrohrs gelegt ist, durch dieses die Sonne mit dem einen Auge, sieht man gleichzeitig mit dem anderen Auge nach einer in bekannter Entfernung von dem Auge zu diesem Behufe aufgestellten Scale und beobachtet, wie viel Theile der Scale von dem vergrösserten Sonnenbilde bedeckt werden, so kann man aus diesen Theilen und der Entfernung der Scale von dem Auge den Winkel berechnen, unter welchem das vergrösserte Sonnenbild dem Auge erscheint, welcher, durch den scheinbaren Durchmesser der Sonne, den man in den astronomischen Tafeln findet, dividirt, die Vergrösserung des Fernrohrs giebt.

Kleine Vergrösserungen bestimmt man auch so. Nachdem das Fernrohr zum deutlichen Sehen entfernter Gegenstände gestellt ist, bringe man das Objectiv vor das rechte Auge und sehe durch das so umgekehrte Fernrohr, im Zimmer z. B., nach einer entfernten Fensterscheibe, die verkleinert erscheinen wird, zugleich mit dem linken Auge nach derselben Fensterscheibe, und ermittele dabei, wie oft die Höhe jener in der Höhe letzterer enthalten ist, so hat man die Vergrösserung. Eigentlich ist dies die Verkleinerung. So viel Mal aber wie das Fernrohr verkleinert, wenn man das Objectiv als Ocular benutzt, muss es auch vergrössern, wenn man wie gewöhnlich damit sieht. Das Sehen mit beiden Augen zugleich erfordert etwas Uebung bei dieser Untersuchung.

V. Von der Oeffnung der Ocularlinse, dem Gesichtsfelde des Fernrohrs und der Helligkeit des Bildes.

Die Oeffnung der Ocularlinse wird so beschaffen sein müssen, dass sie die von den äussersten Punkten kommenden Hauptstrahlen $a\beta$ und $b\alpha$ (Fig. 50.) noch auffängt. Die halbe Oeffnung der Ocularlinse αe, d. i. die Tangente des Winkels $\alpha ce = \varphi$, ist gleich $(P+p) \cdot \frac{\varphi}{3438'}$, wenn φ in Minuten ausgedrückt.

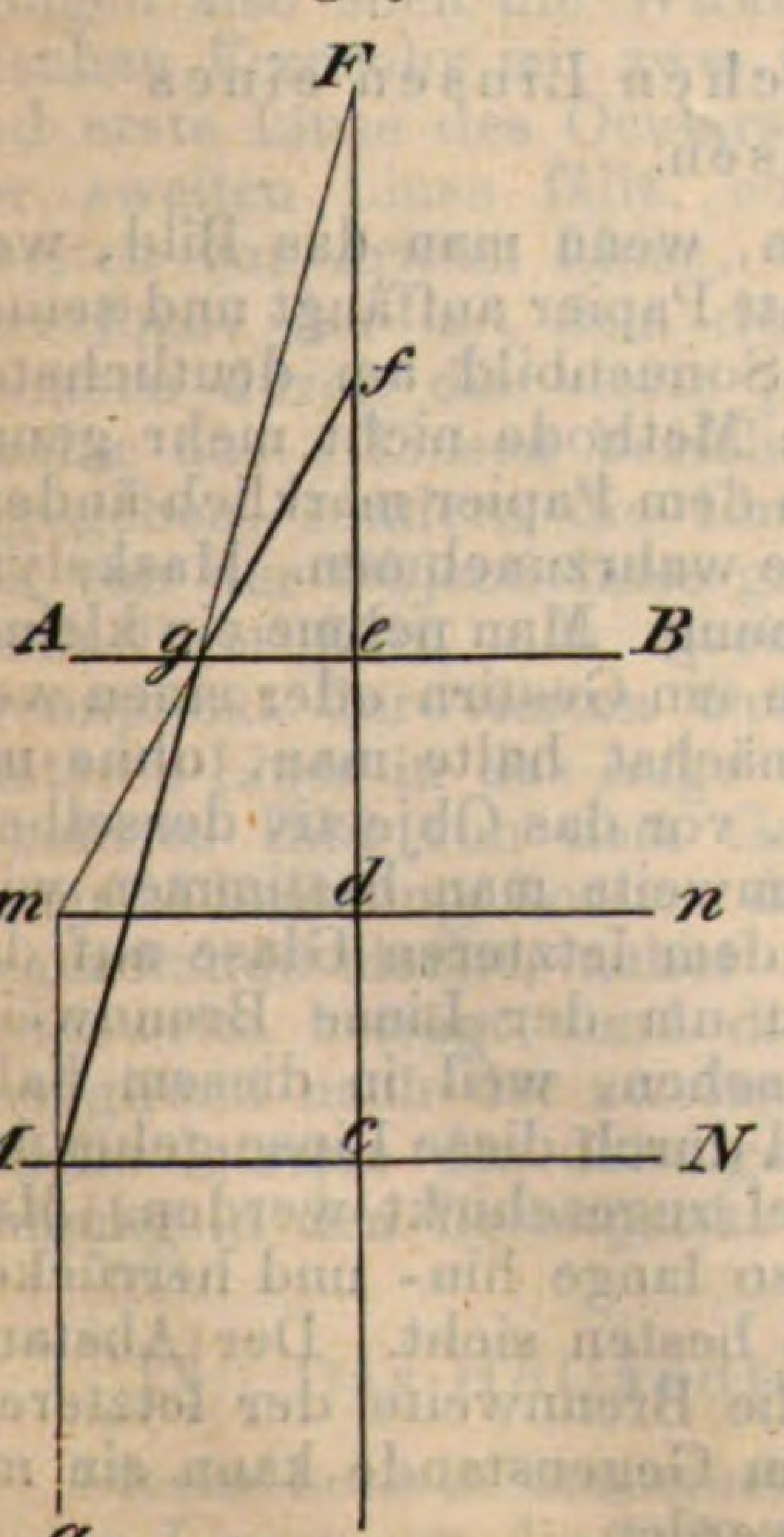
Das Gesichtsfeld oder der Raum, welcher durch das Fernrohr auf einmal übersehen wird, wird durch den Winkel bestimmt, welchen die von den beiden äussersten Punkten des Gegenstandes kommenden und durch den Mittelpunkt des Objectivs gehenden Hauptstrahlen mit einander machen, d. i. $\angle acb$ (Fig. 50.). Es ist aber dieser Winkel

$$2\varphi = \frac{2\alpha e}{P+p} \cdot 3438';$$

diesemnach ist das Gesichtsfeld des Fernrohrs nur von der Oeffnung (dem Durchmesser) der Ocularlinse abhängig, wenn die Brennweiten dieselben bleiben. Die Oeffnung jeder Linse darf nicht mehr betragen als $\frac{5}{10}$ oder höchstens $\frac{6}{10}$ des kleinsten Radius ihrer Flächen.

Die Helligkeit des Bildes hängt bei gleicher Vergrösserung von der Oeffnung des Objectivs ab. Die Helligkeit der Bilder wird bei gleicher Vergrösserung und gleicher Oeffnung des Oculars, aber bei ungleicher Oeffnung des Objectivs, sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Durchmesser des Objectivs. Bei gleicher Oeffnung des Objectivs wird dagegen die Helligkeit des Bildes im Fernrohr mit der Vergrösserung abnehmen, und zwar in dem Verhältnisse der vergrösserten Fläche, folglich in dem Verhältnisse des Quadrats der Vergrösserungszahl m, da diese den Durchmesser der vergrösserten Fläche ausdrückt; denn je mehr der Gegenstand vergrössert wird, desto mehr wird das von ihm ausgehende Licht auf eine grössere Fläche vertheilt, und desto schwächer wird daher das Licht in jedem einzelnen Punkte.

Fig. 52.



VI. Das Doppelocular.

Das aus zwei planconvexen Linsen bestehende achromatische Ocular wird für astronomische Fernröhre angewandt und stellt, wie die einfache Linse, den Gegenstand verkehrt dar. Um die Eigenschaften dieses Oculars kennen zu lernen, kommt es auf die Bestimmung des gemeinschaftlichen Brennpunktes beider Linsen an. In Fig. 52. seien die Linsen MN und AB die beiden des Doppeloculars und so gestellt, dass die zweite AB zwischen der ersten MN und deren Brennpunkt sich befindet. aM sei ein mit der Axe cF parallel einfallender Strahl, welcher durch die erste Linse MN von M nach g, oder in der Richtung MF und von der zweiten AB nach dem Punkte f in der Axe gebrochen wird, so ist $ef = x$ die gemeinschaftliche Brennweite von der Linse AB gerechnet.

VIII. Das terrestrische Fernrohr.

Fig. 52. a.

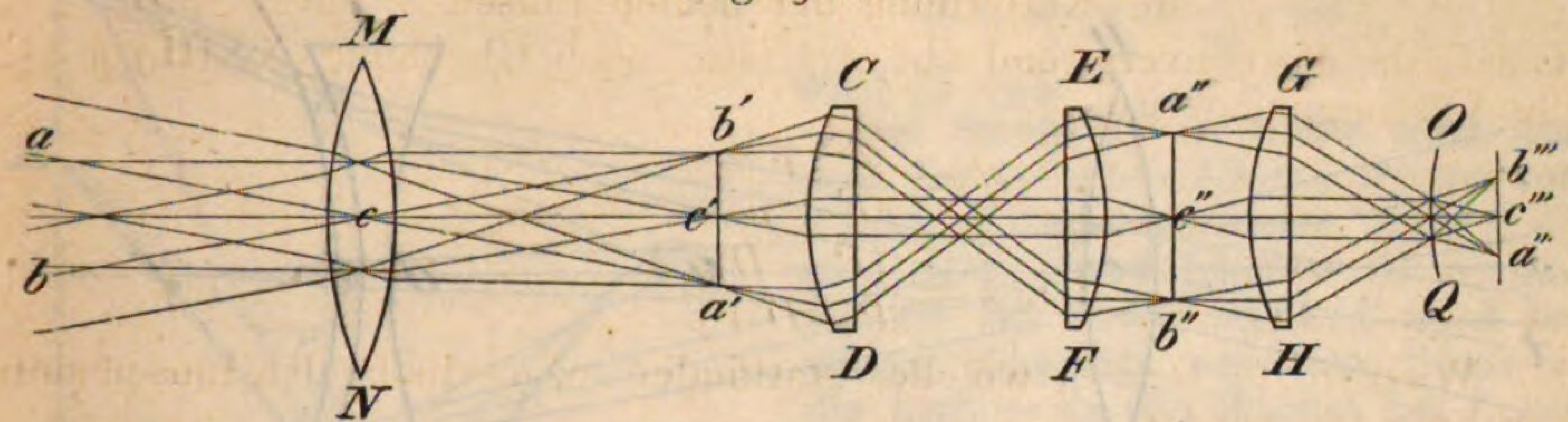


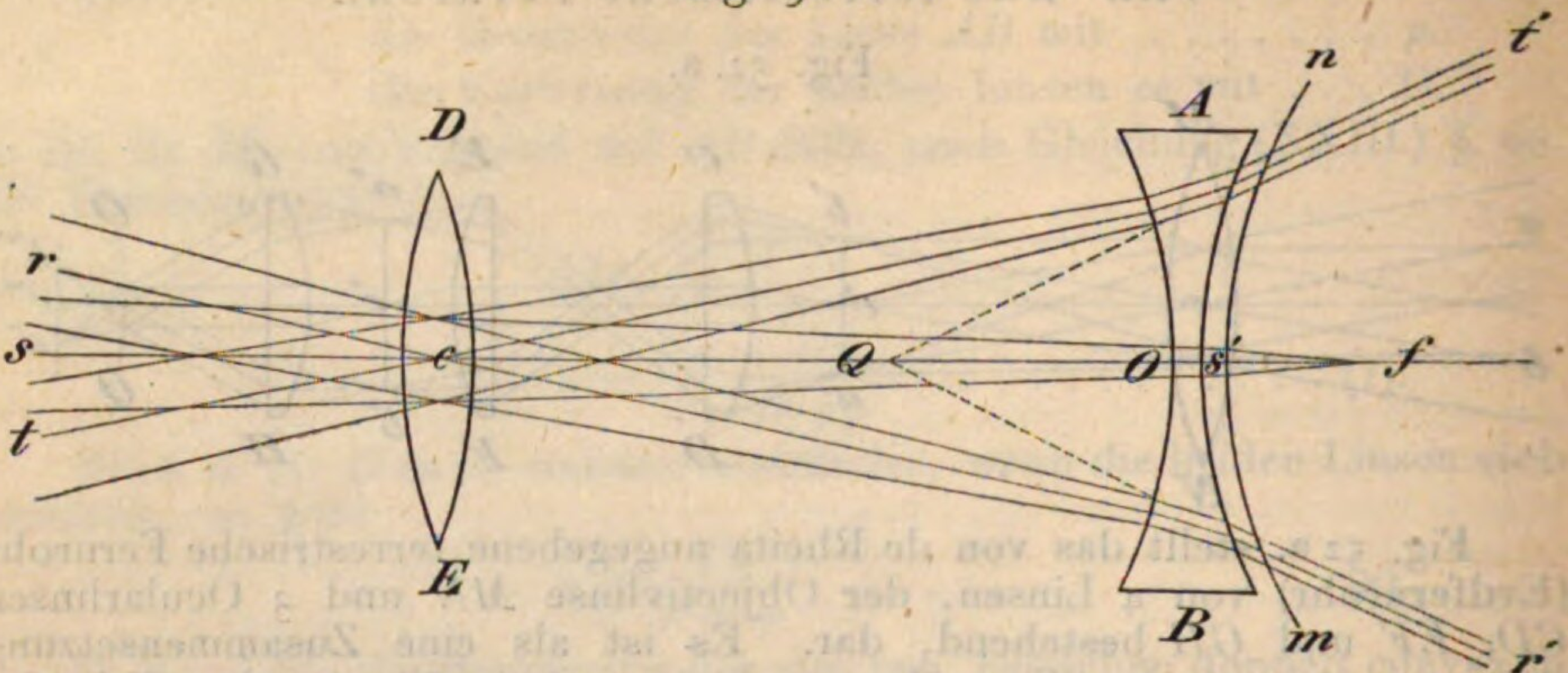
Fig. 52 a. stellt das von de Rheita angegebene terrestrische Fernrohr (Erdfernrohr) von 4 Linsen, der Objectivlinse *MN* und 3 Ocularlinsen *CD*, *EF* und *GH* bestehend, dar. Es ist als eine Zusammensetzung zweier astronomischer Fernröhre anzusehen, denn die von der Objectivlinse *MN* aufgefangenen Strahlen des Gegenstandes *ab* bringen in *a'b'* ein verkehrt stehendes Bild hervor, die von diesem ausgehenden Strahlen werden dann durch die Linse *CD* — deren gemeinschaftlicher Brennpunkt mit *MN* in *c'* zusammenfällt — so gebrochen, dass sie nach dem Durchgange parallel die Linse *EF* treffen, hinter welcher das aufrechtstehende Bild *a''b''* des Gegenstandes *ab* entsteht. Von hier gehen die Lichtstrahlen nach der Ocularlinse *GH* und nach dem Durchgange durch dieselbe parallel zum Auge, dessen Pupille *OQ* vorstellt, und machen auf der Netzhaut das umgekehrte Bild *a'''b'''* des Gegenstandes, wenn *c''* der gemeinschaftliche Brennpunkt der Linsen *EF* und *GH* ist.

Die Erdfernröhre haben gewöhnlich Oculare von 4 Linsen, von welchen die erste zwischen die Objectivlinse und das von dieser hervorgebrachte Bild zu stehen kommt; das Bild, was diese beiden Linsen von dem Objecte machen, ist ein umgekehrtes und muss in den Brennpunkt der zweiten Ocularlinse fallen. Die beiden ersten Linsen des Oculars bringen also eben die Wirkung hervor, wie das Ocular in dem astronomischen Fernrohr mit zwei Linsen. Wenn nun das durch die Objectiv- und erste Linse des Oculars dargestellte Bild genau in den Brennpunkt der zweiten Linse fällt, so gehen die Lichtstrahlen parallel von der zweiten zur dritten Linse, vereinigen sich hinter dieser im Brennpunkte derselben, der mit dem der vierten Linse zusammenfallen muss, und kommen durch die vierte parallel in's Auge. Nicht immer ist in dem Ocular aus 4 Linsen bestehend, der Gang der Lichtstrahlen wie hier angegeben, sondern die Linsen desselben können so placirt sein, dass das von der Objectivlinse gemachte Bild des Gegenstandes vor die erste Ocularlinse fällt, das zweite Bild hinter die dritte und zwar in den Brennpunkt der vierten Ocularlinse, in welchem Falle die aus dieser letzteren Linse in das Auge tretenden Strahlen parallel sind und ein umgekehrtes Bild von dem Gegenstande auf der Netzhaut machen. Bei dieser Anordnung kommt das Bild, welches die Objectivlinse von dem Gegenstande macht, näher an die erste Ocularlinse zu stehen als deren Brennweite beträgt, und die Strahlen gehen sonach von dieser Linse divergirend nach der zweiten, von dieser convergirend nach der dritten, welche letztere die durchgehenden Strahlen so bricht, dass ihre Vereinigung in den Brennpunkt der vierten Linse fällt.

IX. Das Holländische oder Galileische Fernrohr.

Dieses besteht aus einer Biconvex- und einer Biconcavlinse, welche beiden Linsen um die Differenz ihrer Brennweiten von einander entfernt

Fig. 52 b.



sind. Den Gang der Strahlen in diesem Fernrohr stellt Fig. 52 b. dar, nämlich die mit der Axe parallel oder nahe so auf das Objectiv fallenden Strahlen aus dem Mittelpunkte des entfernten Gegenstandes *s*, sowie auch die von den äusseren Punkten *r* und *t* desselben kommenden Parallelstrahlen. Die Brennweite des Objects *DE* ist *cf*. Das Ocular *AB* ist in diesem Fernrohr so gestellt, dass der Brennpunkt der negativen Brennweite mit dem Brennpunkte des Objectivs *f* zusammenfällt, also wie bereits angegeben, die Entfernung der beiden Linsen gleich der Differenz ihrer Brennweiten ist.

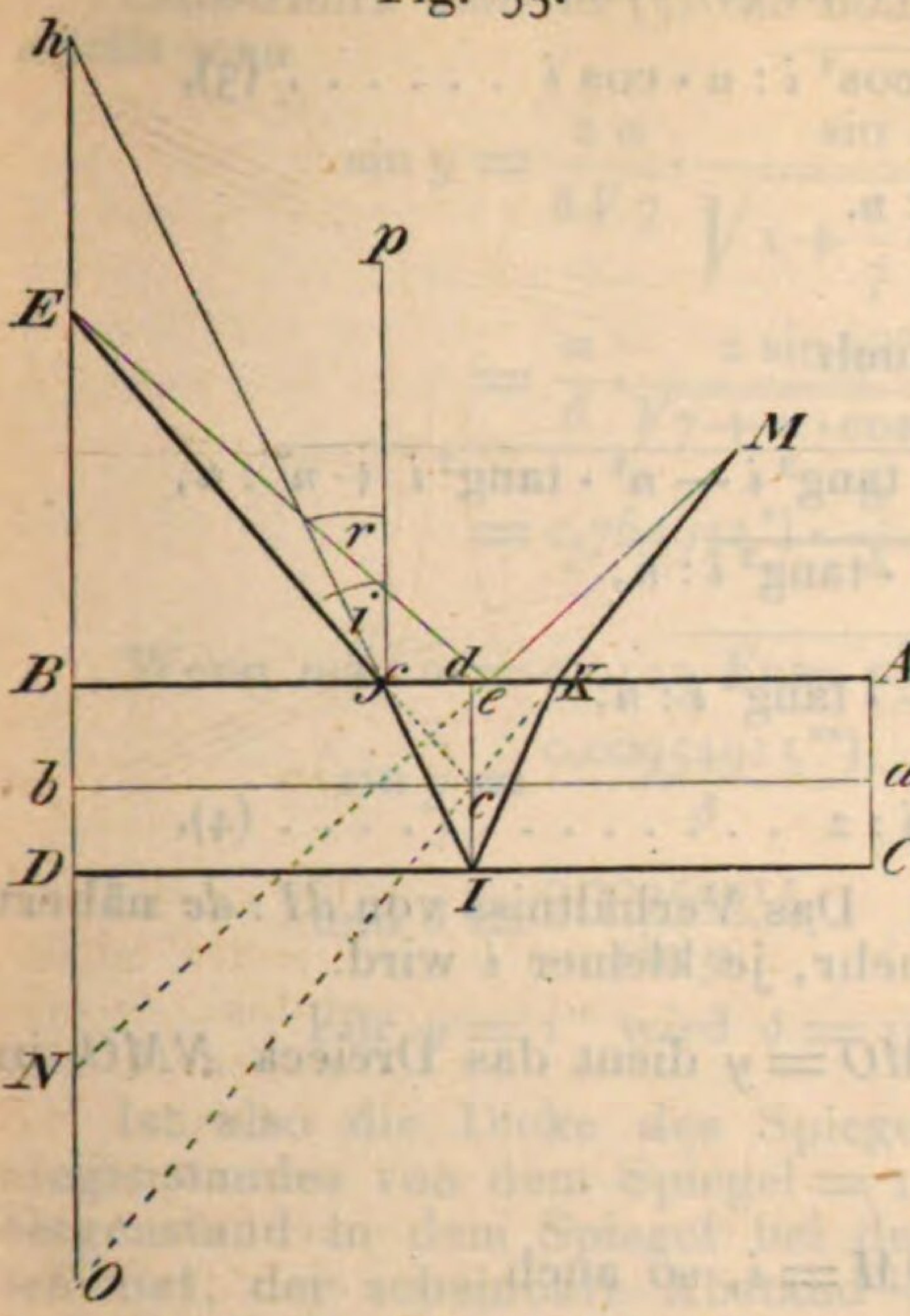
Die Parallelstrahlen von den Punkten des Objectes *t*, *s*, *r* fallen nach ihrem Durchgange durch das Objectiv convergirend auf die Hohllinse, und werden von dieser von der Axe hinweg in die parallele Lage *t'*, *s'*, *r'* gebrochen. Die aus dem Mittelpunkte *O* kommenden Strahlen *s'* gehen parallel mit der Axe fort. Wenn nun *mn* die Oeffnung des Auges bezeichnet, so werden sowohl die der Axe parallelen als auch die äusseren mit der Axe divergenten Strahlen *t'* und *r'* in die Pupille treten, und durch die weitere Brechung auf der Netzhaut des Auges das Bild so darstellen, dass der Gegenstand aufrecht gesehen wird, weil die Strahlen, welche den unteren Punkt des Bildes auf der Netzhaut darstellen, von dem über der Axe liegenden Punkte des Gegenstandes kommen. Das Bild wird unter dem Winkel *t'Qr'* gesehen, da die divergenten Strahlen aus dem Punkte *Q* in das Auge zu gelangen scheinen, während der Gegenstand ohne Gläser unter dem Winkel *tcr* erscheinen würde. Der Quotient beider Winkel giebt die Vergrösserung, folglich wird diese hier ebenfalls wie bei dem astronomischen Fernrohr durch den Quotienten der respectiven Brennweiten ausgedrückt.

§. 71.

Ein ebener Spiegel, der aus einer mit Zinnfolie belegten Glasplatte besteht, dessen beide Oberflächen genau eben und parallel sind, macht von nahen Gegenständen zwei Bilder.

Es sei in Fig. 53. *ABCD* ein Durchschnitt eines gläsernen Spiegels, normal auf dessen belegte und unbelegte Fläche — welche letzteren genau eben und mit einander parallel sind —, *E* ein Object, welches von *M* aus in dem Spiegel gesehen wird. Der von *E* auf den Spiegel fallende Lichtstrahl *Ef* wird nach *I* so gebrochen, dass, wenn *pf* das Einfallsloth und *fh* die Rückwärtsverlängerung von *fI* ist,

Fig. 53.



$$\sin pfh = \frac{n}{m} \cdot \sin pfE,$$

$$\text{d. i. } \sin r = \frac{n}{m} \cdot \sin i$$

wird (§. 59.).

Der Strahl fI im Glase wird nun von der belegten Fläche DC so von I nach K zurückgeworfen, dass $\angle dIf = \angle dIK$, wenn nämlich dI normal auf DC ist. Der Strahl IK wird bei seinem Austritte aus dem Glase in die Luft — da die Winkel bei f und K in dem Dreieck KIf einander gleich sind — so gebrochen, dass $\angle AKM = \angle BfE$ wird. Die Verlängerungen von Ef und MK werden sich dann auch in der Normale Id in c schneiden, und wenn man durch diesen Punkt c die Gerade ab parallel mit AB zieht, so ist $\angle acM = \angle bcE$, d. h. der Lichtstrahl gelangt so in das Auge in M, als wenn er von der Spiegelebene ab, die normal auf dc steht, ungebrochen zurückgeworfen wäre.

Wird nun hO parallel mit den Einfallslothen pf und dI gezogen, $BN = BE$ gemacht, demnächst die Gerade MN gezogen — welche die Fläche AB in e schneidet — und die Gerade Ee, so wird $\angle EeB = \angle AeM$ sein und das Auge in M zwei Bilder von E sehen, nämlich das eine wegen der Zurückwerfung von der vorderen Fläche AB nach der Richtung MN, das andere wegen der Zurückwerfung von der hinteren Fläche DC nach der Richtung MO. Die beiden Bilder von E (in N und O) scheinen also dem Auge in M um den Winkel NMO von einander abzustehen. Dieser Winkel wird um so kleiner, je grösser Ef ist. Denn es ist $BE = BN$, $bE = bO$, also $NO = BO - BN = bO + Bb - BN = bE + bB - BE = bE + bB - (bE - bB) = 2 \cdot bB = 2 \cdot cd$. Es wird für einerlei Einfallswinkel NO eine beständige Grösse sein, und der Winkel NMO um so kleiner werden, je grösser MN wird.

Der Punkt c im Glase, in welchem die Verlängerungen des einfallenden Strahles Ef und des zurückgeworfenen MK einander schneiden, kann so bestimmt werden.

Im $\Delta\, dfc$ ist $dc = fc \cdot \cos i$, weil $\angle dcf = i$, und im $\Delta\, dIf$ ist $dI = fI \cdot \cos r$, weil $\angle dIf = r$, daher

$$dI : dc = fI \cdot \cos r : fc \cdot \cos i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Da aber in diesen Dreiecken $fI = \dfrac{df}{\sin r}$ und $fc = \dfrac{df}{\sin i}$,

so auch $\quad fI : fc = \sin i : \sin r = m : n$,

folglich $\quad dI : dc = m \cdot \cos r : n \cdot \cos i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$

Da $\sin r = \dfrac{n}{m} \cdot \sin i$, so ist $\cos r = \sqrt{1 - \left(\dfrac{n}{m}\right)^2 \cdot \sin^2 i}$,

$$= \frac{1}{m} \sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cdot \cos^2 i},$$

und wenn man diesen Werth für cos r in (2) setzt, so hat man

$$dI : dc = \sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cdot \cos^2 i} : n \cdot \cos i \;\ldots\ldots\; (3),$$

oder $$dI : dc = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{\cos^2 i} + n^2} : n.$$

Da $\cos^2 i = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 i}$, so auch

$$dI : dc = \sqrt{m^2 - n^2 + m^2 \cdot \operatorname{tang}^2 i - n^2 \cdot \operatorname{tang}^2 i + n^2} : n,$$

$$= \sqrt{m^2 + (m^2 - n^2) \cdot \operatorname{tang}^2 i} : n,$$

$$= m \sqrt{1 + \frac{m^2 - n^2}{m^2} \cdot \operatorname{tang}^2 i} : n,$$

$$= 3 \sqrt{1 + \tfrac{5}{9} \cdot \operatorname{tang}^2 i} : 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4),$$

wenn $m = 3$ und $n = 2$ gesetzt wird. Das Verhältniss von $dI : dc$ nähert sich hiernach dem von $3 : 2$ um so mehr, je kleiner i wird.

Zur Bestimmung des Winkels $NMO = y$ dient das Dreieck NMO, in welchem die Proportion stattfindet:

$$NO : MN = \sin y : \sin NOM,$$

oder da $NO = 2 \cdot cd$ und $\angle NOM = i$, so auch

$$2 \cdot cd : MN = \sin y : \sin i,$$

oder $$\sin y = \frac{2 \cdot cd}{MN} \cdot \sin i.$$

Nach (3) ist $2 \cdot cd = \frac{2 \cdot dI \cdot n \cdot \cos i}{\sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cdot \cos^2 i}}$,

folglich, wenn man der Kürze wegen $dI = \alpha$ und $MN = \delta$ setzt,

$$\sin y = \frac{2\, \alpha\, n \cdot \sin i \cdot \cos i}{\delta \sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cdot \cos^2 i}}.$$

Es ist aber

$$2 \sin i \cdot \cos i = \sin 2\, i \text{ und } \cos^2 i = \frac{\cos 2\, i + 1}{2},$$

folglich $$\sin y = \frac{\alpha\, n \cdot \sin 2\, i}{\delta \sqrt{m^2 - n^2 + \frac{n^2}{2} \cdot \cos 2\, i + \frac{n^2}{2}}},$$

oder $$\sin y = \frac{\alpha\, n}{\delta \sqrt{\frac{2\, m^2 - n^2}{2}}} \cdot \frac{\sin 2\, i}{\sqrt{1 + \frac{n^2}{2 m^2 - n^2} \cdot \cos 2\, i}} \;.\; (5),$$

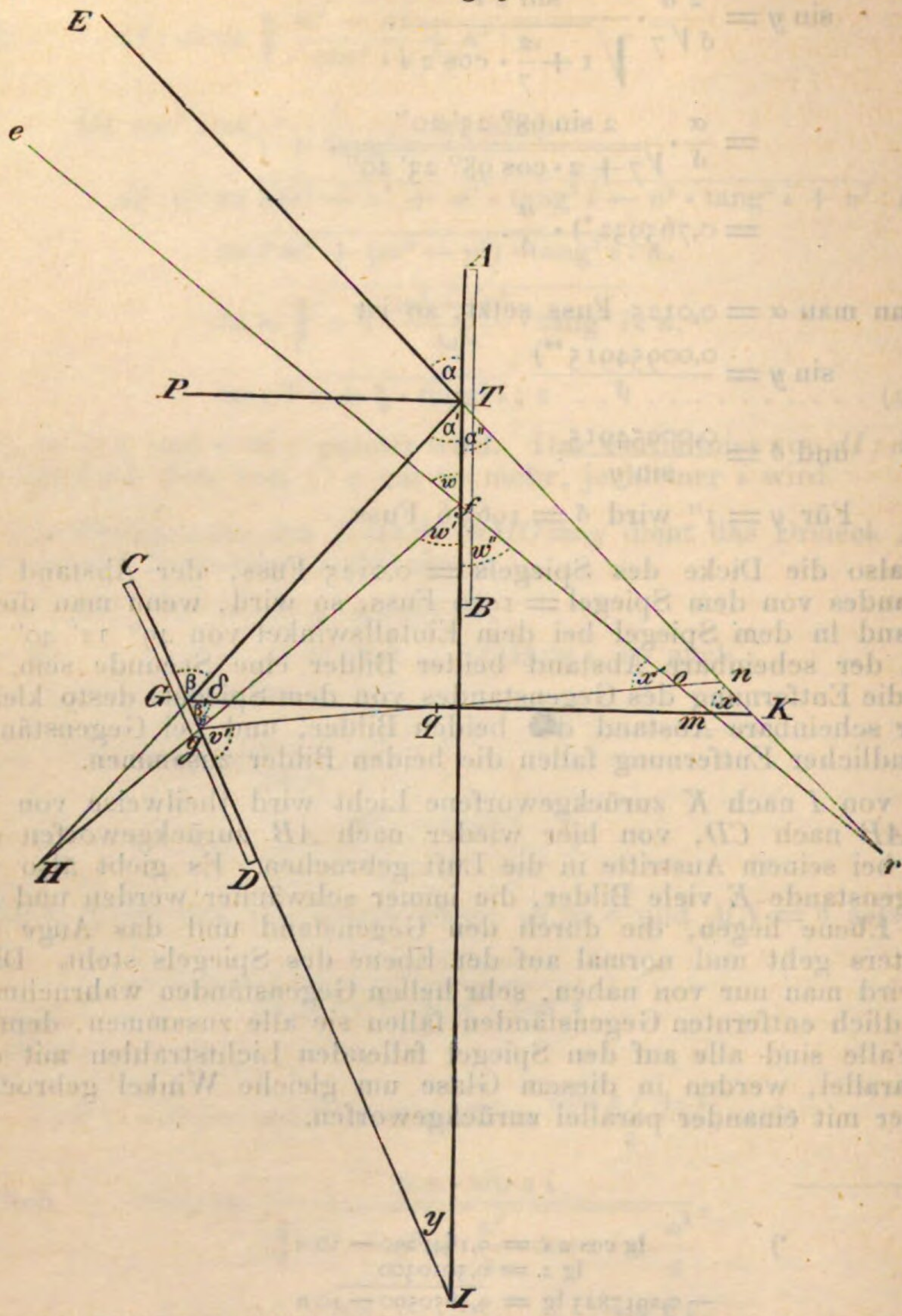
woraus folgt, dass $y = o$ wird, wenn $i = o$ oder $= 90°$ ist, und dass zwischen diese beiden Werthe von y ein Maximum fällt. Die Differential-Rechnung lehrt dieses Maximum finden; die diesfällige Formel ist:

$$\cos 2\, i = \frac{n^2 - 2\, m^2 \pm 2\, m \sqrt{m^2 - n^2}}{n^2} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2} = -0{,}1458972 \;\; (6)$$

und $i = 49°\ 11'\ 40''$ für y als Maximum.

§. 72.

Fig. 54.



Fällt (Fig. 54.) auf einen ebenen Spiegel *AB* ein Lichtstrahl *ET*, so wird dieser nach *G* so zurückgeworfen, dass die beiden Strahlen *ET* und *GT* in einer Ebene liegen, die normal auf der des Spiegels ist und die Winkel, welche diese Strahlen mit der Spiegelebene machen, einander gleich sind; nämlich $\angle\, \alpha = \angle\, \alpha'$. Lässt man den zurückgeworfenen Strahl *TG* auf den zweiten Spiegel *CD* fallen, der mit *AB* auf ein und derselben Ebene normal steht, so wird dieser Strahl von *G* nach *K* so zurückgeworfen, dass $\angle\, \beta = \angle\, \beta'$ wird und die Strahlen *ET*, *TG* und *GK* in einer Ebene liegen.

Diese doppelte Reflection findet nur dann statt, wenn *ET* genau oder nahe parallel mit der Ebene ist, auf welcher *AB* und *CD* normal stehen;

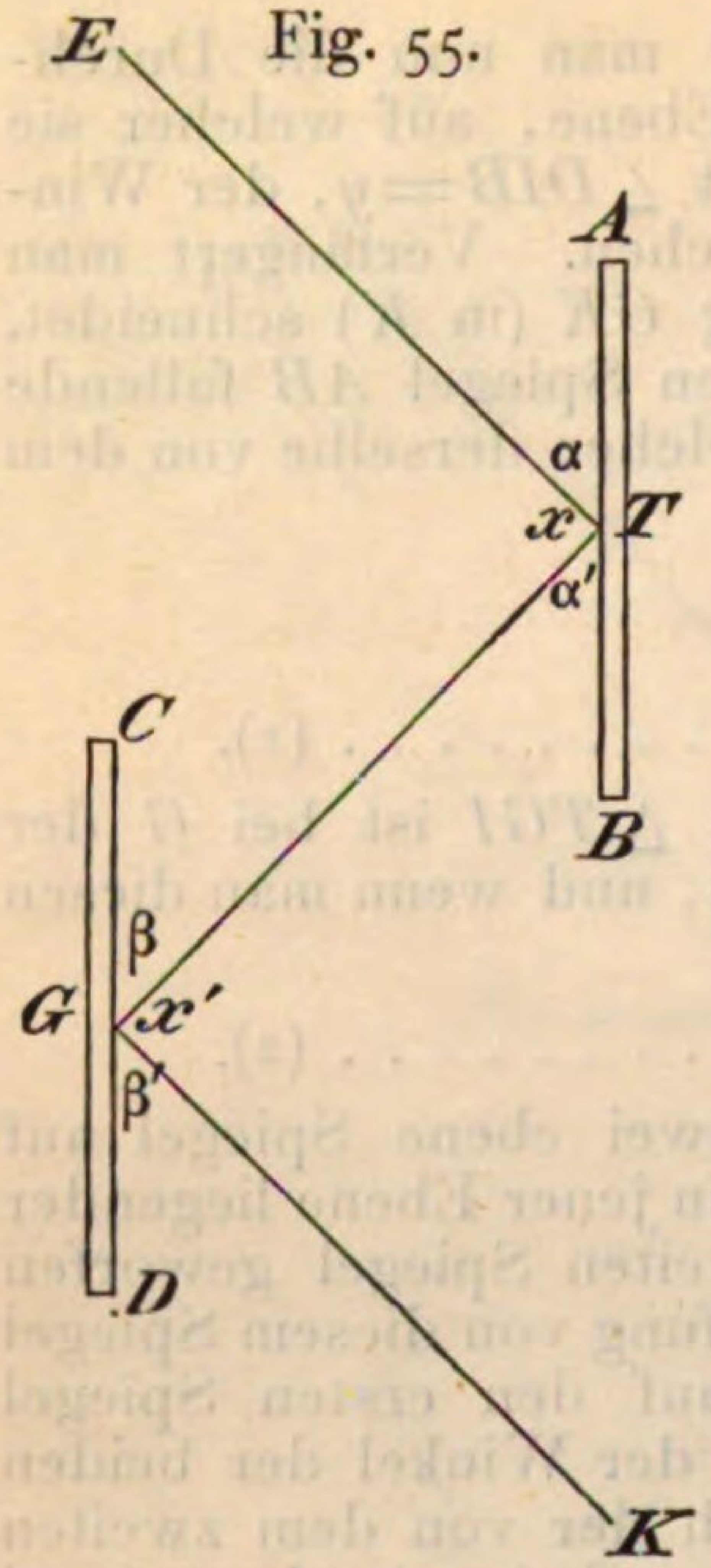


Fig. 55.

§. 74.

Ist der auf den ersten Spiegel fallende Lichtstrahl mit dem von dem zweiten zurückgeworfenen parallel, so sind die beiden Spiegel ebenfalls mit einander parallel.

Es seien (Fig. 55.) AB und CD die beiden Spiegel, die normal auf einer Ebene stehen, ET der in dieser Ebene liegende und auf den Spiegel AB fallende Lichtstrahl, von welchem derselbe nach G und von hier weiter nach K zurückgeworfen wird, unter der Voraussetzung, dass GK parallel mit ET oder $\angle x = \angle x'$ ist. Da aber $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$, so ist

$2\alpha = 180° - x$ und $2\beta = 180° - x'$, folglich

$\alpha = \beta$ oder $\alpha' = \beta$,

daher AB parallel mit DC. Dreht man also (Fig. 54.) den Spiegel AB um den Punkt T von B gegen K, so entfernen die Durchschnittspunkte I und K, ersterer in GI, letzterer in GK, sich immer weiter von G, und wenn beide Spiegel genau parallel sind, so finden diese Durchschnittspunkte nicht mehr statt.

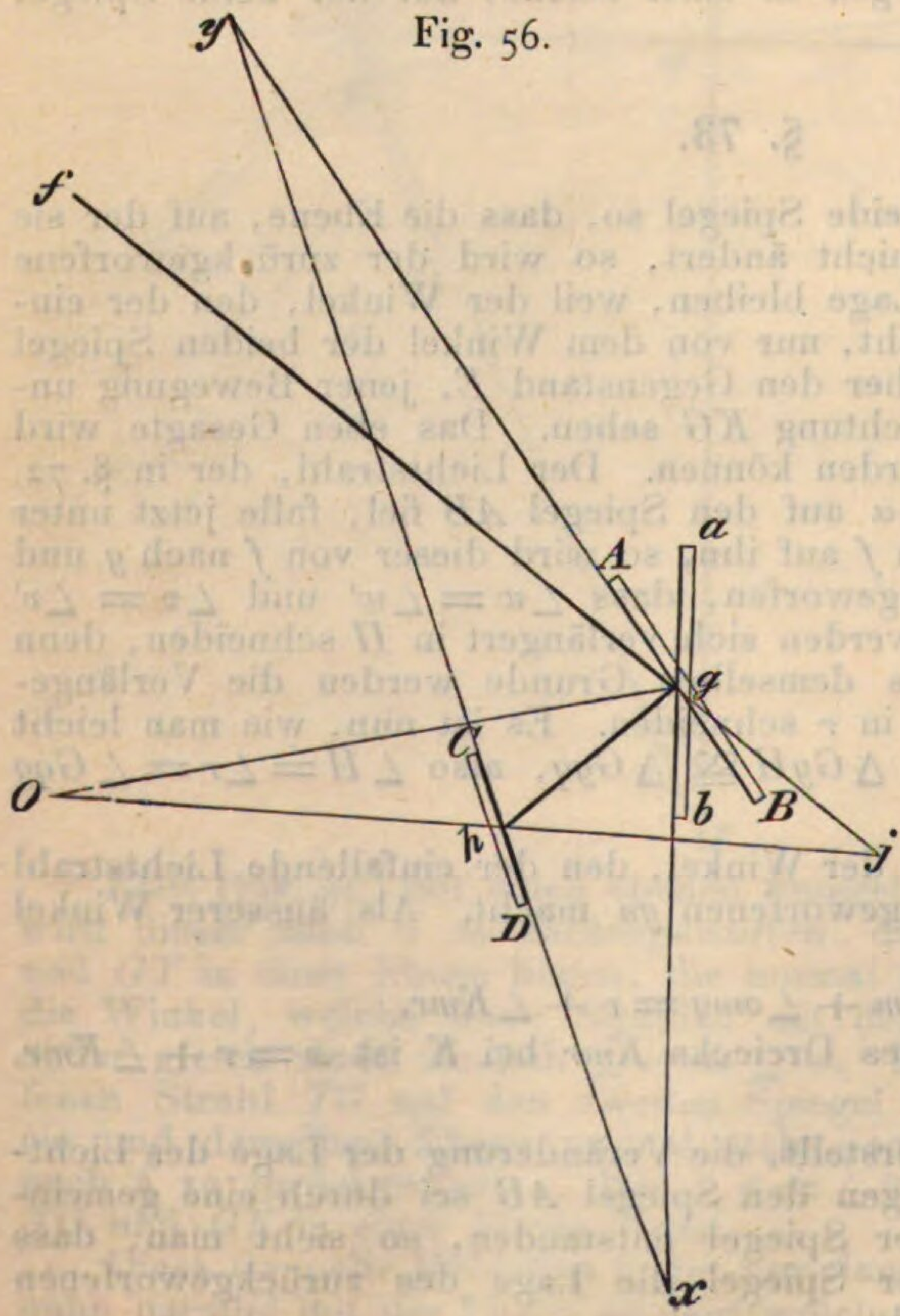


Fig. 56.

Dreht man den Spiegel AB noch weiter nach derselben Richtung hin um den Punkt T, so werden die Durchschnittspunkte I und K auf die andere Seite von TG fallen. Die Punkte I und K liegen also immer beide auf einer Seite von TG.

§. 75.

Es seien (Fig. 56.) in der Ebene, auf welcher die Spiegel AB und CD normal stehen, zwei Objecte f und O, der Spiegel CD sei nur von jener Ebene an bis auf die Hälfte belegt, die andere Hälfte durchsichtig, und dieser Spiegel befinde sich zwischen dem Auge des Beobachters in j und dem Objecte O. Nun mache man $\angle Dhj = \angle Chg$, ziehe eine Gerade von O nach g (dem Punkte, in welchem hg den Spiegel AB trifft) und bringe den Spiegel AB in die Lage, dass $\angle AgO = \angle Bgh$ wird, so wird der von O nach g gehende Lichtstrahl von g nach h und

von hier nach j zurückgeworfen. Das Auge in j sieht also das Object O geradezu durch den unbelegten Theil dieses Spiegels CD und zugleich auch durch doppelte Reflection in dem belegten Theile dieses Spiegels, beide in der Richtung jh. Verlängert man BA und DC in der Ebene, auf welcher beide Spiegel normal stehen, bis sie sich schneiden (in y), so ist nach den §§. 73. und 74. $\angle AyC = \frac{1}{2}\angle gOh$. Dreht man nun den Spiegel AB um seine Axe in dem Punkte g, welche normal auf der Ebene steht, die durch die Punkte f, O und g geht, und bringt man ihn in die Lage ab, so dass $\angle hxg = \frac{1}{2}\angle Ojf$ wird, in welchem Falle $\angle fga = \angle hgb$ ist, so wird der Beobachter in j beide Objecte O und f nach der Richtung jh sehen, ersteres geradezu durch den unbelegten Theil des Spiegels CD, letzteres in dem belegten Theile dieses Spiegels durch doppelte Reflection (§. 73.).

Der Winkel zwischen den Gegenständen f und O von der Umdrehungsaxe des Spiegels AB gesehen, nämlich $\angle fgO = \angle gjO + \angle gOj$.

Die Verlängerungen von AB, ab und CD, bilden das Dreieck gxy, in welchem

$$\angle Aga = \angle hxg + \angle hyg,$$

oder $$\angle Aga = \tfrac{1}{2}\angle Ojf + \tfrac{1}{2}\angle gOj,$$

folglich $$2\angle Aga = \angle Ojf + \angle gOj = \angle fgO.$$

§. 76.

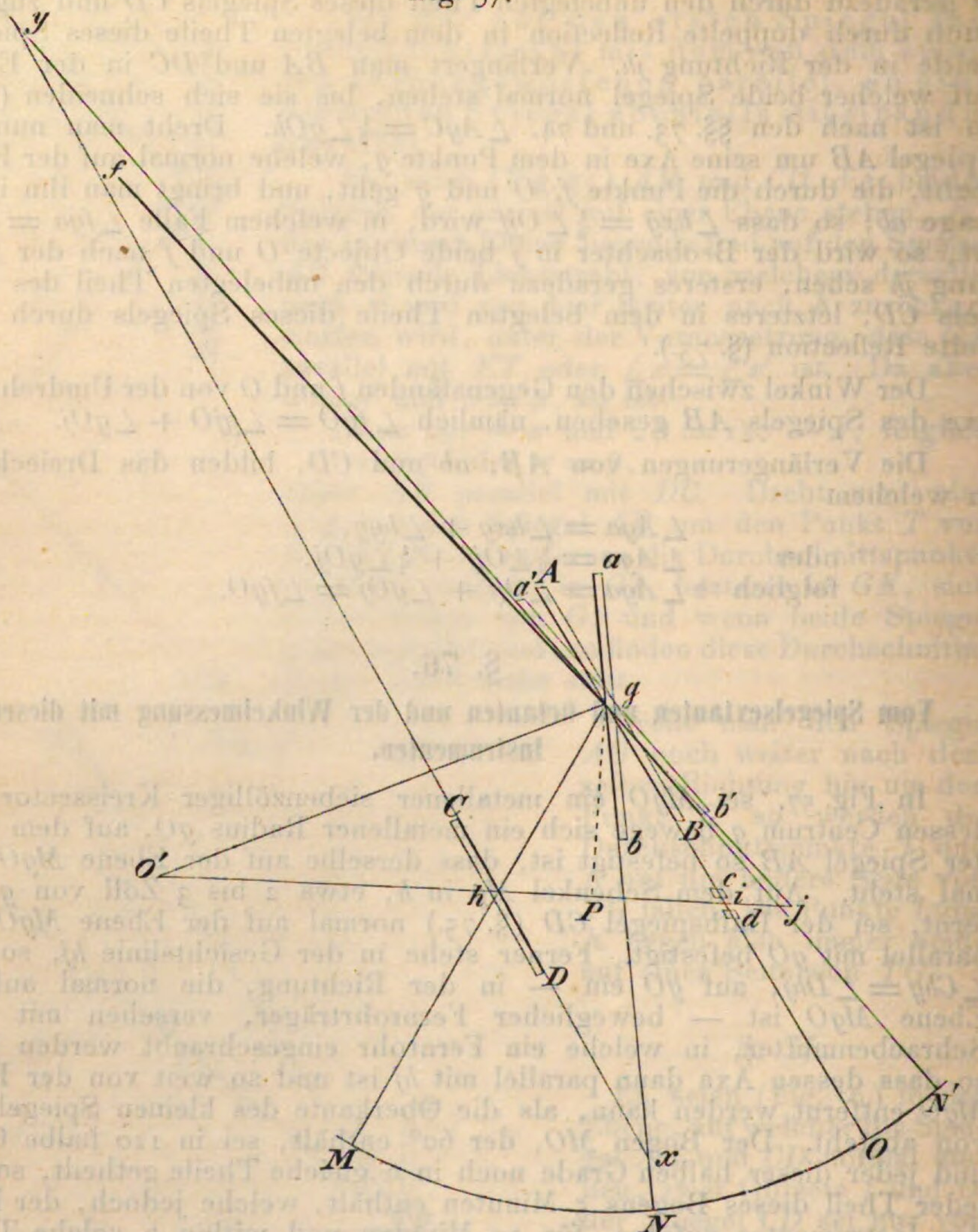
Vom Spiegelsextanten und Octanten und der Winkelmessung mit diesen Instrumenten.

In Fig. 57. sei MgO ein metallener siebenzölliger Kreissector, um dessen Centrum g bewege sich ein metallener Radius gO, auf dem bei g der Spiegel AB so befestigt ist, dass derselbe auf der Ebene MgO normal steht. Auf dem Schenkel Mg in h, etwa 2 bis 3 Zoll von g entfernt, sei der Halbspiegel CD (§. 75.) normal auf der Ebene MgO und parallel mit gO befestigt. Ferner stehe in der Gesichtslinie hj, so dass $\angle Chg = \angle Dhj$, auf gO ein — in der Richtung, die normal auf der Ebene MgO ist — beweglicher Fernrohrträger, versehen mit einer Schraubenmutter, in welche ein Fernrohr eingeschraubt werden kann, so dass dessen Axe dann parallel mit hj ist und so weit von der Ebene MgO entfernt werden kann, als die Oberkante des kleinen Spiegels davon absteht. Der Bogen MO, der 60° enthält, sei in 120 halbe Grade und jeder dieser halben Grade noch in 6 gleiche Theile getheilt, so dass jeder Theil dieses Bogens 5 Minuten enthält, welche jedoch, der Natur des Instrumentes zufolge, für 10 Minuten und mithin 6 solche Theile, oder jeder halbe Grad für einen ganzen Grad gerechnet, von O anfangend nach N', wie auch durch N nach M aufgetragen und nach jeder Seite von O an, von 10 zu 10 Graden mit Ordnungszahlen versehen sind.

Ferner sei der bewegliche Radius gO bei O mit einer kleinen Theilung versehen, durch welche es möglich wird, den Stand des Nullpunktes dieser Theilung gegen den Nullpunkt der Theilung des Bogens MO genau anzugeben, etwa auf 10 Secunden. Ein solches Instrument ist der Spiegelsextant von John Hadley im Jahre 1731 gemacht. Von diesem Instrumente wird die obere Fläche des Kreissectors die Ebene des Sextanten genannt.

Ferner heisst: AB der grosse Spiegel, auch Hauptspiegel, Alhidadenspiegel oder Centrispiegel; CD der kleine Spiegel, auch Halbspiegel oder Horizontspiegel; der bewegliche Radius gO Alhidade, die daran befestigte Theilung bei O Vernier, der Bogen MO, oder dessen Theilung

Fig. 57.



Limbus. Zwischen den beiden Spiegeln auf der Linie *gh* sind noch drei oder vier farbige Gläser angebracht, die zurückgelegt werden können: solche Gläser befinden sich auch hinter dem kleinen Spiegel *CD*, auf der Linie *hO'* nicht weit von *h* befestigt. Das Fernrohr des Sextanten, welches 4 bis 8 mal vergrössert, ist in dem Brennpunkte des Oculars mit zwei feinen parallelen Silberdrahtfäden versehen, deren scheinbarer Abstand etwa 80 bis 90 Minuten beträgt, welcher Abstand Fädenweite genannt und von der Axe des Fernrohrs halbirt wird. Diese Fäden werden mit der Ebene des Sextanten parallel gestellt.

Der Spiegeloctant unterscheidet sich dadurch von dem Sextanten, dass der Bogen *MO* nur 45° enthält. Gewöhnlich ist der Kreisausschnitt *MgO* bei einem Octanten aus Ebenholz angefertigt, der Bogen *MO* mit Elfenbein ausgelegt und dieser in 90 sogenannte Grade und drittel Grade eingetheilt. In der Linie *hj* steht eine messingene Platte *cd* normal auf

der Ebene MgO, welche mit zwei kleinen Oeffnungen versehen ist, wovon die nächste an der Ebene des Octanten so weit von derselben absteht, als die Linie auf dem kleinen Spiegel CD, welche den unbelegten Theil desselben von dem belegten trennt; die entferntere Oeffnung ist dagegen so weit wie die Mitte des unbelegten Theiles des kleinen Spiegels von der Ebene des Instrumentes entfernt.

Um nun mit dem Spiegeloctanten oder Sextanten den Winkel zwischen den Objecten O' und f (Fig. 57.) von einem Orte, etwa von g aus, zu messen, bringe man das Centrum des Instrumentes in den Punkt g und die Ebene des Instrumentes in die der Punkte O', f und g, drehe das Instrument so lange, bis man durch die Oeffnung der Platte cd und den unbelegten Theil des Spiegels CD das Object O' sieht. Das Instrument in dieser Lage haltend, bewege man die Alhidade von O nach N' oder nach N, bis man das Object O' durch doppelte Reflection in dem belegten Theile des Spiegels CD auch sieht. Den einen Theil des Objectes O' wird man nämlich ohne Fernrohr in dem unbelegten und den anderen in dem belegten Theile des Spiegels CD erblicken. Vermittelst der Alhidade bewege man nun den grossen Spiegel so, dass diese beiden Theile des Objectes O' nicht mehr in dem Spiegel CD gebrochen erscheinen, d. h. sich decken. Nachdem dies bewirkt ist, lese man den Stand der Alhidade auf dem Limbus mittelst des Nonius ab. Es sei nämlich in N' der Nullpunkt des Nonius in diesem Falle und O der Nullpunkt des Limbus, so ist der Bogen ON' das Abgelesene, N' der Stand der Alhidade, wenn der Spiegel AB die Lage $a'b'$ hat, und die abgelesenen Grade, Minuten und Secunden des Bogens ON' sind Maass von dem Winkel $2 \cdot \angle OgN' = \angle gO'j$ (§. 75.).

Demnächst bewege man den Spiegel AB vermittelst der Alhidade von N' nach N zu — die bisherige Lage des Instrumentes nicht verändernd — bis man auch das Object f durch doppelte Reflection in dem belegten Theile des Spiegels CD sieht und dieses Bild von f mit dem direct gesehenen Theile von O' genau zusammenfällt. In diesem Falle habe der Spiegel AB die Lage ab und in N sei der Nullpunkt des Nonius. Die Ablesung auf dem Nonius und Limbus giebt die Grade, Minuten und Secunden von $ON = 2 \cdot \angle OgN = \angle O'jf$ (§. 75.).

Da nun $\angle fgO' = \angle O'jf + \angle gO'j$*) ist,
so ist auch $\angle fgO' = 2 \cdot \angle OgN + 2 \cdot \angle OgN' = ON + ON' = NN'$.

Wenn man also mit einem Spiegeloctanten oder Sextanten von einem gegebenen Orte aus zwischen terrestrischen Gegenständen Winkel messen und die Spiegel des Instrumentes nach oben halten will, so hat man von diesem Orte aus durch die untere Oeffnung in der Platte cd (Diopter) und durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels CD nach dem linkeren Gegenstande zu sehen, die Alhidade so lange zu bewegen, bis der doppelt reflectirte Theil desselben Gegenstandes in dem belegten Theile des Spiegels CD, den direct gesehenen Theil dieses Gegenstandes genau deckt, und hiernach den Stand der Alhidade abzulesen. Demnächst hat man wieder nach dem linkeren Gegenstande zu sehen, wie vorher, das Instrument so zu halten, dass der grosse Spiegel dem rechteren Gegenstande zugekehrt und dessen Ebene parallel mit der ist, welche durch die beiden Gegenstände und das Auge des Beobachters geht, und nun die Alhidade so lange nach M zu bewegen, bis der doppelt reflectirte rechtere Gegenstand mit dem linkeren, direct gesehenen, zusammenfällt. Die Differenz der Ablesung des jetzigen Standes der Alhidade und der vorher angeführten, giebt, unter Berücksichtigung

*) Dieser Winkel $gO'j$ heisst Spiegelparallaxe.

und doppelt reflectirt von dem Stern sieht, zusammen, so sind die beiden Spiegel mit einander parallel (§. 74.) und somit der kleine Spiegel normal auf der Ebene des Sextanten, weil der grosse Spiegel bereits normal auf derselben steht.

Auf See kann man auch so verfahren. Man schiebe die Alhidade auf Null und setze sie fest, halte dann das Instrument horizontal und sehe neben dem Diopter bezw. Fernrohrträger nach dem belegten Theile des kleinen Spiegels, diesen zugleich so auf die Kimm richtend, dass man in und neben diesem Theile des Spiegels die Kimm erblickt. Steht nun das Bild der Kimm in dem Spiegel höher oder niedriger als die Kimm neben dem Spiegel, so steht dieser Spiegel nicht normal auf der Instrumentebene; erscheint aber die Kimm neben dem Spiegel und ihr Bild in demselben ungebrochen, so steht er normal auf der Instrumentebene, wenn der grosse darauf normal steht, was vorausgesetzt wird. Statt der Kimm kann man dazu auch im Schulzimmer die Oberkante der schwarzen Wandtafel benutzen.

§. 80.

Die Axe des Fernrohrs mit der Ebene des Sextanten parallel zu stellen.

Nachdem das Fernrohr an dem Sextanten festgeschraubt ist und die beiden Parallelfäden in dem Brennpunkte des Oculars mit der Ebene des Sextanten parallel gestellt sind, lege man den Sextanten horizontal. Neben dem kleinen Spiegel stelle man sodann das Diopter *B* (Fig. 58.) und neben dem Fernrohrträger das Diopter *A* auf die Ebene des Sextanten, so dass die durch die Mitte der Diopter gedachte Gerade so hoch wie die Mitte des Fernrohrs und nahe mit der Axe desselben parallel ist. Nun bringe man durch Erhöhung oder Erniedrigung der einen Seite des Sextanten, durch die Oeffnung *a* in *A* gesehen, den Faden *bc* in *B* auf einen entfernten deutlichen Punkt. Wird dieser Punkt bei unveränderter Lage des Instrumentes durch das Fernrohr zwischen den beiden Horizontalfäden genau in der Mitte wahrgenommen, so ist die Axe des Fernrohrs mit der Sextantenebene parallel; geschieht dieses nicht, so muss man vermittelst der Correctionsschrauben, die gewöhnlich an dem Fernrohrträger angebracht sind und durch welche das Objectivende des Fernrohrs der Ebene des Instrumentes genähert oder davon entfernt werden kann, so lange nachhelfen, bis man den Punkt in der Mitte zwischen den beiden Horizontalfäden sieht.

Will man diese Berichtigung im Zimmer vornehmen, so lege man den Sextanten auf einen Tisch horizontal hin, und nachdem die beiden Diopter *A* und *B*, wie vorhin angegeben ist, auf die Ebene des Sextanten gestellt sind, entferne man das Fernrohr so weit von der Sextantenebene, dass der Abstand der Axe des Fernrohrs von dieser Ebene gleich der Höhe der Seitenfläche *y* des Diopters *A* ist. Nun visire (ziele) man über die oberen Kanten der Diopter *A* und *B* nach der Wand des Zimmers und lasse in dieser Linie an der Wand einen horizontalen Strich mit Kreide machen. Sieht man diesen Strich im Fernrohr zwischen den beiden Horizontalfäden genau in der Mitte, so ist die Axe des Fernrohrs mit der Sextantenebene parallel.

§. 81.

Ueber die Bestimmung der Indexcorrection.

Die Indexcorrection des Sextanten oder Octanten bestimmen, heisst die Spiegel desselben genau mit einander parallel stellen, und ablesen, wie weit der Nullpunkt des Vernier links oder rechts von dem des Lim-

Beispiel. 1872 den 19. September wurden mit einem siebenzölligen Sextanten die Ränder der beiden Sonnenbilder zur Berührung gebracht, und zwar der Unterrand des einen mit dem Oberrande des anderen. Der Stand der Alhidade hierbei war: einmal, nach dem kleinen Spiegel zu von dem Nullpunkte des Limbus 36′ 10″ d. i. — 36′ 10″, das andere Mal auf der anderen Seite des Nullpunktes 27′ 40″ d. i. + 27′ 40″,

folglich die halbe Summe $= -$ 4′ 15″ die Indexcorrection,
und die halbe Differenz $=$ 31′ 55″ der Durchmesser der Sonne.

Will man die Indexcorrection an einem Fixstern oder Planeten bestimmen, so ist es zweckmässig, dem kleinen Spiegel eine geringe Neigung gegen die Ebene des Sextanten zu geben. In diesem Falle werden das directe und doppelt reflectirte Bild des Fixsterns oder Planeten nicht zur Deckung gebracht werden können, sondern neben einander weggehen (§. 79.). Man bewege dann die Alhidade so lange, bis die beiden Bilder desselben Gestirnes so neben einander stehen, dass die Verbindungslinie zwischen beiden normal auf der Ebene des Sextanten steht, welches namentlich, wenn das Instrument in verticaler Lage gehalten wird, mit einer grösseren Genauigkeit beobachtet werden kann, als die Deckung der beiden Bilder. Der Abstand der beiden Bilder von einander muss aber nur klein sein, anderen Falles wird die Beobachtung ungenau. An dem Vollmonde wird die Indexcorrection eines Sextanten wie an der Sonne bestimmt. Wenn der Mond zu hell ist, so werden beide Bilder durch die grünen oder hellrothen Gläser vor den Spiegeln geschwächt. Bei der Sonne werden die dunkelrothen oder hellrothen und grünen Gläser gemeinschaftlich anzuwenden sein. Man kann sich des farbigen Glases vor dem Ocular des Fernrohrs zur Bestimmung der Indexcorrection an der Sonne bedienen. Bei den Fixsternen und Planeten fällt der Gebrauch dieser Gläser natürlich ganz weg.

An Bord, auf See, ist der Seehorizont zur Bestimmung der Indexcorrection des Sextanten oder Octanten geeignet. Denn bei einer Höhe von 4 Meter über der Meeresfläche ist der Seehorizont 4 Seemeilen von dem Beobachter entfernt, und somit die Spiegelparallaxe $= 0$ anzunehmen.

Wenn man von einem nahen Gegenstande dessen directes und doppelt reflectirtes Bild zur Deckung bringt, so sind die beiden Spiegel des Sextanten oder Octanten dadurch nicht in eine parallele Lage gebracht, sondern machen einen Winkel mit einander, der gleich der halben Spiegelparallaxe ist (§. 76. und §. 75.). Demnach ist der Stand der Alhidade, auf dem Limbus und Vernier abgelesen, nicht die Indexcorrection, sondern die algebraische Summe dieser Ablesung und der Spiegelparallaxe.

Bezeichnet man also die Spiegelparallaxe mit $+ p$ (positiv ist diese immer), die Angabe des Nonius, wenn die beiden Bilder des nahen Gegenstandes (der die Spiegelparallaxe p giebt) zur Deckung gebracht sind, mit $\pm a$ und die eigentliche Indexcorrection mit $\pm c$, so ist, wie vorhin bemerkt, $\pm a = \pm c + (+p)$ oder $\pm c = \pm a - (+p)$.

Die Spiegelparallaxe $p = 206265'' \cdot \frac{Pg}{O'g}$ (Fig. 57.), wonach sie berechnet werden kann, wenn man die Entfernung ($O'g$) des Beobachters von dem Gegenstande ungefähr kennt und (Pg) genau misst.

§. 82.

Von der Untersuchung der farbigen Gläser.

Die farbigen Gläser vor dem kleinen und grossen Spiegel eines Sextanten werden besonders bei Sonnen- auch Mondbeobachtungen

§. 83.

Untersuchung des Limbus und Vernier.

Um zu untersuchen, ob der Limbus gleichmässig eingetheilt ist, stelle man den Nullstrich des Vernier genau auf jeden Theilstrich des Limbus, von dessen Nullstrich anfangend, und sehe nun zu, ob der andere Endstrich des Vernier auch jedes Mal mit einem Theilstriche des Limbus coincidirt. Trifft dieses auf jedem Striche des Limbus zu, so ist dessen Theilung eine durchaus gleichmässige; im entgegengesetzten Falle ist sie ungleichmässig. Limben, die ungleichmässig eingetheilt sind, müssen durchaus verworfen werden.

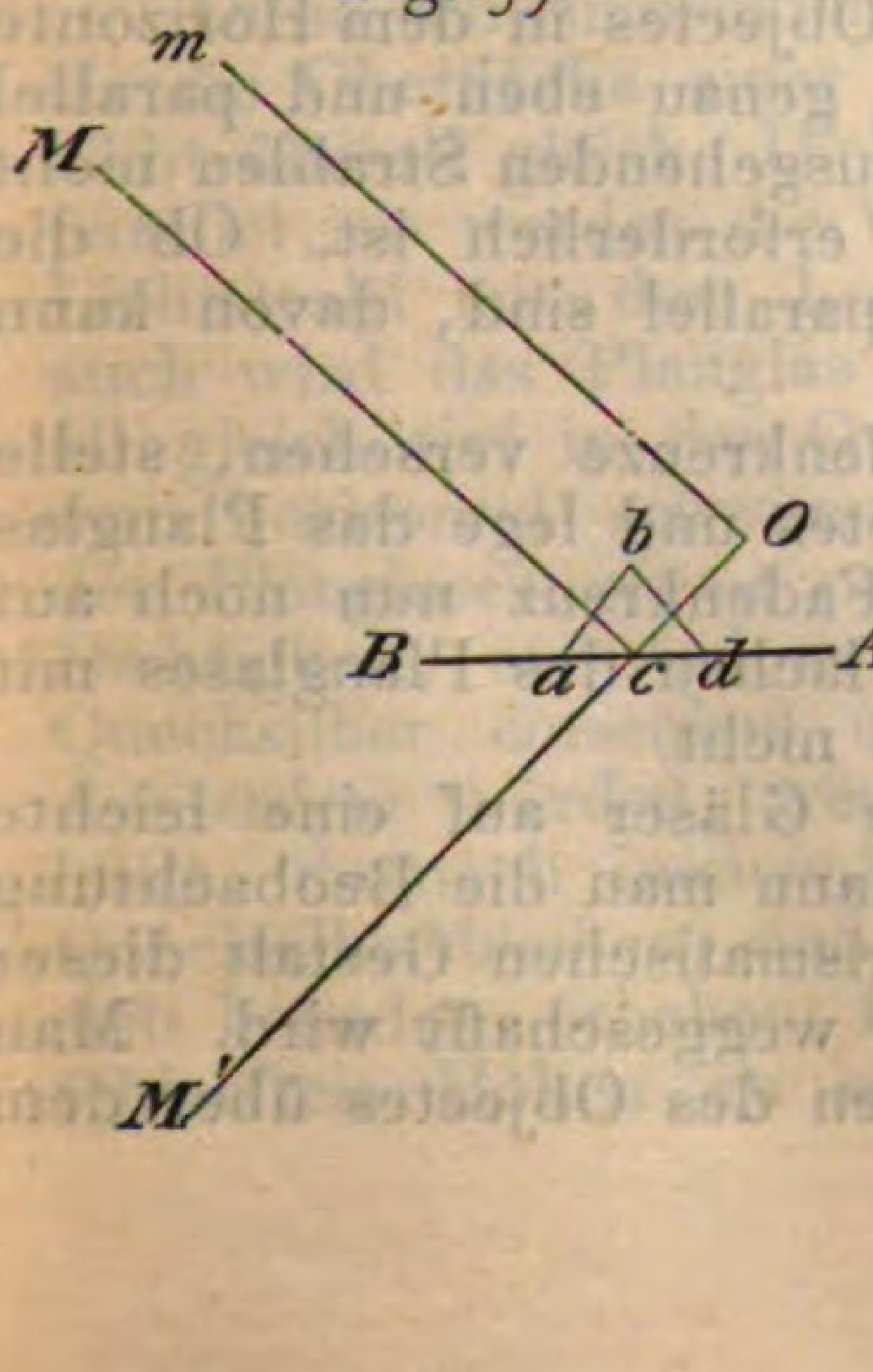
Nachdem auf diese Weise die Gleichmässigkeit der Theilung des Limbus geprüft ist, geht man zur Prüfung der Theilung des Vernier über. Diese beruht auf der Entstehung des Vernier (§. 77.). Stellt man nämlich den Nullstrich des Vernier genau auf einen Theilstrich des Limbus, so bleibt jeder folgende Strich des Vernier immer weiter gegen die Theilstriche des Limbus zurück, und zwar der zweite zweimal so weit als der erste, der vierte zweimal so weit als der zweite, der sechste zweimal so weit als der dritte u. s. w., wenn nämlich die Theilung des Vernier gleichmässig ist. Sicherer wird noch wohl das folgende Verfahren sein. Man stelle nach einander den zweiten, dritten, vierten u. s. w. Theilstrich des Vernier scharf auf einen Theilstrich des Limbus und sehe nun nach, ob die ersten Striche des Vernier auf beiden Seiten des eingestellten Striches gleichen Abstand von den ihnen zunächst stehenden Theilstrichen des Limbus haben, was man gut sehen kann. Ist dieses der Fall, so kann man sicher sein, dass die Theilung des Vernier richtig ist; zeigen sich Abweichungen und ist die Theilung des Limbus gleichmässig, so findet der Fehler an der Stelle des Vernier statt, an welcher die Abweichung bemerkt wird.

§. 84.

Ueber den künstlichen Horizont.

Jede glatt polirte, undurchsichtige Ebene, an einem Orte auf der Oberfläche der Erde so aufgestellt, dass die Richtung der Schwere dieses Ortes darauf normal steht, ist ein künstlicher Horizont. Demnach kann jeder Planspiegel, der genau horizontal gestellt ist, sowie die Oberfläche einer in einem Gefässe befindlichen, gegen Erschütterungen geschützten Flüssigkeit als Horizont benutzt werden. Die Flüssigkeiten, die sich hierzu am besten eignen, sind Quecksilber und Oel. Das erstere ist dem letzteren vorzuziehen, weil es einen besseren Spiegel macht und durch Kälte nicht so leicht als dieses leidet, d. h. zähe wird.

Fig. 59.



In Fig. 59. sei AB die Ebene eines genau horizontal gestellten Spiegels oder die Oberfläche des in Ruhe befindlichen Quecksilbers, auf welche von der Sonne oder einem anderen Gestirne, oder auch von einem sehr weit entfernten irdischen Gegenstande ein Lichtstrahl Mc fällt, so wird dieser nach O so zurückgeworfen, dass $\angle McB = \angle OcA$ (§. 54.), und das Auge in O das Object M in M', einem Punkte in der Verlängerung von Oc, sieht. Der Winkel McB ist die scheinbare Höhe des Gestirnes M,

und der Winkel *McM'* die Doppelhöhe desselben Gestirnes, weil $\angle M'cB = \angle OcA = \angle McB$ ist. Die Entfernung des Auges des Beobachters von dem künstlichen Horizonte, d. i. *Oc*, kann beliebig sein, sie wird indessen in den meisten Fällen höchstens 1 bis 2 Meter sein. Zieht man nun *Om* parallel mit dem einfallenden Strahle *Mc*, so wird jene, wenn die Entfernung des Objectes *M* von diesem Horizonte so gross ist, dass *Oc* dagegen verschwindet, wie dieses bei den Gestirnen der Fall ist, das Object ebenfalls treffen. Wenn also die Lichtstrahlen, die von dem Objecte nach dem Horizonte (*AB*) und dem Auge des Beobachters gelangen, mit einander parallel sind, so darf man mit dem Sextanten nur den Winkel messen, den der von dem Objecte nach dem grossen Spiegel des Sextanten gehende Lichtstrahl *mO* mit dem von dem Horizonte *AB* zurückgeworfenen Lichtstrahle *Oc* macht, so hat man $\angle mOM' = \angle McM'$ = der Doppelhöhe des Objectes.

Der Quecksilberhorizont ist nicht allein der bequemste, sondern auch der genaueste, und dabei weniger kostspielig als der Glashorizont. Es gehört zu ersterem ausser dem Quecksilber ein hölzernes Gefäss in der Form eines Parallelepipedums von etwa 4 Zoll Länge, 3 Zoll Breite und 5 Linien Tiefe, oder ein Abschnitt einer kupfernen oder messingenen Hohlkugel, der so in ein Holzstück festgeharzt wird, dass die hohle Seite desselben nach oben kommt. Diese hohle Seite wird alsdann mit Scheidewasser abgerieben, davon gereinigt und mit Quecksilber angefüllt. In diesem Falle wird das Quecksilber an dem Rande dieses Gefässes nicht convex stehen, wie an dem des hölzernen, sondern seine Oberfläche eine vollständige Ebene bilden, was erforderlich ist, weil sonst, wenn das Bild des Objectes bei der Winkelmessung nicht immer in der Mitte des Horizontes gehalten wird, Fehler entstehen.

Wenn auf dem Quecksilber in diesem Behälter Oxyde liegen, so werden dieselben mit der blossen Hand am schnellsten und besten beseitigt.

Zu jedem Apparate gehört ein dreieckiges Dach, dessen Verticaldurchschnitt *abd* (Fig. 59.) mit zwei Plangläsern *ab* und *bd* versehen, das über den Horizont gestellt wird, um das Quecksilber in demselben gegen Luftzug zu schützen. Dieses Dach hat die Form eines dreieckigen normalen Prismas, dessen Grundebenen gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke sind. Die beiden sich normal durchschneidenden Seitenflächen *ab* und *bd* enthalten Plangläser, die dritte Seitenfläche ist offen und die beiden dreieckigen Grundebenen sind aus Holz oder Blech angefertigt. Dieses Dach wird nun so über den Horizont gestellt, dass das eine Glas desselben dem Objecte und das andere dem Beobachter zugekehrt ist, damit dieser durch dieselben das Bild des Objectes in dem Horizonte sieht. Die Flächen dieser Plangläser müssen genau eben und parallel sein, sonst sind die auf sie auffallenden und ausgehenden Strahlen nicht mit einander parallel (§. 60.), was durchaus erforderlich ist. Ob die Flächen der Plangläser genau mit einander parallel sind, davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen.

Man nehme ein Fernrohr mit einem Fadenkreuze versehen, stelle dieses auf einen Punkt eines entfernten Objectes und lege das Planglas vor das Objectiv des Fernrohrs. Steht das Fadenkreuz nun noch auf demselben Punkte des Objectes, so sind die Flächen des Planglases mit einander parallel, im anderen Falle sind sie es nicht.

Ist die Vorrichtung getroffen, dass diese Gläser auf eine leichte Weise um 180° gedreht werden können, so kann man die Beobachtung so anstellen, dass der Fehler, der von der prismatischen Gestalt dieser Gläser herrührt, ganz aus der Beobachtung weggeschafft wird. Man nehme zu diesem Behuf eine oder zwei Höhen des Objectes über dem

künstlichen Horizonte, drehe hiernach die Plangläser in dem Dache um 180° und beobachte nun wieder eine oder zwei Höhen des Objectes, so wird das arithmetische Mittel aus diesen Höhen als eine Höhe zu betrachten sein, die frei von dem Fehler ist, der von der prismatischen Gestalt der Plangläser herrührt.

Vortheilhafter als diese Plangläser sind ganz fein gespaltene Scheiben von Marienglas, indem die nicht prismatisch und auch nicht so kostspielig als erstere sind.

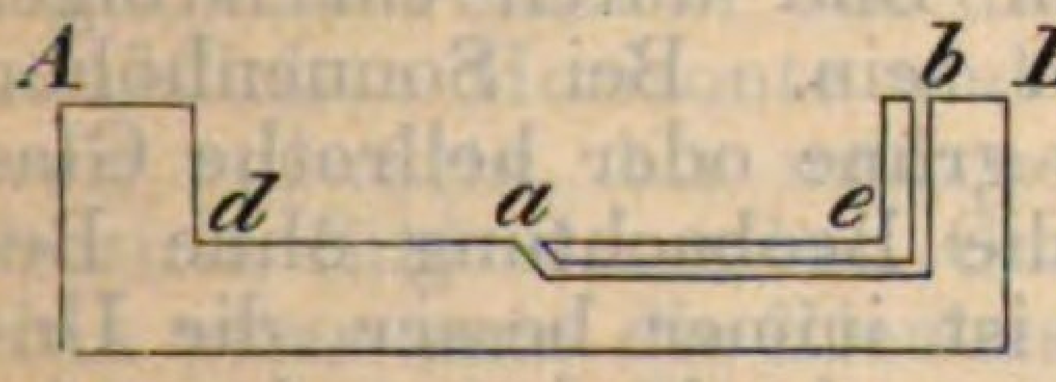
Um den Erschütterungen vorzubeugen, die das Quecksilber in dem Gefässe entweder durch zu starken Wind oder auch durch das Vorbeigehen eines Menschen oder das Vorbeifahren eines Wagens in der Nähe des Horizontes erleidet, ist es zweckmässig, den Horizont auf Watten zu setzen, wodurch jene Erschütterungen, wenn auch nicht ganz beseitigt, so doch bedeutend vermindert werden.

Um ferner, an einem Erschütterungen ausgesetzten Standorte mit dem Quecksilberhorizonte dennoch Beobachtungen machen zu können, wird man auf das Quecksilber in demselben ein Planglas, dessen Seiten mit einander parallel sind, legen müssen, jedoch so, dass unter dem Glase keine Luftblasen sind. In diesem Falle, und unter der Voraussetzung, dass das Glas überall gleiche Dichtigkeit hat, wird es, auf dem Quecksilber schwimmend, ein horizontal gestellter Spiegel sein. Das Auflegen des Glases auf das Quecksilber kann auf folgende Art gemacht werden:

1. Nachdem das Planglas und das Quecksilber in dem Gefässe gehörig gereinigt sind, lege man auf letzteres ein Blatt feines Postpapier, auf dieses das Planglas, drücke dasselbe mit der einen Hand gelinde und gleichmässig auf das Quecksilber und ziehe mit der anderen Hand das Papier zwischen beiden langsam weg, so wird man einen schönen, horizontalen, gläsernen Spiegel haben.

2. Wenn in dem Boden des Gefässes eine Röhre mündet, durch welche man das Quecksilber von dem oberen Seitenrande aus in das Gefäss giessen kann, so wird man auf diese Art den besten Spiegel erhalten.

Fig. 60.



Es sei Fig. 60. ein Verticaldurchschnitt eines solchen Gefässes. Nachdem das Planglas gehörig gereinigt ist, legt man es in das Gefäss auf dessen Boden *de*, giesst das Quecksilber durch einen papiernen Trichter bei *b* in die Röhre *ab*, in Folge dessen dieses bei *a* unter dem Glase über den Bogen des Gefässes sich ausbreitet und so einen schönen Spiegel bildet.

Diese schwimmenden Spiegel geben aber keinen so genauen Horizont als die Oberfläche einer ruhigen Flüssigkeit. Hat nämlich das Planglas nicht überall gleiche Dicke, d. h. sind seine Flächen nicht mit einander parallel, so werden die Winkel, die der einfallende und zurückgeworfene Lichtstrahl mit dem Lothe machen, nicht mehr einander gleich sein, auch wird das Planglas wegen seiner ungleichen Dicke sich nicht überall gleich tief in das Quecksilber einsenken und somit keinen vollkommen horizontal schwimmenden Spiegel bilden. Sind auch die Flächen des Planglases genau parallel, hat dasselbe aber nicht überall gleiche Dichtigkeit, so wird es sich ebenfalls nicht überall gleich tief in das Quecksilber einsenken und keinen genau horizontalen Spiegel machen. Ausserdem würden, wenn das Planglas auch alle diese Eigenschaften hätte, dennoch immer kleine Luftblasen zwischen dem Glase und dem Quecksilber bleiben, und das Glas auf der Seite, auf welcher diese Blasen sich befinden, erheben. Daher wird man, um mit einem solchen Horizonte fehlerfreie Höhen zu erhalten, diese in entgegengesetzten Lagen des

Das Dreieck DKF giebt

$$FK = DK \cdot \frac{\sin FDK}{\sin GFg} = DK \cdot \frac{\sin GDK}{\sin GFg},$$

und weil $\angle GDK = \angle GFg + \angle DKF$, so auch

$$FK = DK \cdot \frac{\sin [GFg + DKF]}{\sin GFg}.$$

Der Abstand des Gegenstandes von dem Horizonte Gc muss wenigstens näherungsweise bekannt sein, alsdann liefert das Dreieck FGc die Gleichung

$$\sin FGc = \frac{Fc}{Gc} \cdot \sin GFg, \text{ und da}$$

$$Fc = Kc + FK, \text{ so auch}$$

$$\sin FGc = \frac{Kc}{Gc} \cdot \sin GFg + \frac{DK}{Gc} \cdot \sin [GFg + DKF],$$

oder, da Kc und DK gegen Gc immer sehr klein sein werden, so wird es auch $\angle FGc$ sein, und man die letzte Gleichung schreiben können

$$\angle FGc = 206265'' \cdot \frac{Kc}{Gc} \cdot \sin GFg + 206265'' \cdot \frac{DK}{Gc} \cdot \sin [GFg + DKF].$$

Wird nun dieser Winkel zu dem beobachteten addirt, so hat man die Doppelhöhe des Gegenstandes über dem künstlichen Horizonte.

§. 88.

Den Abstand des Mondes von der Sonne, einem Fixstern oder einem Planeten mit dem Sextanten zu messen.

Diese Abstände — die Monddistanzen — zu messen, ist von der Art, wie die Höhen gemessen werden, nicht wesentlich verschieden, denn es muss bei allen Winkelmessungen mit dem Sextanten die Ebene dieses Instrumentes immer parallel mit derjenigen gehalten werden, die man sich durch die beiden Objecte und das Auge des Beobachters gehend zu denken hat (§. 76.). Da durch die Reflection das Bild eines Objectes an Lichtstärke verliert, so wird man, wenn die Beobachtung nicht zu sehr dadurch erschwert werden sollte, stets das hellste Object reflectiren lassen, um Bilder von möglichst gleicher Lichtstärke zu erhalten; sollte aber die Lage der beiden Objecte die Beobachtung bei Befolgung dieser Regel sehr beschwerlich und somit auch ungenau machen, welcher Fall eintritt, wenn das rechtere lichtschwächere Object sehr hoch und das andere hellere niedrig steht, so ist es zweckmässiger, das erstere reflectiren zu lassen. In diesem Falle ist das Fernrohr der Ebene des Instrumentes so nahe zu bringen, als es nur angeht, und wenn dadurch die Bilder der beiden Objecte noch nicht gleich lichtstark werden sollten, dieses durch Vorlegung eines farbigen Glases vor den kleinen Spiegel zu bewirken.

Bei der Winkelmessung zwischen Sonne und Mond wird man, da erstere bedeutend heller als letzterer ist, nach diesem sehen und jene reflectiren lassen. Je nachdem nun der Mond links oder rechts von der Sonne steht, sind die Spiegel des Instrumentes nach oben oder unten gekehrt zu halten.

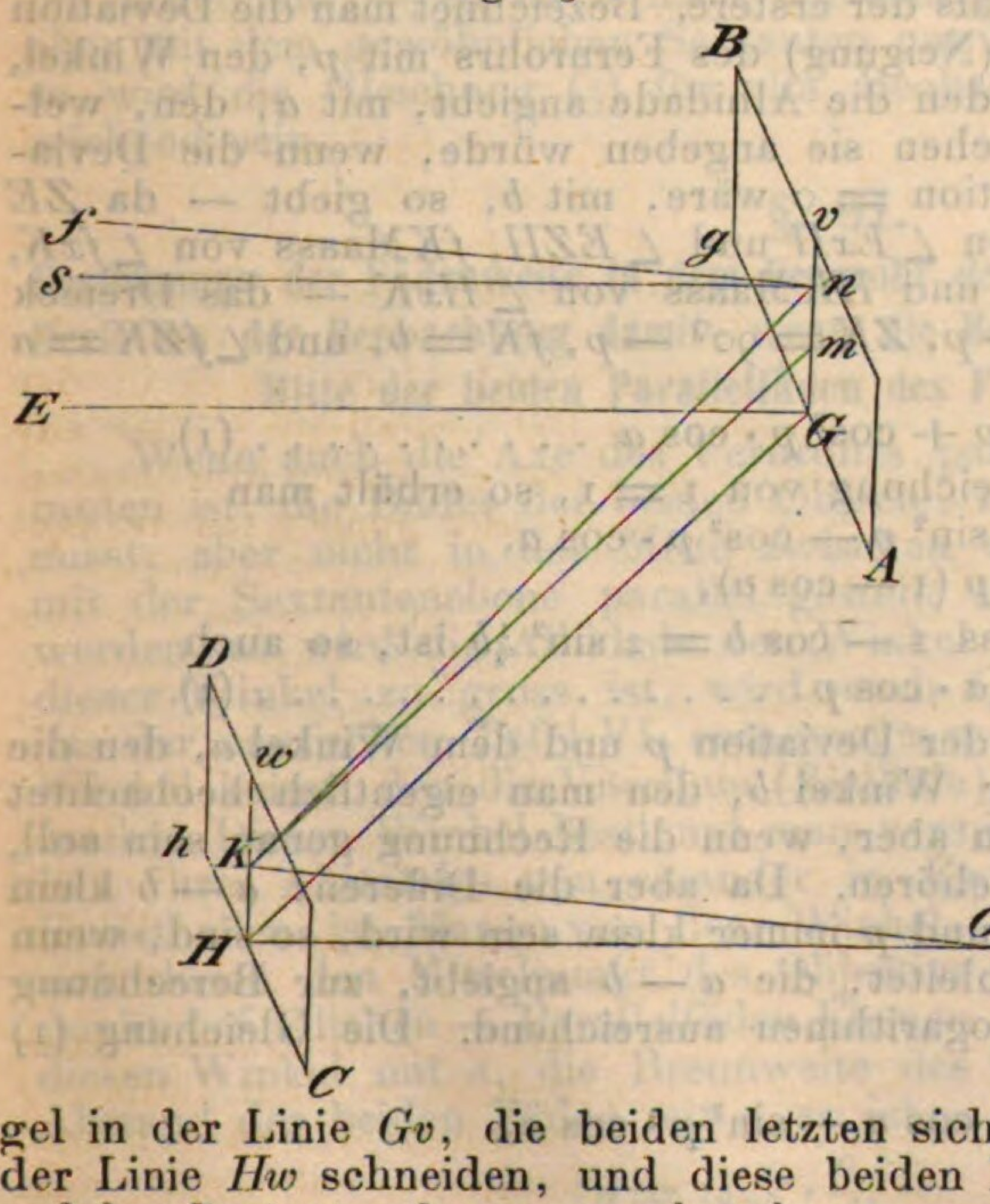
Man nehme daher den Sextanten ohne Fernrohr, lege ein rothes Glas vor den grossen Spiegel, sehe durch die Oeffnung des Fernrohrträgers und den unbelegten Theil des kleinen Spiegels nach dem Monde, halte das Instrument so, dass dessen Ebene — erweitert gedacht — die Sonne trifft und dieser der grosse Spiegel zugekehrt ist, schiebe die Alhidade nun so weit von o vorwärts, bis der nächste Rand der Sonne

Einfallslothe des Spiegels Gf denselben Winkel macht, als die Ebene PD, so liegen die reflectirten Strahlen fB und fe in der Ebene RD und die Winkel, die sie in beiden Ebenen mit einander machen, als Afa und Bfe sind gleich. Denn, es sei der Lichtstrahl Af auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie DC der drei Ebenen MN, PD und RD normal, so ist es auch der reflectirte Bf (§. 54.). Nun mache man $Bf = Af$ und ziehe durch A und B die Linien Pa und Rb parallel mit CD, so werden diese Linien auch parallel mit der Spiegelebene sein. Zieht man noch AB, so wird sie von dem Lothe Gf in h halbirt, weil die Ebene AfB normal auf der Spiegelebene steht und $\angle hfA = \angle hfB$ ist. Durch a und h lege man eine Gerade, die RB in e trifft. Da die Ebene durch ae und f gehend, wieder normal auf der Spiegelebene steht, so wird der reflectirte Strahl von af in jener Ebene liegen. Da ferner $Ah = Bh$, $\angle Aha = \angle Bhe$ und $\angle hAa = \angle hBe$, weil $Pa \mathrel{+\!\!\!\!=} Rb$, so ist $\triangle Aha \cong \triangle Bhe$ und $ah = eh$, $Aa = Be$. Es ist aber auch $\angle ahf = \angle ehf = 90^\circ$ und hf gehört beiden Dreiecken afh und efh an, folglich ist $\angle hfa = \angle hfe$ und somit fe der reflectirte Strahl von af. Dem Vorstehenden nach ist $Af = Bf$, $af = ef$ und $Aa = Be$, folglich $\angle Afa = \angle Bfe$. Was hier von dem in der Ebene PD liegenden und auf f fallenden Lichtstrahle af gezeigt ist, lässt sich auch von jedem anderen in dieser Ebene liegenden und auf f fallenden Lichtstrahle zeigen.

§. 90.

Untersuchung des Fehlers, welcher in der Winkelmessung entsteht, wenn die Axe des Fernrohrs mit der Ebene des Sextanten nicht parallel ist.

Fig. 63.

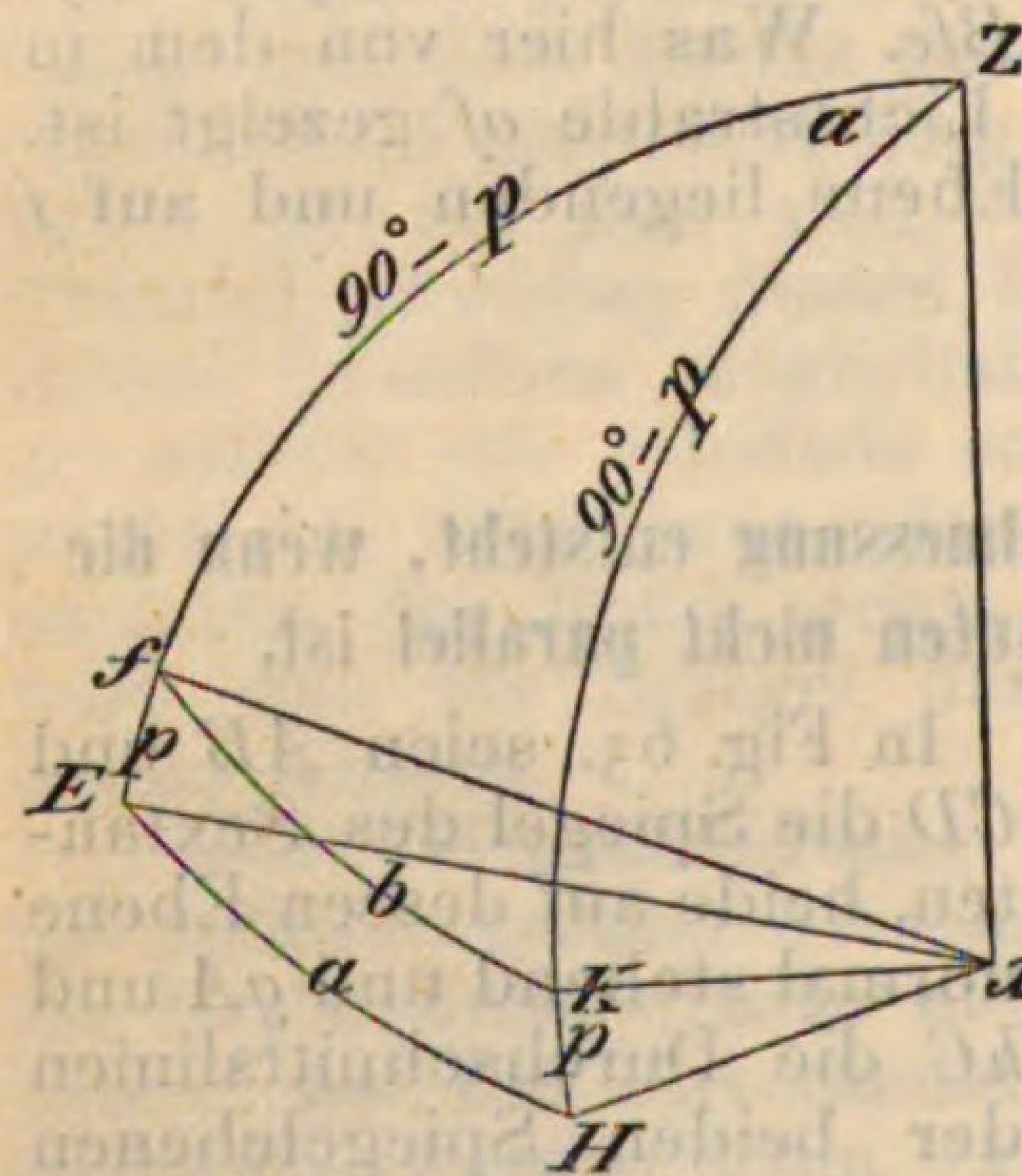


In Fig. 63. seien AB und CD die Spiegel des Sextanten, beide auf dessen Ebene normal stehend und gA und hC die Durchschnittslinien der beiden Spiegelebenen mit der Sextantenebene. In dieser Ebene seien ferner die Linien EG, GH, HO so gezogen, dass $\angle gGE = \angle AGH$ und $\angle hHG = \angle CHO$ ist. Wenn also EG ein Lichtstrahl ist, der in G auf den grossen Spiegel fällt, so wird dieser von G nach H auf den kleinen Spiegel und von diesem in der Richtung HO zurückgeworfen. Legt man nun durch die Geraden EG, GH, HO die Ebenen $snGE$, $nGHK$, KHO normal auf die Sextantenebene, so werden die beiden ersten einander und den grossen Spiegel in der Linie Gv, die beiden letzten sich und den kleinen Spiegel in der Linie Hw schneiden, und diese beiden Durchschnittslinien ebenfalls auf der Sextantenebene normal stehen.

Mit der Linie HO soll die Axe des Fernrohrs immer parallel sein (§. 80.); letztere habe aber die Lage OK, welche mit der Sextantenebene

den Winkel KOH macht, den man Deviation oder Neigung des Fernrohrs nennt. Zieht man durch K die Linie Km parallel mit HG und macht in der Ebene $KmGH$ den Winkel $mKn = \angle HOK$, so wird nach §. 89., wenn nK ein Lichtstrahl ist, dieser von dem kleinen Spiegel CD nach KO zurückgeworfen. Wird ferner durch n die Linie sn parallel mit EG gezogen und in der Ebene $snGE$ der $\angle fns = \angle nKm = \angle KOH$ gemacht, so wird der Lichtstrahl fn von f nach n, von n nach K und von K nach O zurückgeworfen. Man wird also durch das Fernrohr, welches die Richtung OK hat, bei Winkelmessungen zwei Gegenstände sehen, welche nicht in der Ebene des Sextanten liegen, wenn man beide in der Axe des Fernrohrs zur Berührung oder Deckung bringt, und der Winkel, den man eigentlich misst, ist derjenige, den die Linien fn und KO mit einander machen; die Alhidade giebt aber den Winkel, den die Strahlen EG und HO oder den doppelten Winkel, welchen die beiden Spiegel AB und CD mit einander bilden. Denkt man sich die Sextantenebene und die beiden Ebenen HKO und $fnGE$ bis an die hohle Himmelskugel erweitert, so entsteht das körperliche Dreieck $HEZx$ (Fig. 64.), worin x der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen ist, Ex und Hx die Verlängerungen von EG und HO (Fig. 63.) sind. Macht man in Fig. 64. Winkel $fxE = \angle KxH = \angle fns = \angle KOH$ (Fig. 63.) gleich der Deviation des Sextanten-Fernrohrs, so ist der Winkel fxK derjenige, den man misst und $\angle ExH$ der, den die Alhidade angiebt, der letztere also grösser als der erstere. Bezeichnet man die Deviation (Neigung) des Fernrohrs mit p, den Winkel, den die Alhidade angiebt, mit a, den, welchen sie angeben würde, wenn die Deviation $= 0$ wäre, mit b, so giebt — da $ZE = ZH = 90°$, EH Maass von $\angle ExH$ und $\angle EZH$, fK Maass von $\angle fxK$, ebenso Ef Maass von $\angle Exf$ und HK Maass von $\angle HxK$ — das Dreieck ZfK, in welchem $Zf = 90° - p$, $ZK = 90° - p$, $fK = b$, und $\angle fZK = a$ ist, die Gleichung

Fig. 64.



$$\cos b = \sin^2 p + \cos^2 p \cdot \cos a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Subtrahirt man diese Gleichung von $1 = 1$, so erhält man

$$1 - \cos b = 1 - \sin^2 p - \cos^2 p \cdot \cos a,$$
$$= \cos^2 p\,(1 - \cos a),$$

oder, wenn man erwägt, dass $1 - \cos b = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}b$ ist, so auch

$$\sin \tfrac{1}{2}b = \sin \tfrac{1}{2}a \cdot \cos p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Nach (2) kann also aus der Deviation p und dem Winkel a, den die Alhidade angiebt, leicht der Winkel b, den man eigentlich beobachtet hat, berechnet werden, wozu aber, wenn die Rechnung genau sein soll, siebenstellige Logarithmen gehören. Da aber die Differenz $a - b$ klein ist, so lange p klein bleibt, und p immer klein sein wird, so sind, wenn man aus (1) eine Formel ableitet, die $a - b$ angiebt, zur Berechnung dieser Grösse fünfstellige Logarithmen ausreichend. Die Gleichung (1) giebt auch

$$\cos b = \sin^2 p + \cos a - \sin^2 p \cdot \cos a,$$

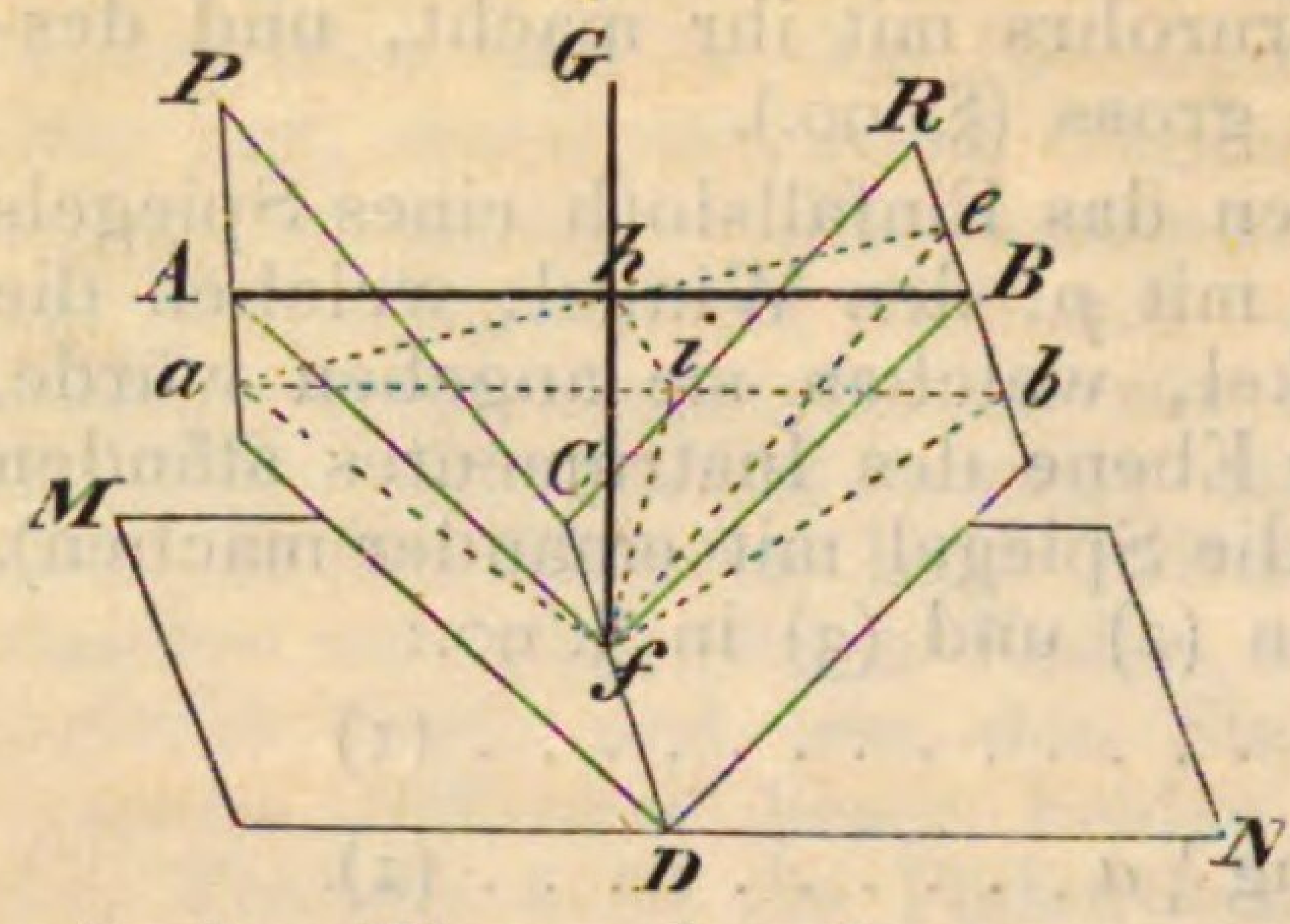
woraus folgt

$$\cos b - \cos a = \sin^2 p\,(1 - \cos a).$$

Da aber $\cos b - \cos a = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cdot \sin \tfrac{1}{2}(a + b)$, so hat man

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cdot \sin \tfrac{1}{2}(a + b) = 2 \sin^2 p \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}a,$$

Fig. 62.



Stellt (Fig. 62.) MN den kleinen Spiegel vor, ist ferner die durch A, B und f gelegte Ebene normal auf der Spiegelebene, und die durch a, b und f gehende parallel mit der Sextantenebene, so ist, wenn fi in der durch CD und fG gehenden Ebene liegt, $\angle hfi = p$. Es wird daher der in der Ebene abf liegende Lichtstrahl, wenn er in der Richtung af einfällt, so nach e zurückgeworfen, dass $\angle afA = \angle efB$ (§. 89.), folglich der Winkel, den der zurückgeworfene Strahl af mit der Ebene des Instrumentes macht, d. i. $\angle efb = 2 \angle afA$ ist. Im Dreieck fih ist:

$$\sin \angle hfi = \frac{hi}{fi},$$

$$\text{oder } \sin \angle hfi = \frac{hi}{af \cdot \cos \angle afi} = \frac{aA}{af \cdot \cos \angle afi} = \frac{\sin \angle afA}{\cos \angle afi},$$

$$\text{also } \sin \angle afA = \sin \angle hfi \cdot \cos \angle afi = \sin p \cdot \cos \angle afi,$$

oder, weil $\angle afA$ und p klein sind,

$$\angle afA = p \cdot \cos \angle afi,$$

$$\text{folglich } \angle efb = 2 \angle afA = 2\, p \cdot \cos \angle afi \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1).$$

$\angle afi$ ist constant und nahe 15°. Bringt man also auch die Ebene des Sextanten in die Ebene der beiden Gegenstände, zwischen welchen man Winkel messen will, so wird doch der von den Spiegeln zurückgeworfene Lichtstrahl mit der Sextantenebene den Winkel $2\, p \cdot \cos \angle afi$ machen. Demnach ist der richtige Winkel die Hypotenuse eines sphärischen rechtwinkeligen Dreiecks, die eine Kathete desselben der Winkel, den die Alhidade angiebt, und die andere Kathete gleich $2\, p \cdot \cos \angle afi$. Bezeichnet man nun den richtigen Winkel mit b, den, welchen die Alhidade angiebt, mit a, und den Werth von $2\, p \cdot \cos \angle afi$ mit x, so hat man

$$\cos b = \cos a \cdot \cos x \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2),$$

woraus folgt $\cos a - \cos b = \cos a\, [1 - \cos x]$;

da aber $\cos a - \cos b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(b + a) \cdot \sin \tfrac{1}{2}(b - a)$

und $1 - \cos x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x$, so auch

$$\sin \tfrac{1}{2}(b + a) \cdot \sin \tfrac{1}{2}(b - a) = \cos a \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} x,$$

oder, weil $b - a$ immer eine kleine Grösse sein wird, und man daher $\sin \tfrac{1}{2}(b + a) = \sin a$ setzen kann,

$$\sin \tfrac{1}{2}(b - a) = \operatorname{cotg} a \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} x,$$

$$\text{oder } \; b - a = 2 \sin 1'' \cdot \tfrac{1}{4} x^2 \cdot \operatorname{cotg} a,$$

$$\text{oder } \; b - a = 2 \sin 1''\, p^2 \cdot \cos^2 \angle afi \cdot \operatorname{cotg} a \,.\,. \; (3),$$

in welcher Gleichung p in Secunden zu verwandeln ist und dann auch $b - a$ in Secunden gefunden wird.

Ist z. B. $\angle afi = 15°$, die Abweichung des kleinen Spiegels von seiner normalen Stellung auf der Sextantenebene $= 1'$, und giebt die Alhidade den gemessenen Winkel $= 0°\ 33'\ 0''$, so ist nach (3)

$\angle afi = 15°$	lg cos	$= 9{,}98494 - 10$
		$9{,}96988 - 10$
$p^2 = 3600''$	lg	$= 3{,}55630$
	lg sin 1″ .	$= 4{,}68557 - 10$
	lg 2	$= 0{,}30103$
$a = 0°\ 33'\ 0''$. .	lg cotg . .	$= 2{,}01775$
$b - a = 0'\ 3'',4$.	lg	$= 0{,}53053$.

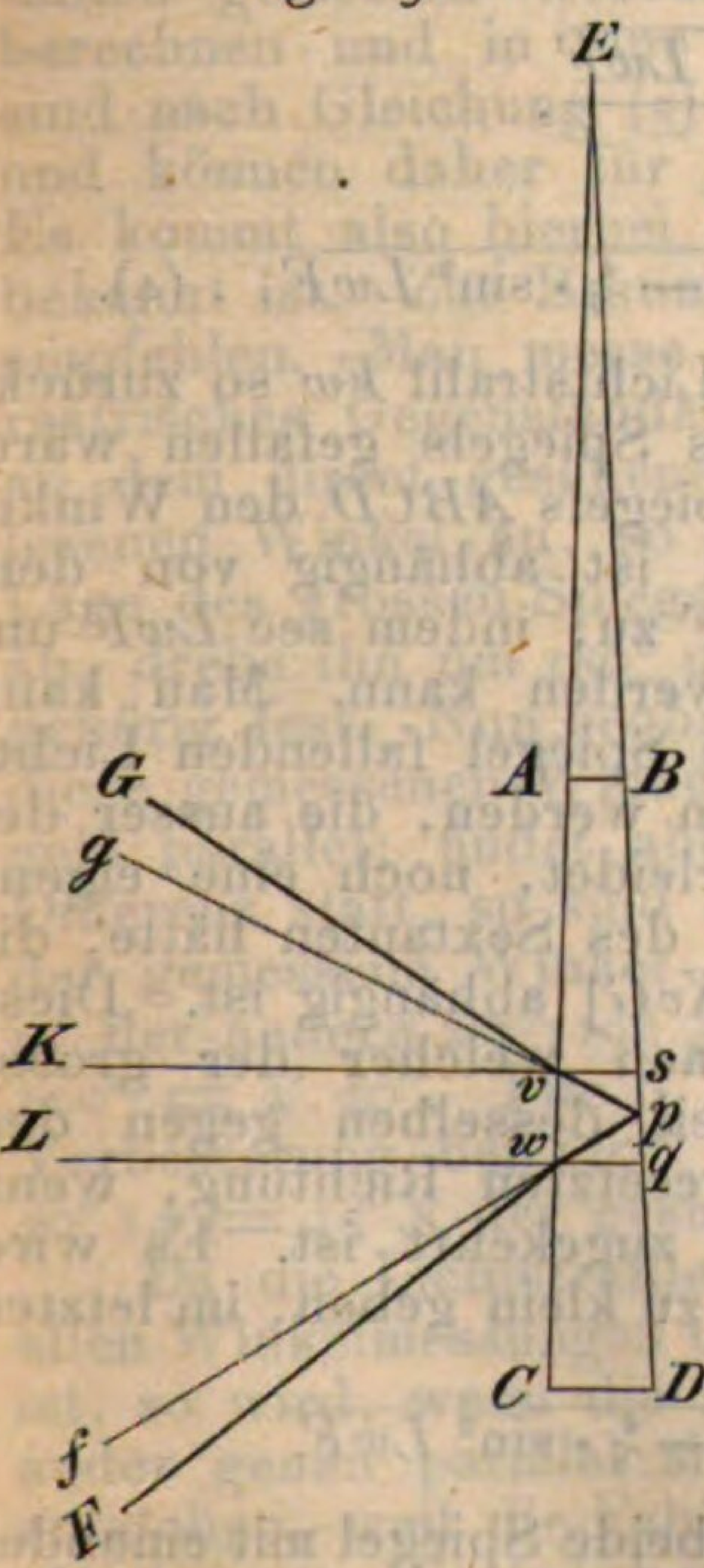
Die Alhidade giebt also den Winkel 3",4 zu klein. Bei einem Winkel von 5° wird die Alhidade bei obiger Neigung des kleinen Spiegels den Winkel 0",37 zu klein geben. Eine geringe Neigung des kleinen Spiegels gegen die Sextantenebene ist also auf die Winkel, die man gewöhnlich mit dem Sextanten misst und welche selten unter 5° sind, von fast gar keinem Einfluss.

§. 94.

Bestimmung des Fehlers, welcher in der Winkelmessung entsteht, wenn die Flächen des gläsernen Spiegels nicht parallel sind.

Wenn die belegte und unbelegte Fläche eines gläsernen Spiegels nicht mit einander parallel sind, so werden sie, erweitert gedacht, einander in einer geraden Linie durchschneiden. Der Spiegel kann nun so auf der Ebene des Sextanten stehen, dass diese Durchschnittslinie mit der Ebene des Sextanten parallel ist, oder mit derselben einen schiefen Winkel macht, oder endlich normal darauf steht. Dieser letzte Fall wird in dem Folgenden näher untersucht werden. In Fig. 65. sei *ABCD* ein Durchschnitt eines so gestellten Spiegels, parallel mit der Sextantenebene, *E* der Durchschnittspunkt der verlängerten Linien *CA* und *DB*, so ist $\angle E$ der Winkel, den die beiden Spiegelebenen mit einander machen. Auf diesen Spiegel falle nun in *w*, parallel mit der Sextantenebene, der Lichtstrahl *Fw*, und *Lw* sei das Einfallsloth auf die vordere Fläche des Spiegels *AC* und verlängert bis an die andere Fläche *BD*, so wird der Strahl in dem Glase gebrochen und nach der Richtung *wp* gehen, und zwar so, dass, wenn *pf* die Verlängerung von *pw* vorstellt,

Fig. 65.



$$\frac{m}{n} \cdot \sin \angle Lwf = \sin \angle LwF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

ist (§. 59.); in *p* angelangt, wird er wieder nach *v* so zurückgeworfen, dass $\angle wpD = \angle vpB$ ist, und bei seinem Austritt aus dem Spiegel wird er so nach *G* gebrochen, dass, wenn *pg* die Verlängerung von *pv* und *Ks* das Einfallsloth auf die vordere Fläche *CA* ist,

$$\frac{m}{n} \cdot \sin \angle Kvg = \sin \angle KvG \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Die Strahlen *Fw*, *wp*, *pv* und *vG* liegen alle in einer Ebene, die mit der Sextantenebene parallel ist.

Es ist $\angle wqp = \angle vsB = 90° - \angle E$ und $\angle vsp = 90° + \angle E$. Da nun in den Dreiecken *wpq* und *vps* der $\angle wpq = \angle vps$ ist, so hat man

$$\angle pwq + \angle wqp = \angle pvs + \angle vsp,$$

oder $\angle pwq + 90° - \angle E = \angle pvs + 90° + \angle E$,

woraus folgt $\angle pvs = \angle pwq - 2 \angle E$,

oder auch $\angle Kvg = \angle Lwf - 2 \angle E$.

Setzt man diesen Werth für $\angle Kvg$ in (2) und subtrahirt man demnächst (2) von (1), so wird erhalten

$$\sin \angle LwF - \sin \angle KvG = \frac{m}{n} [\sin \angle Lwf - \sin (\angle Lwf - 2 \angle E)],$$

$$= \frac{m}{n} [\sin Lwf - \sin Lwf \cdot \cos 2E + \cos Lwf \cdot \sin 2E],$$

$$= \frac{m}{n} [\sin Lwf \cdot 2 \sin^2 E + \cos Lwf \cdot \sin 2E],$$

oder $2 \cos \frac{1}{2} (LwF + KvG) \cdot \sin \frac{1}{2} (LwF - KvG) = \frac{m}{n} [\sin Lwf \cdot 2 \sin^2 E + \cos Lwf \cdot \sin 2E]$.

Wenn nun, wie gewöhnlich, E höchstens einige Minuten beträgt, so ist $\angle LwF$ sehr nahe gleich $\angle KvG$, und man kann daher $\sin^2 E = 0$ und $\cos \frac{1}{2} [LwF + KvG] = \cos LwF$ setzen. Dieses berücksichtigend wird die vorstehende Gleichung in folgende übergehen:

$$\sin \tfrac{1}{2} [LwF - KvG] = \frac{m}{n} \cdot \frac{\sin 2E \cdot \cos Lwf}{2 \cos LwF},$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2} [LwF - KvG] = \frac{m}{n} \cdot E \cdot \frac{\cos Lwf}{\cos LwF} \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Aus (1) folgt $\sin Lwf = \frac{n}{m} \cdot \sin LwF$,

folgl. auch $\sqrt{1 - \cos^2 Lwf} = \frac{n}{m} \sqrt{1 - \cos^2 LwF}$,

$$\text{oder } 1 - \cos^2 Lwf = \frac{n^2}{m^2} [1 - \cos^2 LwF] = \frac{n^2}{m^2} \cdot \sin^2 LwF,$$

aus letzterem $\cos Lwf = \frac{1}{m} \sqrt{m^2 - n^2 \cdot \sin^2 LwF}$.

Substituirt man diesen Werth in (3), so erhält man:

$$\tfrac{1}{2} [LwF - KvG] = \frac{E \cdot \sqrt{m^2 - n^2 \cdot \sin^2 LwF}}{n \cdot \cos LwF},$$

oder da $m = 3$ und $n = 2$ ist, so auch

$$\tfrac{1}{2} [LwF - KvG] = \tfrac{3}{2} E \cdot \sec LwF \cdot \sqrt{1 - \tfrac{4}{9} \cdot \sin^2 LwF} \,.\,.\, (4).$$

Aus dieser Gleichung folgt also, dass der Lichtstrahl Fw so zurückgeworfen wird, als ob er auf die Ebene eines Spiegels gefallen wäre, die mit der andern Fläche AC des gegebenen Spiegels $ABCD$ den Winkel macht, welchen sie angiebt. Dieser Winkel ist abhängig von dem Winkel LwF und E; er nimmt aber mit $\angle LwF$ zu, indem $\sec LwF$ unendlich gross und $\sin^2 LwF$ höchstens $= 1$ werden kann. Man kann sich also vorstellen, dass die auf den grossen Spiegel fallenden Lichtstrahlen von einer Spiegelfläche zurückgeworfen werden, die ausser der Bewegung, welche sie durch die Alhidade erleidet, noch eine eigene Bewegung auf der Alhidade selbst um die Axe des Sextanten hätte, die von der Veränderung des Winkels $\frac{1}{2} [LwF - KvG]$ abhängig ist. Diese Bewegung geht nach derselben Richtung, nach welcher der grosse Spiegel bewegt wird, wenn der dickere Theil desselben gegen den Limbus gekehrt ist, und nach der entgegengesetzten Richtung, wenn der dünnere Theil des Spiegels dem Limbus zugekehrt ist. Es wird daher die Alhidade im ersten Falle den Winkel zu klein geben, im letzten zu gross und zwar um

$$LwF - KvG = 3 \cdot E \cdot \sec LwF \cdot \sqrt{1 - \tfrac{4}{9} \cdot \sin^2 LwF}.$$

Es wird LwF sehr nahe $= 15^\circ$ sein, wenn beide Spiegel mit einander parallel sind; ist nun $E = 40''$, so wird

$\frac{1}{2} [LwF - KvG]$ nach den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\sin Lwf &= \frac{n}{m}\cdot\sin LwF \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \cos Lwf &= \sqrt{1-\tfrac{4}{9}\sin^2 LwF}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \tfrac{1}{2}[LwF - KvG] &= \tfrac{3}{2}\cdot E\cdot\sec LwF\cdot\sqrt{1-\tfrac{4}{9}\cdot\sin^2 LwF}\ .\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

leicht berechnet werden können.

c. lg 3 = 9,52288 — 10	lg cos Lwf = 9,99344 — 10
lg 2 = 0,30103	lg sec 15° = 0,01506
lg sin 15° = 9,41300 — 10	lg ($\frac{3}{2}$·40″) = 1,77815
lg sin Lwf = 9,23691 — 10	lg $\frac{1}{2}$ [LwF — KvG] = 1,78665
Lwf = 9° 56′ 10″	$\frac{LwF - KvG}{2}$ = 1′ 1″, 2.

Misst man mit dem Sextanten den Winkel 120°, so ist Lwf = 75° und

c. lg 3 = 9,52288 — 10	lg cos Lwf = 9,88370 — 10
lg 2 = 0,30103	lg sec 75° = 0,58700
lg sin 75° = 9,98494 — 10	lg ($\frac{3}{2}$·40″) = 1,77815
lg sin Lwf = 9,80885 — 10	lg $\frac{1}{2}$ [LwF — KvG] = 2,24885
Lwf = 40° 5′ 12″	$\frac{1}{2}$ [LwF — KvG] = 2′ 57″,3.

Die Differenz dieses Winkels und des bei der parallelen Lage der beiden Spiegel ist = 1′ 56″,1, davon das Doppelte = 3′ 52″,2 = LwF — KvG = der gesuchten Verbesserung. Ist nun der dickere Theil des grossen Spiegels dem einfallenden Strahle zugekehrt, so würde der richtige Winkel = 120° — 0° 3′ 52″,2 = 119° 56′ 7″,8 sein; wäre aber der dünnere demselben zugekehrt gewesen, so würde der richtige Winkel = 120° 3′ 52″,2 sein.

Man würde daher auf diese Weise für eine gegebene Neigung der Spiegelflächen, etwa für 40″ und für alle Winkel, die mit einem Sextanten gemessen werden können, die entsprechenden Verbesserungen berechnen und in eine Tafel bringen können. Diese Verbesserungen sind nach Gleichung (5) den Neigungen der Spiegelebenen proportional und können daher für jede andere Neigung leicht berechnet werden. Es kommt also hierbei darauf an, dass die Neigung der Spiegelflächen bekannt ist. Zur Bestimmung derselben ist das folgende Verfahren zu empfehlen. Man messe mit dem Sextanten einen Winkel zwischen terrestrischen Gegenständen von etwa 120°, bestimme die Indexcorrection an dem direct gesehenen Gegenstande und wende diese auf den abgelesenen Winkel an, so hat man den gemessenen Winkel in der einen Lage des grossen Spiegels. Hiernach schraube man den grossen Spiegel ab, drehe ihn um 180° und stelle ihn auf die Sextantenebene normal und gehörig fest. Nun beobachte man denselben Winkel wie vorher; stimmen diese gemessenen Winkel überein, so sind die Flächen des grossen Spiegels parallel; findet aber eine die Beobachtungsfehler überschreitende Differenz statt, so sind die Flächen gegen einander geneigt. Wäre z. B. der gemessene Winkel in der einen Lage des grossen Spiegels = 120°, in der andern = 119° 55′ 0″, so ist die Verbesserung des Winkels von 120° = 2′ 30″. Für 0′ 40″ Neigung der beiden Spiegelflächen war die Verbesserung bei 120° Winkel = 3′ 52″,2, folglich 3′ 52″,2 : 2′ 30″ = 40″ : x (= 25″,8 der gesuchten Neigung der Ebenen des grossen Spiegels).

Da die Lichtstrahlen von dem grossen auf den kleinen Spiegel bei allen Winkelmessungen unter demselben Winkel auffallen und dieser gross ist, so wird, wenn die Flächen des kleinen Spiegels auch nicht mit einander genau parallel sind, dadurch in der Winkelmessung kein Fehler entstehen, weil die Fehler, die dadurch in der Indexcorrection und dem abgelesenen Winkel hervorgebracht werden, in Bezug auf Grösse und Zeichen einander gleich sind.

Wenn die Durchschnittslinie der beiden Spiegelebenen des grossen Spiegels nicht normal auf der Sextantenebene steht, sondern mit dieser parallel läuft, oder gegen dieselbe geneigt ist, so wird die durch den einfallenden und zurückgeworfenen Strahl gehende Ebene ihre Lage gegen die Ebene des Sextanten verändern, wenn der Einfallswinkel sich verändert. Zwar würde man auch diesen Fehler der Rechnung unterwerfen können, wodurch aber nichts gewonnen wird, indem die diesfälligen Formeln sehr complicirt (verwickelt) sein würden, und auch die dazu erforderlichen Grössen nicht mit der nöthigen Genauigkeit bestimmt werden können.

Wenn in Fig. 65. von einem sehr entfernten Gegenstande ein Lichtstrahl *Fw* auf den prismatischen Spiegel fällt, so wird dieser nach zweimaliger Brechung und einmaliger Zurückwerfung in die Lage *vG* gebracht; fällt nun von demselben Gegenstande ein Strahl auf *v* — welcher mit *Fw* parallel sein wird — so wird derselbe von der vordern Fläche des Spiegels (*AC*) nicht in die Lage *vG* zurückgeworfen, weil $\angle KvG < \angle LwF$ ist, sondern diese beiden zurückgeworfenen Strahlen werden einen Winkel $= 3\,E \cdot \sec \angle LwF \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot \sin^2 \angle LwF}$ bilden. Es wird demnach ein prismatisch gläserner Spiegel von unendlich entfernten Gegenständen doppelte Bilder machen (das eine nämlich giebt die unbelegte, das andere die belegte Fläche des Spiegels) und diese Bilder werden um so weiter von einander abstehen, je grösser $\angle LwF$ ist. Lässt man also die Strahlen der Sonne unter einem schiefen Winkel auf den Spiegel fallen, so wird man nur ein Bild sehen, wenn die Flächen des Spiegels parallel sind, wenigstens zwei Bilder, wenn derselbe prismatisch ist, wovon das, welches die belegte Seite macht, das hellste sein wird. Betrachtet man beide Bilder durch ein Fernrohr, so wird man sie um so deutlicher sehen. Dies könnte man bei Bestimmung der Indexcorrection an der Sonne leicht so machen. Erscheint das reflectirte Sonnenbild doppelrandig, so sind die Flächen des grossen oder kleinen Spiegels nicht parallel. Schiebt man nun die Alhidade allmälig immer weiter den Limbus entlang, zugleich den Sextanten so nach unten neigend, dass man das reflectirte Sonnenbild im kleinen Spiegel durch das Fernrohr stets sieht, und bleibt die Doppelrandigkeit desselben unverändert, so liegt der Fehler im kleinen Spiegel; verändert aber diese Doppelrandigkeit sich, so ist der grosse Spiegel fehlerhaft. Da diese doppelten Sonnenbilder, die ein prismatischer Spiegel giebt, der genauen Beobachtung der Berührung ihrer Ränder hinderlich sind, so wird dieses ein Grund mehr für die Verwerfung solcher Spiegel sein. In dieser Beziehung sind die metallenen Spiegel den gläsernen vorzuziehen; da aber erstere leicht anlaufen, besonders von der Seeluft angegriffen werden, so haben sie stets den gläsernen nachstehen müssen.

§. 95.

Fehler, welche in der Winkelmessung entstehen, wenn der Mittelpunkt der Axe, um welche die Alhidade, also auch der grosse Spiegel sich dreht, nicht mit dem Mittelpunkte der Theilung zusammenfällt.

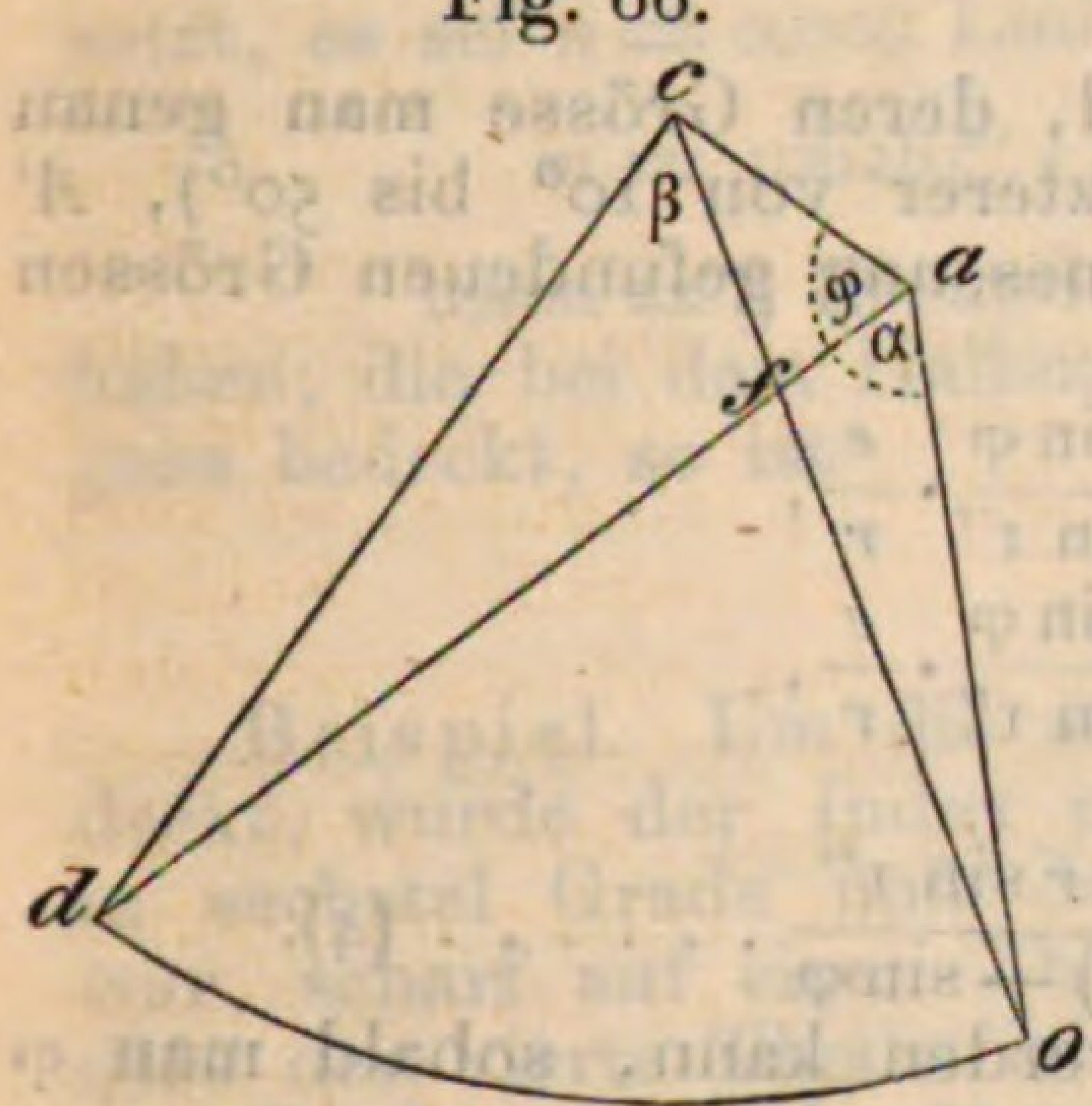
Wenn die Alhidade sich um einen anderen Punkt, als um den Mittelpunkt der Theilung dreht, so wird der Abstand dieser beiden Punkte die lineare Excentricität des Sextanten genannt. Ist die lineare Excentricität bedeutend, so wird man diese dadurch wahrnehmen, dass, wenn man den Nonius auf dem Limbus fortschiebt, beide nicht überall gleichen Abstand behalten. Wenn man diese Abstände mit der nöthigen Genauigkeit messen könnte, so würde man aus den Differenzen derselben

die lineare Excentricität berechnen können. Es kommt nun zunächst darauf an, sich von dem Vorhandensein der linearen Excentricität eines Sextanten zu überzeugen, und wenn man diese kennt, den Einfluss zu bestimmen, welcher dadurch bei der Winkelmessung in den verschiedenen Winkeln hervorgebracht wird.

Wenn ein Sextant in allen seinen Theilen berichtigt ist, d. h. die Spiegel normal auf die Ebene des Instrumentes gestellt sind und keine prismatische Gestalt haben, ferner die Axe des Fernrohrs mit der Sextantenebene parallel ist, die Theilung des Limbus und Nonius keinen Fehler hat, so kann man durch Winkelmessungen zwischen irdischen Gegenständen, die am Horizonte herum liegen, sich von dem Vorhandensein der Excentricität überzeugen.

Misst man nämlich die Winkel zwischen irdischen Gegenständen an dem Horizonte herum mit dem Sextanten, so muss ihre Summe 360° ausmachen; findet eine Abweichung statt, so muss sie weniger als die Summe der Beobachtungsfehler betragen; ist diese Abweichung grösser, so kann man sicher auf das Vorhandensein eines Excentricitätsfehlers schliessen. Um nun die lineare Excentricität zu bestimmen, messe man mit dem Sextanten Winkel, deren Grösse sehr ungleich ist und die man genau kennt. Aus den Abweichungen und der Grösse dieser Winkel wird man dann nicht allein die lineare Excentricität, sondern auch den Fehler bestimmen können, um welchen der Sextant jeden Winkel, den man mit demselben misst, zu gross oder zu klein giebt.

Fig. 66.



Es sei (Fig. 66.) c der Mittelpunkt des Limbus od, a der Punkt, um welchen die Alhidade sich dreht, o der Nullpunkt des Limbus und die Indexcorrection $= 0$. Hat man nun, um einen bekannten Winkel zu messen, die Alhidade in die Lage ad gebracht, so ist der richtige Winkel oad, die Alhidade giebt aber den Winkel ocd an, denn der Bogen od ist Maass von diesem Winkel. Bei den Dreiecken cfd und afo, ist $\angle cfa$ der gemeinschaftliche äussere Winkel dieser Dreiecke, deshalb

$$\angle oad + \angle o = \angle ocd + \angle d \text{ und}$$
$$\angle oad = \angle ocd + \angle d - \angle o.$$

Setzt man nun $\angle ocd = \beta$, $\angle oad = \alpha$, $\angle oac = \varphi$, von dem Schenkel ao nach d zu bis 360° gezählt, co oder $cd = r$ und $ca = e$, so ist

$$\alpha = \beta + d - o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und die Dreiecke oac und cad liefern die Gleichungen:

$$\sin o = \sin \varphi \cdot \frac{ca}{cd} = \sin \varphi \cdot \frac{e}{r}$$

$$\text{und } \sin d = \sin (\varphi - \alpha) \cdot \frac{ca}{cd} = \sin (\varphi - \alpha) \cdot \frac{e}{r},$$

oder, da o und d immer nur kleine Grössen sind, so auch

$$o = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r}$$

$$\text{und } d = \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r}.$$

Setzt man diese Werthe für o und d in (1), so ist

$$\alpha = \beta + \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r} - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r};$$

erwägt man aber, dass α und β immer sehr wenig von einander abweichen werden, so ist auch

$$\alpha = \beta + \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r} - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{und } \alpha - \beta = \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r} - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r} \quad \ldots\ldots (3).$$

Nach (3) kann man also, wenn e und φ bekannt sind, — r braucht nur nachgemessen zu werden — die Verbesserung $(\alpha - \beta)$, welche man auf den abgelesenen Winkel β anzuwenden hat, leicht berechnen.

Der erste Theil dieser Verbesserung in (3) ist veränderlich; letztere wird daher am grössten sein, wenn

$$\varphi - \beta = -90^\circ \text{ oder } \beta = 90^\circ + \varphi \text{ ist,}$$

in welchem Falle $\alpha - \beta = -\frac{e}{r \cdot \sin 1''} \cdot [1 + \sin \varphi]$ wird.

Nimmt man auch noch φ veränderlich, so ist der grösste, von der Excentricität herrührende Fehler $= 2 \frac{e}{r \cdot \sin 1''}$.

Wenn man für zwei ziemlich weit von einander entfernte Punkte des Limbus eines Sextanten die von der Excentricität e herrührenden Verbesserungen (Excentricitätsfehler) kennt, so kann man dadurch e und φ bestimmen.

Sind z. B. A und B die beiden Winkel, deren Grösse man genau kennt (ersterer etwa von 80° bis 120°, letzterer von 10° bis 50°), A' und B' die mit dem Sextanten durch Nachmessung gefundenen Grössen derselben Winkel, so hat man nach (3)

$$A - A' = \frac{\sin(\varphi - A')}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r} - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r},$$

$$B - B' = \frac{\sin(\varphi - B')}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r} - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \cdot \frac{e}{r},$$

woraus folgt:

$$e = \frac{(A - A') \cdot r \sin 1''}{\sin(\varphi - A') - \sin \varphi} = \frac{(B - B') \cdot r \sin 1''}{\sin(\varphi - B') - \sin \varphi} \quad \ldots\ldots (4),$$

nach welcher Gleichung also e gefunden werden kann, sobald man φ kennt.

Dividirt man die beiden gleichen Ausdrücke von e mit $r \cdot \sin 1''$, so erhält man

$$\frac{A - A'}{\sin(\varphi - A') - \sin \varphi} = \frac{B - B'}{\sin(\varphi - B') - \sin \varphi},$$

worin nur die Unbekannte φ vorkommt, also bestimmt werden kann.

Schafft man nun die Nenner weg, so ist

$$(A - A') \cdot [\sin \varphi \cdot \cos B' - \cos \varphi \cdot \sin B' - \sin \varphi]$$
$$= (B - B') \cdot [\sin \varphi \cdot \cos A' - \cos \varphi \cdot \sin A' - \sin \varphi],$$

oder

$$[(B - B') \cdot (1 - \cos A') - (A - A') \cdot (1 - \cos B')] \cdot \sin \varphi$$
$$= [(A - A') \cdot \sin B' - (B - B') \cdot \sin A'] \cdot \cos \varphi,$$

oder

$$2 \cdot [(B - B') \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} A' - (A - A') \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} B'] \sin \varphi$$
$$= [(A - A') \cdot \sin B' - (B - B') \cdot \sin A'] \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{also } \operatorname{tang} \varphi = \frac{(A - A') \cdot \sin B' - (B - B') \cdot \sin A'}{2 \cdot [(B - B') \cdot \sin^2 \frac{1}{2} A' - (A - A') \cdot \sin^2 \frac{1}{2} B']} \quad \ldots . (5).$$

Nach dieser Gleichung wird man φ berechnen können, auch kein Zweifel darüber bleiben, in welchem Quadranten φ liegt, denn der Zähler in (5) ist als $\sin \varphi$ und der Nenner als $\cos \varphi$ anzusehen. Je genauer man die Fehler $A - A'$ und $B - B'$ kennt, desto genauer wird man auch φ und e bestimmen können.

§. 96.
Ueber die Feinheit der Theilstriche.

Die Genauigkeit der Ablesung auf einem Sextanten ist mit von der Feinheit der Theilstriche des Limbus und Nonius abhängig. Diese Theilstriche müssen von gleicher Dicke und weder zu stark noch zu schwach sein. Im ersten Falle wird das Ablesen ungenau, weil dicke Theilstriche einen gewissen Theil des Bogens bedecken und so den abzulesenden Winkel um eine entsprechende Winkeldifferenz unsicher machen; im letzten Falle wird das Ablesen, namentlich bei Licht, sehr erschwert und somit auch ungenau. Jene Winkeldifferenz wird man auf folgende Weise erhalten. Es sei die Dicke des Theilstriches $= n$, der Halbmesser des Gradbogens $= r$, so wird der Winkel, den die Dicke des Theilstriches einnimmt $= 206265'' \cdot \frac{n}{r} = m$ Secunden sein. Wenn nun die Dicke des Theilstriches m Secunden des Bogens bedeckt, so beträgt die Unsicherheit der Ablesung nicht m Secunden, denn vermittelst einer Loupe wird man bequem unterscheiden können, ob die Theilstriche des Limbus und Vernier genau zusammentreffen oder um die Hälfte oder um den dritten oder vierten Theil ihrer Dicke von einander abstehen, so dass die Unsicherheit im Ablesen zu $\frac{m}{4}$ Secunden angenommen werden kann. Gesetzt, es sei $n = 0{,}008$ Linien, $r = 7$ Zoll, so ist

$$m = 206265'' \cdot \frac{0{,}008}{84} = 19'',6$$ und die Unsicherheit beim Ablesen $= 5$ Secunden. Will man die Dicke n des Theilstriches haben, die bei dem Halbmesser r den Winkel von m Secunden des Bogens bedeckt, so ist

$$n = r \cdot \frac{m''}{206265''}.$$

Beispiel. Um die m Secunden zu finden, die ein Theilstrich bedeckt, wurde der Index eines siebenzölligen Sextanten, dessen Limbus in sechstel Grade und dessen Vernier in sechstel Minuten eingetheilt war, scharf auf einen Theilstrich des Limbus eingestellt und gefunden, dass der vierte Theilstrich des Vernier kaum den ihm zunächststehenden Limbusstrich berührte. Demnach bedeckte ein solcher Theilstrich auf dem Limbus 40″; da aber der Limbus in doppelt so viel Grade eingetheilt ist, als er eigentlich enthält, so ist der Winkel, den der Theilstrich einnimmt $= 20''$, also seine Dicke

$$n = 84''' \cdot \frac{20''}{206265''} = 0{,}00814 \text{ Linien.}$$

Je grösser der Radius eines Sextanten ist, desto feinere Unterabtheilungen wird sein Limbus und Vernier gestatten und um so genauer wird man auf ihm ablesen können.

§. 97.
Ueber die wahrscheinliche Genauigkeit, mit welcher man vermittelst eines Sextanten die beiden Bilder zur Berührung oder Deckung bringen kann.

Die Genauigkeit, mit welcher die beiden Bilder wahrscheinlich zur Berührung oder Deckung gebracht werden können, ist von der Güte und Vergrösserung des Fernrohrs, von der Beschaffenheit der Spiegel und der Helligkeit der Objecte, zwischen welchen Winkel gemessen werden, abhängig.

Sind nämlich die Spiegel nicht sehr gut gearbeitet, so wird man nie das reflectirte Bild deutlich sehen, und wenn das Fernrohr nicht die gehörige Lichtstärke hat, so sind die beiden Bilder ebenfalls nicht gut zu sehen. Diesen Fehler nun, den man bei der Berührung der beiden Bilder begehen kann, wird man nur durch Versuche bestimmen können. Nimmt man z. B. mit dem Sextanten die Höhe der Sonne nahe am Mittage und beobachtet die Zeitsecunden, welche verfliessen, bis man bemerkt, dass die beiden Sonnenbilder auseinander oder ineinander gehen, so wird die dieser Zeitänderung entsprechende Höhenänderung der Fehler sein, den man bei der Berührung der beiden Bilder machen kann.

Dieser Fehler $\Delta\, h = -\, \Delta\, t \cdot \frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \sin t}{\cos h}$, (§. 71. (IV.) Differentialrechnung), worin $\Delta\, t$ die Zeitrechnung, $\Delta\, h$ die ihr entsprechende Höhenänderung, φ die Polhöhe, δ die Declination, t der Stundenwinkel und h die Höhe der Sonne vorstellt.

1849 den 30. October in Danzig um $11^h\ 33'\ 1''$ wurde mit einem Sextanten die Doppelhöhe des Sonnenunterrandes $= 43°\ 5'$ beobachtet, und es vergingen 8,22 Zeitsecunden, bis das Auseinandergehen der Sonnenbilder wahrnehmbar wurde. Die U. C. geg. w. Zeit $= +\ 16'\ 3''$, die I. C. $= 0'\ 0''$.

$$\begin{aligned}
\Delta\, t &= 123'',3 \text{ log } \ldots = 2{,}09096 \\
t &= 2°\ 44' \text{ log sin} = 8{,}67841 - 10 \\
\varphi &= 54°\ 21' \text{ » cos} = 9{,}76554 - 10 \\
\delta &= 13°\ 50' \text{ » cos} = 9{,}98722 - 10 \\
h &= 21°\ 48' \text{ » sec} = 0{,}03222 \\
\hline
& 3'',6 \text{ log } = 0{,}55435.
\end{aligned}$$

$\Delta\, h = 7'',2$ war also bei Beobachtung der Berührung oder Deckung der beiden Sonnenbilder die Unsicherheit.

§. 98.

Ueber die Genauigkeit, mit welcher es anzunehmen ist, dass man vermittelst eines Spiegelsextanten Winkel messen kann.

Durch die vorhergehenden Untersuchungen wird es möglich, die wahrscheinliche Genauigkeit anzugeben, mit welcher Winkel vermittelst eines Spiegelsextanten gemessen werden können. Vorausgesetzt wird hierbei nur, dass der Sextant mit einem Excentricitätsfehler und Theilungsfehler nicht behaftet ist und seine Spiegel nicht prismatisch sind. Die Axe des Fernrohrs wird man auf 5 Minuten genau parallel mit der Ebene des Sextanten stellen können (§. 80. und §. 90.) und dadurch der Winkel höchstens um $1''$ zu gross werden. Den grossen Spiegel wird man sicher genauer als auf 5 Minuten normal auf die Sextantenebene stellen können (§. 78.) und letztere bewirken in der Winkelmessung höchstens einen Fehler von $0'',5$ (§. 92.). Die geringe Neigung, welche man gewöhnlich dem kleinen Spiegel gegen die Sextantenebene giebt, ist nur bei sehr kleinen Winkeln von einigem Einfluss (§. 93.), weshalb er hier $= 0$ angenommen werden kann. Beim Ablesen wird man einen Fehler von 5, höchstens 10 Secunden begehen können (§. 96.) und bei der Berührung oder Deckung der beiden Bilder einen von 7 Secunden (§. 97.). Mit den letzten beiden Fehlern ist auch die Indexcorrection behaftet. Wenn nun diese Fehler alle auf eine Seite fallen, was, wenn auch nicht wahrscheinlich, doch möglich ist, so wird der grösste Fehler $= 1'' + 0'',5 + 5'' + 7'',2 + 5'' + 7'',2 = 25'',9$ sein, d. h. ein geübter Beobachter mit einem guten Sextanten versehen, wird bei den Winkelmessungen mit diesem Instrumente noch auf 26 Secunden Unsicherheit rechnen müssen.

§. 99.

Ueber die Grenze der Winkelmessung mit dem Spiegelsextanten und dessen Benutzung als Heliotrop bei trigonometrischen Messungen.

Der Winkel AfB (Fig. 62.) sei derjenige, welchen die von dem grossen auf den kleinen Spiegel fallenden mit den von diesem zurückgeworfenen und in die Gesichtslinie fallenden Lichtstrahlen bilden. Dieser Winkel, der hier mit $2S$ bezeichnet werden mag, ist sehr nahe bei allen Sextanten $= 30°$ (§. 93.). Wenngleich derselbe auch nicht unmittelbar bei den Winkelmessungen, sondern nur bei den Correctionsformeln in Betracht kommt, so ist dieserhalb die genaue Bestimmung desselben schon nothwendig. Schraubt man die beiden Spiegel des Sextanten und auch dessen Fernrohrträger ab und misst nun die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der respectiven Zapfen, so hat man die drei Seiten eines ebenen Dreiecks, in welchem $2S$ der eine Winkel ist, und somit hinreichend genau berechnet werden kann.

Dieser Winkel bestimmt die Grenze, bis zu welcher mit dem Sextanten noch Winkel gemessen werden können, denn aus Fig. 56. ersieht man, dass alle Reflection aufhört, wenn der grosse Spiegel mit dem kleinen den Winkel $= 90° - S$ macht. Diesemnach ist die Grenze der Winkelmessung $= 180° - 2S = 150°$ (§. 72.). Ferner kann dieser Winkel zur Bestimmung der Spiegelparallaxe benutzt werden. In Fig. 57. ist $\angle gO'P = p$ die Spiegelparallaxe (§. 76.), $\angle ghP = 2S$, gh die Entfernung zwischen den beiden Spiegeln, die gemessen werden kann, und $O'h$ die Entfernung des Objectes von dem kleinen Spiegel.

Es ist $gP = gh \cdot \sin 2S$

und $$\operatorname{tang} p = \frac{gh \cdot \sin 2S}{O'h + gh \cdot \cos 2S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

oder wenn p klein ist, so in Secunden

$$p = \frac{gh}{O'h} \cdot \frac{\sin 2S}{\sin 1''} - \frac{(gh)^2}{(O'h)^2} \cdot \frac{\sin 4S}{2 \sin 1''} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Der Winkel $2S$ kommt auch noch vor, wenn man den Punkt in der Gesichtslinie bestimmen will, der die Spitze des gemessenen Winkels bei nahen Gegenständen ist, wenn man nämlich auf das Abgelesene die an einem sehr entfernten Gegenstande untersuchte Indexcorrection anwendet. Dieses ist der Punkt j (Fig. 57.), in welchem der von dem reflectirten Gegenstande auf den grossen Spiegel fallende Lichtstrahl in seiner Verlängerung die Gesichtslinie schneidet. Bezeichnet man diesen Winkel mit s und behält man die frühere Bezeichnung bei, so ist

$$hj = gh \cdot \cos 2S + \frac{gh \cdot \sin 2S}{\operatorname{tang} s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Diese Bestimmung hat keinen besonderen Werth, sie kann, wie bereits bemerkt, nur bei Winkeln zwischen irdischen Gegenständen in Betracht kommen, und auch da wird sie ganz überflüssig, wenn, wie in §. 76. angegeben ist, verfahren wird.

Wenn man den Sextanten als Heliotrop benutzen will, so muss der Winkel $2S$ genau bekannt sein. Ist (Fig. 57.) f die Sonne, so wird der Gegenstand, welcher in der Richtung gM liegt, das reflectirte Sonnenlicht empfangen; soll dieses nach dem Gegenstande O' gelangen — diesen so weit entfernt gedacht, dass er die Spiegelparallaxe $= 0$ giebt — so wird man die Alhidade noch um $2S$ nach M zu bewegen müssen, oder, was dasselbe ist, den grossen Spiegel in demselben Sinne um S. Um also von dem Objecte g aus (Fig. 57.) das Licht der Sonne in f nach dem Objecte O' vermittelst des Sextanten zu werfen, bringe man die Sextantenebene in die Ebene $O'gf$, das Fernrohr auf das Object O' gerichtet, und schiebe die Alhidade so weit vorwärts, bis das Sonnenbild dieses Object

deckt. Demnächst lese man den Stand der Alhidade ab und schiebe diese — ohne die Lage des Instrumentes zu verändern — um $2S$ auf dem Limbus weiter vorwärts, so wird das Sonnenlicht von dem grossen Spiegel nach O' geworfen. Da wegen der täglichen Bewegung der Sonne der Winkel zwischen dieser und dem Objecte O' sich stets verändert, so wird man diesen Winkel recht oft nehmen und hiernach sofort die Alhidade um $2S$ weiter vorwärts zu schieben haben.

§. 99a.

Vom Durchbiegen des Sextanten und seiner Alhidade, sowie der Breite des kleinen Spiegels im Verhältnisse zu der des grossen.

Beim Untersuchen der Indexcorrection an der Sonne kann man sich am besten überzeugen, ob der Sextant von den genannten Fehlern frei ist. Nachdem man die Randberührung der beiden Sonnenbilder sorgfältig gemacht hat, drehe man den Sextanten um seine Fernrohraxe allmälig ganz herum, die Sonnenbilder stets betrachtend. Erleidet die Berührung der Sonnenbilder bei dieser Drehung eine Aenderung, d. h. gehen dieselben ineinander oder auseinander, so biegt der Sextant durch; bleibt die Berührung der Sonnenbilder aber unverändert bei dieser Drehung des Sextanten, so biegt er nicht durch. Im ersten Falle wird er zu verwerfen sein, denn gute Beobachtungen kann man damit nicht machen. Vorausgesetzt wird hierbei, dass die Spiegel feststehen auf der Sextantenebene. Anlangend die Durchbiegung der Alhidade, so giebt diese sich dadurch zu erkennen, dass die Ablesungen nicht übereinstimmen, wenn man die Berührung der Sonnenbilder bewirkt, ein Mal durch Bewegung der Alhidade vorwärts, das andere Mal rückwärts. Links vom Nullpunkte wird man im ersten Falle zu viel, im zweiten zu wenig ablesen; rechts vom Nullpunkte ist es selbstfolglich umgekehrt. Biegt die Alhidade nicht durch, so müssen die Berührungen der Sonnenbilder vermittelst der Feinschraube erst rechtsum drehend gemacht und abgelesen, demnächst linksum drehend gemacht und abgelesen, oder umgekehrt, sehr nahe denselben Stand der Alhidade auf dem Limbus ergeben. Alhidaden, die durchbiegen, dürfen gerade nicht verworfen werden, sondern man kann ihren Durchbiegungs-Fehler dadurch beseitigen, dass man die Indexcorrection und die Winkelmessung, beide nur macht durch die Bewegung der Alhidade vorwärts oder rückwärts, in welchen Fällen mit demselben Fehler behaftet sein wird sowohl der abgelesene Winkel als die Indexcorrection; folglich wird der für letztere verbesserte Winkel, d. i. der gemessene, richtig sein müssen. Man kann auch so verfahren:

Bei Beobachtung der Indexcorrection bestimme man diese, die Alhidade ebenso oft vorwärts als rückwärts bewegend, und nehme aus allen diesfälligen Ablesungen das Mittel, so hat man diejenige Indexcorrection, die frei von der Durchbiegung der Alhidade ist. Bei der Winkelmessung verfahre man ebenso. Die Alhidaden sind übrigens so stark gemacht, dass sie nicht leicht durchbiegen können.

Einleuchtend ist, dass der Durchmesser des Objectivs im Sextanten-Fernrohr gleich der Breite des kleinen Spiegels sein muss, denn es hat die Lichtstrahlen, von diesem reflectirt, aufzufangen. Damit der grosse Spiegel bei Winkelmessungen von 120° auf den kleinen Spiegel noch so viel Lichtstrahlen werfen kann, als dieser zu fassen vermag, wird er, wie man sieht, breiter als der kleine sein müssen. Betrachtet man den Spiegelsextanten und Octanten in dieser Beziehung, so findet man, dass sehr nahe die Breite des grossen Spiegels gleich der Breite des kleinen mal Secante 60° beim Sextanten, und mal Secante 45° beim Octanten zu nehmen sein wird.

Nautische Astronomie.

Einleitung.

Die nautische Astronomie lehrt, wie auf See vermittelst astronomischer Beobachtungen und Berechnungen der Ort des Schiffes bestimmt, also auch der nach der Besteckrechnung gefundene Ort desselben berichtigt werden kann.

Diese Berichtigung wird der Seemann, wenn auf offenem Meere befindlich, fast täglich wegen der nicht zu beseitigenden Ungenauigkeit in den bei der Besteckrechnung gebrauchten gesegelten Cursen, Distanzen u. s. w. vorzunehmen haben. Er muss daher mit denjenigen Instrumenten versehen sein, die erforderlich sind, um die zu gedachter Berichtigung nöthigen astronomischen Beobachtungen anstellen zu können und letztere nicht allein rechtzeitig mit Sicherheit und Schnelligkeit zu machen, sondern auch zu berechnen verstehen. Der Seemann wird daher mit den in obiger Beziehung anzuwendenden Methoden vertraut sein müssen, wovon er jedoch diejenigen als unpractisch ausschliesst, welche entweder eine mit nautischen Instrumenten auf einem so beweglichen Observatorium wie das Schiff ist, nicht zu erreichende Genauigkeit im Beobachten voraussetzen, oder die eine so zeitraubende Rechnung erfordern, dass sie für den Seegebrauch dadurch an Werth verlieren. Bei den Formeln zur Berechnung von nautisch-astronomischen Beobachtungen muss möglichst auf Leichtigkeit, Einfachheit und Unzweideutigkeit für jeden denkbaren Fall gesehen werden. Es würde unnöthige Mühe und Zeitaufwand sein, wenn man bei diesen Berechnungen nach einer grösseren Genauigkeit streben wollte, als dass der Fehler derselben, gegen den durch den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler hervorgebrachten, gleichsam verschwindet.

§. 100.

Grade, Minuten und Secunden in Stunden, Zeitminuten und Zeitsecunden zu verwandeln und umgekehrt.

I. Bogen in Zeit zu verwandeln.

Ein Himmelskörper oder ein anderer bestimmter Punkt am Himmel ändert von einem Meridiandurchgange bis zum nächstfolgenden seinen Stundenwinkel um 360°, und weil die Zeit, welche hierzu nöthig ist, gleich 24 Stunden angenommen wird, so folgt daraus, wenn man die Aenderung des Stundenwinkels als bestimmt annimmt, obgleich die dazu erforderliche Zeit auch verschieden sein kann, wie dieses z. B. bei der wirklichen Sonne der Fall ist, nachstehende Proportion zur Verwandelung von Bogen in Zeit:

$360^\circ : 24^h = 15^\circ : 1^h \ldots\ldots$ oder allgemein $= a^\circ : x^h$,
$15^\circ : 1^h = 15'$ Bog. : $1'$ Zeit » » $= a'$ Bog. : x' Zeit und
$15'$ Bog. : $1'$ Zeit $= 15''$ Bog. : $1''$ Zeit » » $= a''$ Bog. : x'' in Zeit.

Es ist also

$$\frac{a^\circ}{15^\circ} \cdot 1^h = x^h, \ldots\ldots \frac{a^\circ}{15^\circ} \cdot 60' \text{ Zeit} = a \cdot 4 = x' \text{ Zeit},$$

$$\frac{a' \text{ Bog.}}{15' \text{ Bog.}} \cdot 1' \text{Zeit} = x' \text{ Zeit} \quad \text{und} \quad \frac{a' \text{ Bog.}}{15' \text{ Bog.}} \cdot 60'' \text{ Zeit} = a \cdot 4 = x'' \text{ Zeit}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht nachstehende Regel zur Verwandlung von Bogen in Zeit:

Man dividire die gegebenen Grade mit 15, soweit der Quotient eine ganze Zahl wird, und multiplicire den Rest mit 4, so ist das Erstere eine Anzahl Stunden und das Letztere eine Anzahl Zeitminuten, welche zusammengenommen gleich den gegebenen Graden in Zeit sind.

Ebenso dividire man die Bogenminuten mit 15 und multiplicire den Rest mit 4, so ist die ganze Zahl des Quotienten gleich der Anzahl Zeitminuten, und der Rest multiplicirt mit 4, gleich der Anzahl Zeitsecunden, welche zusammengenommen gleich den gegebenen Bogenminuten in Zeit sind.

Die gegebenen Bogensecunden aber dividire man mit 15 und suche den Quotienten auf Decimalstellen, wenn man genauer als auf volle Secunden rechnen will; so ist derselbe gleich der Anzahl Zeitsecunden, die den gegebenen Bogensecunden entsprechen.

Hat man also Grade, Minuten und Secunden, die in Zeit verwandelt werden sollen, so verfahre man nach obigen Regeln und addire die Zeitgrössen, welche die Grade, Minuten und Secunden geben, welches leicht mittelst Kopfrechnens, ohne andere Ziffern als zum Resultat erforderlich sind, hinzuschreiben, geschehen kann.

Beispiel 1. Es sollen $48^\circ\ 27'\ 15''$ in Zeit verwandelt werden.

$48^\circ\ 27'\ 15''$ sind $= 3^h\ 13'\ 49''$; denn

$$48^\circ = \frac{48}{15} = 3^h + 3 \cdot 4' = 3^h\ 12',$$

$$27' = \frac{27}{15} = 1' + 12 \cdot 4'' = 0^h\ 1'\ 48'',$$

$$15'' = \frac{15}{15} = \ldots\ldots \quad 0'\ 1''$$

Summa $= 3^h\ 13'\ 49''$.

Beispiel 2. Es sollen $106^\circ\ 3'\ 27''$ in Zeit verwandelt werden.

$106^\circ\ 3'\ 27''$ sind $= 7^h\ 4'\ 13'',8$; denn

$$106^\circ = \frac{106}{15} = 7^h + 1 \cdot 4' = 7^h\ 4',$$

$$3' = \frac{3}{15} = 0' + 3 \cdot 4'' = 0'\ 12'',$$

$$27'' = \frac{27}{15} = \ldots\ldots \quad 1'',8$$

Summa $= 7^h\ 4'\ 13'',8$.

II. Zeit in Bogen zu verwandeln.

Aus I. ergeben sich leicht nachstehende Proportionen:

$$24^h : 360^\circ = 1^h : 15^\circ \ldots\ldots = a^h : x^\circ,$$
$$1^h : 15^\circ = 1' \text{ Zeit} : 15' \text{ Bog.} = a' \text{ Zeit} : x' \text{ Bogen und}$$
$$1' \text{ Zeit} : 15' \text{ Bog.} = 1'' \text{ Zeit} : 15'' \text{ Bog.} = a'' \text{ Zeit} : x'' \text{ in Bogen.}$$

Hieraus ergiebt sich nachstehende Regel zur Verwandlung von Zeit in Bogen:

Man multiplicire die gegebene Anzahl Stunden mit 15 und addire dazu den Quotienten der gegebenen Minuten dividirt durch 4, so weit dieser eine ganze Zahl ist, so ist die Summe eine Anzahl Grade; den Rest der Minuten multiplicire man mit 15 und addire zu diesem Producte den Quotienten der gegebenen Anzahl Secunden dividirt durch 4, so weit dieser eine ganze Zahl ist; den Rest der Secunden multiplicire man mit 15, so ist das Product eine Anzahl Bogensecunden. Die gefundenen Grade, Minuten und Secunden summirt, sind gleich der gegebenen Zeit, in Bogen verwandelt.

Beispiel 1. Es sollen $16^h\ 29'\ 34''$ in Bogen verwandelt werden.

$16^h\ 29'\ 34''$ sind $= 247^\circ\ 23'\ 30''$; denn

$$16^h = 16 \cdot 15 \ldots\ldots = 240^\circ,$$
$$29' = \frac{29}{4} = 7^\circ + 1 \cdot 15' = 7^\circ\ 15',$$
$$34'' = \frac{34}{4} = 8' + 2 \cdot 15'' = 8'\ 30''$$
$$\text{Summa} = 247^\circ\ 23'\ 30''.$$

Beispiel 2. $7^h\ 2'\ 15''$ sollen in Bogen verwandelt werden.

$7^h\ 2'\ 15''$ sind $= 105^\circ\ 33'\ 45''$; denn

$$7^h = 7 \cdot 15 \ldots\ldots = 105^\circ,$$
$$2' = \frac{2}{4} = 0^\circ + 2 \cdot 15' = 0^\circ\ 30',$$
$$15'' = \frac{15}{4} = 3' + 3 \cdot 15'' = 3'\ 45''$$
$$\text{Summa} = 105^\circ\ 33'\ 45''.$$

§. 101.

Bürgerliche Zeit in astronomische, und astronomische in bürgerliche Zeit zu verwandeln.

Der bürgerliche Tag fängt um Mitternacht an, die Dauer desselben ist 12 Stunden Vormittags, oder von Mitternacht bis Mittag, und 12 Stunden Nachmittags, von Mittag bis Mitternacht.

Der astronomische Tag desselben Datums beginnt dagegen 12 Stunden später, also Mittags, und die Stunden werden bis 24 gezählt.

Das bürgerliche Datum wird daher um Mitternacht und das astronomische um Mittag, oder 12 Stunden später als das bürgerliche, geändert. Hieraus folgt, dass das bürgerliche Datum und die Stunden von Mittag bis Mitternacht mit dem astronomischen Datum und dessen Stunden bis 12^h übereinstimmen, wogegen von Mitternacht bis Mittag

das Datum nach bürgerlicher Rechnung um eins grösser als das astronomische ist und die Stundenzahl des letzteren die des bürgerlichen Tages um 12^h übersteigt (§. 20.).

1. Bürgerliche Zeit in astronomische Zeit zu verwandeln.

Man behalte, wenn die gegebene bürgerliche Zeit Nachmittags ist, das Datum und die Stunden etc. unverändert bei; dagegen vermindere man das Datum um eins, wenn die zu verwandelnde Zeit Vormittagszeit ist und addire 12^h zu den gegebenen Stunden, so erhält man die entsprechende astronomische Zeit.

Z. B. März, den 4ten, 7^h Nachmittags bürgerliche Zeit, ist auch März, den 4ten, 7^h astronomische Zeit; aber März, den 5ten, 3^h Vormittags, entspricht März, den 4ten, 15^h astronomischer Zeit.

2. Astronomische Zeit in bürgerliche Zeit zu verwandeln.

So lange die Stunden und Unterabtheilungen der Zeit des astronomischen Tages nicht 12^h übersteigen, nehme man dieselben als Nachmittagsstunden etc. nach bürgerlicher Zeitrechnung und behalte das Datum unverändert bei; übersteigen aber die Stunden des astronomischen Tages 12^h, so ziehe man 12 Stunden davon ab, und der Rest ist Vormittagszeit nach bürgerlicher Zeitrechnung des nächstfolgenden Datums.

Z. B. April, den 30sten, 8^h astronomisch ist auch den 30sten April, 8^h Nachmittags bürgerlich; aber März, den 31sten, 22^h astronomisch ist übereinstimmend mit dem 1sten April, 10^h Vormittags nach bürgerlicher Zeitrechnung.

§. 102.

Aus der Zeit eines Ortes, dessen Länge man kennt, die entsprechende Zeit des ersten Meridians, wie auch die entsprechende Zeit eines anderen Ortes zu finden, dessen Länge bekannt ist.

Die wahre oder mittlere astronomische Zeit eines Ortes ist der Stundenwinkel des Mittelpunktes der wirklichen oder der mittleren Sonne vom oberen Meridian nach Westen herumgezählt (§. 20.). Für einen Ort also, der westlich von einem anderen liegt, ist dieser Stundenwinkel so viel kleiner als der des östlicheren Ortes, wie der Längenunterschied dieser Orte in Zeit beträgt. Liegt daher ein Ort auf östlicher Länge, so ist die Zeit des ersten Meridians um die Länge in Zeit kleiner, bei westlicher Länge um die Länge in Zeit grösser, als die entsprechende Zeit dieses Ortes.

I. Aus der Zeit des Ortes die entsprechende Zeit des ersten Meridians zu finden.

Man verwandele die gegebene Zeit in astronomische Zeit und wende hierauf die Ostlänge, in Zeit ausgedrückt, mit minus, die Westlänge mit plus an.

Hierbei ist zu bemerken, dass man, wenn die Zeit des Ortes kleiner ist, als die OL. in Zeit ausgedrückt, 24^h zu der gegebenen Zeit des Ortes addiren und eins vom gegebenen Datum subtrahiren muss; wird dagegen

die Zeit des Ortes + der WL. in Zeit grösser als 24^h, so subtrahirt man 24^h davon und addirt eins zum gegebenen Datum.*)

Beispiel 1. Auf 40° 30′ WL. von Greenwich am 4. März um 20^h wahre astronomische Zeit soll die entsprechende Zeit in Greenwich gefunden werden.

Wahre astronomische Zeit am Schiff den 4. März	=	$20^h\ 0'$
WL. in Zeit	= +	$2^h\ 42'$
Wahre astronomische Zeit in Greenwich den 4. März	=	$22^h\ 42'$.

Beispiel 2. Am 1. April um $22^h\ 10'\ 50''$ mittlere Zeit auf 150° 10′ WL. von Greenwich soll man finden, welche Zeit es in Greenwich ist.

Mittlere Zeit den 1. April	=	$22^h\ 10'\ 50''$
WL. in Zeit	= +	$10^h\ 0'\ 40''$
		$32^h\ 11'\ 30''$
		24^h
Mittlere Zeit in Greenwich den 2. April	=	$8^h\ 11'\ 30''$ Nachmittags.

Beispiel 3. Auf 20° 25′ OL. von Greenwich ist die mittlere astronomische Zeit den 1. Mai $1^h\ 5'\ 33''$; was ist die Zeit in demselben Augenblicke in Greenwich?

Mittlere Zeit den 1. Mai	=	$1^h\ 5'\ 33''$
OL. in Zeit	= —	$1^h\ 21'\ 40''$
Greenwich. mittlere Zeit den 30. April	=	$23^h\ 43'\ 53''$;

denn man hat hier 24^h zu den Stunden zu addiren und eins vom Datum zu subtrahiren.

II. Aus der Zeit eines Ortes die entsprechende Zeit eines anderen Ortes zu finden, wenn man den Längenunterschied oder die Länge beider Orte kennt.

Man verwandele die gegebene Zeit in astronomische Zeit, und wenn der Ort, dessen Zeit man ermitteln will, östlich von dem Orte, dessen Zeit man kennt, liegt, so addire man den Längenunterschied in Zeit zu der gegebenen Zeit; liegt aber der Ort, dessen Zeit man ermitteln will, westlich von dem Orte, dessen Zeit bekannt ist, so substrahire man den Längenunterschied in Zeit von der gegebenen Zeit.

Hierbei ist zu bemerken: wenn die gegebene Zeit kleiner als die davon zu subtrahirende Länge in Zeit ist, addirt man 24^h zu derselben und subtrahirt eins vom gegebenen Datum; wenn aber die gegebene Zeit + der zu addirenden Länge in Zeit 24^h übersteigt, subtrahirt man 24^h und addirt eins zum gegebenen Datum.**)

*) Weil man die Länge des Schiffes auf See nie genau kennt, so folgt daraus, dass man die Zeit des ersten Meridians auch nur ungefähr finden kann und man nennt dieselbe daher auch gewöhnlich ungefähre Greenwicher Zeit, wenn von diesem Meridian die Länge gezählt ist.

Es kommt bei jeder zu berechnenden Beobachtung vor, dass man die ungefähre Zeit des Meridians, für den die Ephemeride, die man braucht, berechnet ist, haben muss, um aus derselben die Data, die man zur Berechnung der Beobachtung nöthig hat, interpoliren zu können, und es wird daher hier nur vorläufig bemerkt, dass es zur Berechnung aller Beobachtungen, die auf See gemacht sind, genau genug ist, wenn man die ungefähre Zeit des Meridians der Ephemeride auf volle oder höchstens auf Zehntheile von Minuten, hingegen wenn man auf dem Lande beobachtet hat, auf volle Secunden nimmt.

**) Kennt man die bürgerliche Zeit und will dieselbe auch beibehalten, so wird der Längenunterschied ganz nach der vorher gegebenen Anweisung addirt oder subtrahirt. In Hinsicht der Veränderung des Datums ist dann zu bemerken, dass, wenn die gefundene

Beispiel 1. März, den 4ten, um 20^h wahre Zeit auf 40° 30′ WL. von Greenwich soll man finden, welche Zeit es in demselben Augenblicke in 50° 10′ WL. von Greenwich ist.

Länge des Schiffes	= 40° 30′ W von Greenwich.
Länge des Ortes, dessen Zeit man sucht .	= 50° 10′ » » »
Der Ort liegt vom Schiffe	= 9° 40′ westlich.
Der Längenunterschied beträgt	= 0^h 38′ 40″ in Zeit.
Wahre Schiffszeit	= 20^h 0′ 0″
Wahre Zeit in 50° 10′ WL. den 4. März . .	= 19^h 21′ 20″.

Beispiel 2. April, den 1sten, 22^h 10′ 50″ mittlere Zeit auf 150° 10′ WL. von Greenwich soll die entsprechende Zeit in 160° 55′ OL. von Greenwich gefunden werden.

Länge des Schiffes	= 150° 10′ W von Greenwich.
Länge des Ortes, dessen Zeit man sucht . .	= 160° 55′ O » »
Der Ort liegt vom Schiffe	= 311° 5′ östlich,
beträgt in Zeit	= 20^h 44′ 20″
Mittlere Zeit am Schiffe den 1. April	= 22^h 10′ 50″
	42^h 55′ 10″
	— 24^h
Mittlere Zeit in 160° 55′ OL. den 2. April .	= 18^h 55′ 10″.

Beispiel 3. Mai, den 1sten, 1^h 5′ 33″ mittlere Zeit auf 20° 25′ OL. von Greenwich soll man finden, was die Zeit in demselben Augenblicke in 48° 20′ 30″ OL. von Greenwich ist.

Länge des Schiffes	= 20° 25′ O von Greenwich.
Länge des Ortes, dessen Zeit man sucht . .	= 48° 20′ 30″ O v. »
Der Ort liegt vom Schiffe	= 27° 55′ 30″ östlich,
	= 1^h 51′ 42″ in Zeit.
Mittlere Zeit am Schiffe den 1. Mai	= 1^h 5′ 33″
Mittlere Zeit in 48° 20′ 30″ OL. den 1. Mai .	= 2^h 57′ 15″.

Beispiel 4. Man befand sich des Vormittags um 9^h 30′ 15″ m. Z. auf 57° 25′ OL. von Greenwich, nachdem man 2^h gesegelt hatte, war man auf 57° 4′ OL. gekommen; was war die mittlere Zeit am letzten Orte?

Verlassene OL.	= 57° 25′
Aufgekommene OL.	= 57° 4′
Veränderte Länge	= 0° 21′ nach W,
beträgt in Zeit	= 0^h 1′ 24″
Die m. Z. am ersten Orte	= 9^h 30′ 15″ Morgens.
Die entsprechende m. Z. am zweiten Orte .	= 9^h 28′ 51″
Gesegelt .	= 2^h
Mittlere Zeit auf 57° 4′ OL. von Greenwich .	= 11^h 28′ 51″ Morgens.

Beispiel 5. Juli, den 5ten, zeigte die Uhr 11^h 50′ 10″ Abends, dieselbe war 3′ 10″ voraus gegen mittlere Zeit; die Länge des Ortes war

Zeit mehr als 12^h Nachmittags ist, man 12^h davon abzieht und den Rest als Vormittagszeit des folgenden Datums nimmt; beträgt aber die gefundene Zeit mehr als 12^h Vormittags, so zieht man 12^h davon ab und der Rest ist Nachmittagszeit desselben Tages. Ist die Vormittagszeit, von welcher man die Länge in Zeit subtrahiren soll, kleiner als diese, so addirt man 12^h zu der Vormittagszeit, nimmt das Datum einen Tag zurück und die gefundene Zeit ist Nachmittagszeit; wenn aber die Nachmittagszeit kleiner ist als die davon zu subtrahirende Länge in Zeit, so addirt man 12^h und erhält Vormittagszeit desselben Tages.

70° 15′ W. von Greenwich; was war die mittlere bürgerliche Zeit in Berlin, wenn man annimmt, dass Berlin circa 13° 24′ östlich von Greenwich liegt?

Länge des Schiffes	=	70° 15′ W von Greenwich.
Berlin liegt auf		13° 24′ OL. » »
Das Schiff befand sich mithin auf		83° 39′ WL. von Berlin.
WL. des Schiffes von Berlin in Zeit . . .	=	5^h 34′ 36″
Die Uhr zeigte den 5. Juli an Bord	=	11^h 50′ 10″ Abends.
Die Uhr war vor mittlerer Zeit	=	— 3′ 10″
Mittlere astronomische Zeit in Berlin . . .	=	17^h 21′ 36″ den 5. Juli.
	—	12^h
Mittlere bürgerliche Zeit in Berlin	=	5^h 21′ 36″ Morgens den 6. Juli.

§. 103.

Die astronomischen Elemente der Ephemeride für eine bestimmte Zeit zu interpoliren:
A. nach einfacher Interpolation,
B. mit Rücksicht auf die zweiten Differenzen.

In den Ephemeriden (dem Nautical-Almanac, dem nautischen Jahrbuche) sind die astronomischen Elemente für bestimmte Zeiten des Meridians der Ephemeride, also für gewisse Greenwicher Zeiten, tabellarisch angegeben, und da es nur selten trifft, dass man ein Element gerade zu einer Zeit, für welche es in der Ephemeride gegeben ist, haben will, und es zu schwer sein würde, dasselbe nach der Formel, wonach die Elemente der Ephemeride berechnet sind, zu suchen; so muss man es nach den Elementen, die in der Ephemeride für diejenigen Zeiten angegeben sind, zwischen denen die Zeit liegt, für welche man das Element sucht, ermitteln. Das Verfahren, nach welchem dieses geschieht, nennt man Interpoliren (Einschalten) und wird hier, so weit es zum nautisch-astronomischen Gebrauche erforderlich ist, erklärt werden.

A. Die Elemente der Ephemeride für eine bestimmte Zeit nach einfacher Interpolation zu finden.

Bei der einfachen Interpolation nimmt man an, dass sich in den nächsten Zwischenzeiten die in der Ephemeride angegebenen Data, den Zeitintervallen proportional ändern, woraus sich leicht nachstehende Regel ergiebt.

Man suche zu der gegebenen Zeit die entsprechende Zeit des Meridians, für welche die Ephemeride berechnet ist, mithin die astronomische Greenwicher Zeit, wenn man den Nautical-Almanac oder das nautische Jahrbuch gebraucht; demnächst nehme man aus der respectiven Ephemeride für die nächstvorhergehende und nächstfolgende Zeit die entsprechenden Elemente und schliesse:

> wie sich das Zeitintervall der Ephemeride zu der Differenz der ersten Zeit und derjenigen, für welche man verbessern will, verhält, so verhält sich die Differenz der den beiden Zeiten der Ephemeride entsprechenden Elemente zu x. Die so gefundene Grösse x addirt man zu dem Element der nächstvorhergehenden Zeit, oder zieht sie davon ab, je nachdem die Aenderung in der Zwischenzeit ein Wachsen oder Abnehmen bewirkt, so hat man das Element für die gegebene Zeit.

Wenn ausser den Elementen die Aenderungen derselben in bestimmten Zeiträumen angegeben sind, so braucht man nur für die der gegebenen Zeit nächstvorhergehende in der Ephemeride angegebene Zeit, das Element aufzuschreiben und kann dann schliessen:

> wie sich der Zeitraum, für welchen die Aenderung angegeben ist, zu dem Unterschied zwischen der nächstvorhergehenden Zeit der Ephemeride und der Zeit, für welche man interpoliren will, verhält, so verhält sich die angegebene Differenz des Elementes zu x, und mit der Grösse x wird dann nach der eben gegebenen Vorschrift verfahren.

Beispiel 1. 1872 den 16. Juni, um $0^h\ 7'\ 40''$ wahre Zeit Nachmittags auf $83^\circ\ 49'$ OL. von Greenwich, soll die Declination der Sonne gefunden werden.

Juni 16., astronomische wahre Zeit = $0^h\ 7'\ 40''$
OL. in Zeit . — $5^h\ 35'\ 16''$
Greenwicher astronomische wahre Zeit den 15ten . . = $18^h\ 32'\ 24''$
24^h
oder vor dem wahren Greenwicher Mittag den 16ten = $5^h\ 27'\ 36''$.
Nautical-Almanac, Juni, den 16ten, ⊙ Decl. (Seite 1) = $23^\circ\ 22'\ 56''$ N,
neben dem 16ten stehende Differenz für $1^h = 4'',8$
$5^h\ 27'\ 36''$ ist nahe = 5.5^h
$26''$ — $26''$
Berichtigte ⊙ Declination . . = $23^\circ\ 22'\ 30''$ N.

Beispiel 2. 1872 den 12. Januar, auf $146^\circ\ 36'$ WL. von Greenwich soll zur Zeit des wahren Mittags die Declination der Sonne gefunden werden.

WL. von Greenwich in Zeit = $9^h\ 46'\ 24''$ = der wahren Greenw. Zeit.
Zeitgleichung den 12ten . . . = + $8'\ 35''$ auf wahre Zeit,
ungefähre Greenw. mittl. Zeit = $9^h\ 54'\ 59''$ Abends den 12ten.
Nautisches Jahrbuch d. 12. ⊙ Declination = $21^\circ\ 42'\ 45''$ S,
nächstfolgende Differenz . . = $24'',7$
$9^h\ 54'\ 59''$ nahe = 9.9^h
$244'',5$ = — $4'\ 5''$
Berichtigte ⊙ Declination . . = $21^\circ\ 38'\ 40''$ S.

Beispiel 3. 1872 den 9. Januar, um $10^h\ 15'\ 30''$ wahre Zeit Morgens auf $50^\circ\ 10'$ OL. von Greenwich soll die Rectascension der Sonne und die Zeitgleichung gesucht werden.

Wahre Zeit = $10^h\ 15'\ 30''$ Morgens,
OL. in Zeit . — $3^h\ 20'\ 40''$
ungefähre wahre Greenwicher Zeit . . . = $6^h\ 54'\ 50''$ Morgens,
Zeitgleichung den 9ten = + $7'\ 6''$ auf wahre Zeit,
ungefähre mittlere Greenwicher Zeit. . . = $7^h\ 1'\ 56''$ Morgens den 9ten,
oder vor dem mittl. Grw. Mittag d. 9ten = $4^h\ 58'\ 4''$.
Nautisches Jahrbuch den 9ten ⊙ AR. = $19^h\ 20'\ 35'',1$. Zeitgl. = + $7'\ 12'',9$
nächstvorhergeh. Diff. für $1^h = 10'',92$ Diff. f. $1^h = 1'',06$
$4^h\ 58'\ 4''$ nahe = 5^h 5^h
$54'',6$ — $54'',6$ $5'',3$ — $5'',3$
Berichtigte ⊙ AR. = $19^h\ 19'\ 40'',5$; Zeitgl. = + $7'\ 7'',6$.

Beispiel 4. 1872 den 5. Januar, um $1^h\ 10'\ 0''$ Morgens mittlere Zeit auf $28°\ 47'$ WL. von Greenwich soll man den Halbmesser und die Horizontalparallaxe des Mondes finden.

Mittlere Zeit den 5ten	$= 1^h\ 10'\ 0''$ Morgens,
WL. in Zeit	$+ 1^h\ 55'\ 8''$
Ungefähre mittlere Greenwicher Zeit	$= 3^h\ 5'\ 8''$ Morgens, oder nach Mitternacht den 4ten.

☾ Halbm. d. 4. Mittern. $= 15'\ 52''$
» » d. 5. Mittags $= 15'\ 59''$

$12^h : 3^h\ 5' = 0'\ 7'' : x$

3^h	4	$0'\ 2''$
$5'$	36	0,0

$x = 0'\ 2''$
$15'\ 52''$
☾ Halbm. $= 15'\ 54''$.

☾ Horizontalp. d. 4. Mittn. $= 58'\ 7''$
» » d. 5. Mittg. $= 58'\ 34''$

$12^h : 3^h\ 5' = 0'\ 27'' : x$

3^h	4	$0'\ 6'',8$
$5'$	36	0,2

$x = 0'\ 7''$
$58'\ 7''$
☾ Horizontalp. $= 58'\ 14''$.

Beispiel 5. 1872 den 20. Januar, um $1^h\ 34'\ 15''$ mittlere Zeit Abends auf $40°\ 15'$ OL. von Greenwich soll die gerade Aufsteigung und Abweichung des Mondes gesucht werden.

Mittlere Schiffszeit	$= 1^h\ 34'\ 15''$ Abends,
OL. in Zeit	$- 2^h\ 41'\ 0''$
Ungefähre mittlere Greenwicher Zeit	$= 22^h\ 53'\ 15''$ Abends den 19ten
	$= 1^h\ 53'\ 15''$ nach 21^h den 19ten.

Nautisches Jahrbuch den 19ten. ☾ AR. um $21^h = 4^h\ 0'\ 25'',2$
den 20sten. ☾ AR. um $0^h = 4^h\ 6'\ 29'',1$

$3^h : 1^h\ 53'\ 15'' = 6'\ 3'',9 : x$

1^h	3	$2'\ 1'',3$
$30'$	2	$1'\ 0'',7$
10	3	» $20'',2$
10	1	» $20'',2$
2	5	» $4'',0$
1	2	» $2'',0$
$15''$	4	» $0'',5$

$x = 3'\ 48'',9$
$4^h\ 0'\ 25'',2$
☾ Rectascension $= 4^h\ 4'\ 14'',1$.

Nautisches Jahrbuch den 19ten. ☾ Declination um $21^h = 18°\ 50'\ 32''$ N.

Differenz für $10' = 82'',8 +$ oder zunehmend.
$1^h\ 53'\ 15''$ ist nahe $= 11,33 \cdot 10'$
$x = + 938'',1 =$ $+$ » $15'\ 38''$
☾ Declination $= 19°\ 6'\ 10''$ N.

Beispiel 6. 1872 den 26. November, um $8^h\ 10'\ 20''$ mittlere Zeit Morgens auf $25°\ 13'$ WL. von Greenwich soll die Rectascension und Declination des Mondes gefunden werden.

Mittlere Schiffszeit	$= 8^h\ 10'\ 20''$ Morgens den 26sten,
	$= 20^h\ 10'\ 20''$ Abends den 25sten.
WL. in Zeit	$+ 1^h\ 40'\ 52''$
Ungefähre mittlere Greenwicher Zeit	$= 12^h\ 51'\ 21''$ Abends den 25sten.

N. A. d. 25. 21^h ☾ AR. $= 12^h 42' 22'',1$;
22^h » $= 12^h 44' 15'',7$

$60' : 51' 12'' =$		$1' 53'',6 : x$
$30'$	2	$0' 56'',8$
15	2	» $28'',4$
5	3	» $9'',5$
1	5	» $1'',9$
$12''$	5	» $0'',4$
	$x =$	$1' 37'',0$
		$12^h 42' 22'',1$
	☾ AR. $=$	$12^h 43' 59'',1$.

N. A. d. 25. 21^h ☾ Decl. $= 0° 4' 40'',6$ N.
Diff. f. $10' = 139'',8$
$51' = 5',1 \cdot 10$
$x = 713''$. . $- 11' 53'',0$
☾ Decl. . . $= 0° 7' 12'',4$ S.

Beispiel 7. 1872 den 5. Januar, um $4^h 10' 46''$ mittlere Zeit Abends auf 120° 15′ WL. von Greenwich soll die gerade Aufsteigung, die Abweichung, der Halbmesser und die Parallaxe der Venus gefunden werden.

Mittlere Schiffszeit $= 4^h 10' 46''$ Abends d. 5. Januar,
WL. in Zeit $+ 8^h 1' 0''$
Ungefähre mittlere Greenwicher Zeit $= 12^h 11' 46''$ Abends d. 5. Januar.

N. Jahrb. d. 5. ♀ AR. $= 15^h 53' 19'',7$; d. 6. » $= 15^h 58' 1'',5$

$24^h : 12^h 12' =$		$4' 41'',8 : x$
12^h	2	$2' 20'',9$
$12'$	60	» $2'',3$
	$x =$	$2' 23'',2$
		$15^h 53' 19'',7$
♀ AR. . . $=$		$15^h 55' 42'',9$.

den 5ten. ♀ Decl. $= 17° 29' 25''$ S.
den 6ten. » $= 17° 44' 56''$ S.

$24^h : 12^h 12' =$		$15' 31'' : x$
12^h	2	$7' 45'',5$
$12'$	60	» $7'',8$
	$x =$	$7' 53'',3$
		$17° 29' 25''$
♀ Decl. . . $=$		$17° 37' 18''$ S.

Der Halbmesser von ♀ ist am 1sten $= 9'',6$ und am 11ten $= 8'',8$; mithin ist derselbe am 5ten 12^h auf volle Secunden genau $= 9''$.

Die Parallaxe von ♀ ist am 1sten $9'',9$ und am 11ten $= 9'',1$; mithin den 5ten um $12^h = 9'',5$.

Beispiel 8. 1872 den 3. December auf 85° OL. von Greenwich soll zur Zeit des Meridiandurchganges die Declination des Planeten Mars gefunden werden.

Nautical-Almanac den 3. December ♂ Declination zur Zeit des Meridiandurchganges in Greenwich $= 0° 28' 28'',1$ S.

nächstvorherstehende Differenz für 1^h in Länge . . $=$	$32'',2$
Länge in Zeit . $5^h 40' =$	$5^h,7$
$x =$	$- 183'',5$
$=$	$- 3' 3'',5$
	$0° 28' 28'',1$
♂ Declination . . . $=$	$0° 25' 24'',6$ S.

In Hinsicht der Veränderung der astronomischen Elemente, die in den Ephemeriden angegeben sind, wird bemerkt:

1. Die grösste Veränderung der Sonnendeclination findet im März und September statt und beträgt beinahe eine Minute stündlich. Um daher im äussersten Falle nicht über eine Secunde in der Sonnendeclination zu fehlen, muss man die ungefähre Greenwicher Zeit auf eine Minute genau kennen.

2. Die grösste tägliche Veränderung der ☉AR. beträgt $4' 26''$ in Zeit und die kleinste $3' 35''$; erstere findet im December und letztere im September statt.

3. Die Zeitgleichung verändert höchstens $30''$ in 24 Stunden.

4. Die Veränderung der AR. der mittleren Sonne ist constant und beträgt in 24 mittleren Sonnenstunden 3′ 56″,55; ebenso viel beträgt das Vorschreiten der Sternzeit in 24 mittleren Stunden mehr als 24 Sternstunden.

5. Der Halbmesser des Mondes verändert nie über 8 Secunden in 12 Stunden.

6. Die Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes verändert nie mehr als 27″ in 12 Stunden.

7. Die grösste Veränderung der Declination des Mondes ist 17′ in einer Stunde; um daher die ☾ Declination auf 1′ genau zu erhalten, muss man die ungefähre Greenwicher mittlere Zeit auf 4 Minuten genau kennen.

8. Die grösste Veränderung der ☾ AR. ist 2′ 55″ in Zeit und die kleinste 1′ 45″ stündlich; um daher durch Interpolation die ☾ AR. auf eine Zeitsecunde genau zu erhalten, muss man die ungefähre mittlere Greenwicher Zeit auf 20″ genau kennen.

9. Die grösste tägliche Veränderung der Rectascension der Venus ist 6′ in Zeit.

10. Die grösste tägliche Veränderung der Declination der Venus ist 35 Minuten.

11. Die grösste tägliche Veränderung der AR. des Mars ist 4′ in Zeit und die seiner Declination 25′.

12. Die grösste tägliche Veränderung der AR. des Jupiter ist 1′ in Zeit und die grösste Veränderung der Declination desselben beträgt 4′.

13. Die grösste tägliche Veränderung der AR. des Saturn ist 40″ in Zeit und die seiner Declination beträgt 2′.

B. Die Elemente der Ephemeride mit Rücksicht auf die zweiten Differenzen zu finden.

Man kann sich aus den in den Ephemeriden angegebenen Elementen leicht überzeugen, dass die Ab- oder Zunahme derselben meistens nicht gleichmässig ist, und man muss daher, wenn grössere Genauigkeit erfordert wird, auf diese Veränderlichkeit der Bewegung Rücksicht nehmen, welches geschieht, indem man auf das durch die einfache Interpolation erhaltene Element noch eine Correction anbringt, die man durch Interpoliren für die zweite, dritte, vierte . . . Differenz findet.

Für nautische Zwecke ist es übrigens ausreichend, wenn man bei diesen Interpolationen nur auf die zweiten Differenzen Rücksicht nimmt. Es wird im Folgenden eine Formel entwickelt werden, wonach dieses geschehen kann.*)

Es ist jeder Körper gegen Ruhe und Bewegung gleichgültig. Ein ruhender Körper setzt sich also nie selbst in Bewegung, sowie ein in Bewegung gesetzter Körper nie von selbst weder die Richtung noch Geschwindigkeit seiner Bewegung ändert.

Nach diesem Grundsatze muss daher ein Körper, der einen Stoss erhält, eine Bewegung annehmen, deren Richtung die des Stosses und deren Geschwindigkeit immer dieselbe sein wird, wenn allein dieser Stoss und sonst keine andere Kraft auf ihn wirkt, und so entsteht die, bei

*) Beim Gebrauch des Nautical-Almanac genügt in allen Fällen, mit Ausnahme, wenn man aus Monddistanzen die mittlere Greenwicher Zeit finden will, die einfache Interpolation; wenn aber das nautische Jahrbuch gebraucht wird, muss bei Ermittelung der Mondsörter, wenn besondere Genauigkeit erforderlich ist, auf die zweiten Differenzen derselben Rücksicht genommen werden.

der einfachen Interpolation angenommene gleichmässige Bewegung, nach welcher in gleichen Zeiträumen die zurückgelegten Bahnen eines Körpers immer gleich sein müssen. Es giebt aber in der Natur keine solche Bewegung, weil immer verschiedene Kräfte auf den in Bewegung gesetzten Körper wirken.

Man unterscheidet daher, von der nur gedachten gleichmässigen die gleichmässig zu- oder abnehmende Bewegung, welche entsteht, wenn die Bewegung eines Körpers stets mit gleicher Kraft beschleunigt oder gehemmt wird, so dass die Zu- oder Abnahme den Zeitintervallen proportional ist.

Bezeichnet man daher den Bogen, welchen ein Himmelskörper in einer Zeitsecunde, die in einem Zeitmoment M endigt, durchlaufen hat, mit r, und die Beschleunigung der Bewegung in der nächsten Secunde, d. i. der kleine Bogen, den der Himmelskörper in der nächsten Secunde mehr als in der vorhergehenden durchläuft, mit r'; so wird der Bogen, den der Himmelskörper

in der 1sten Zeitsecunde nach M zurücklegt $= r + r'$
» » 2ten » » » M » $= r + 2r'$
» » 3ten » » » M » $= r + 3r'$
» » 4ten » » » M » $= r + 4r'$

und allgemein

in der nten Zeitsecunde nach M zurücklegt $= r + nr'$ sein.

Diese durchlaufenen Bögen bilden eine arithmetische Progression, in welcher die Anzahl der Glieder gleich der in n enthaltenen Anzahl Zeitsecunden ist, mithin ergiebt sich der ganze in der verflossenen Zeit n durchlaufene Bogen gleich der Summe aller Glieder

$$= (2r + r' + nr')\frac{n}{2} = nr + n\frac{r'}{2} + n^2\frac{r'}{2},$$

$$= nr + (n^2 + n)\frac{r'}{2} \dots\dots\dots\dots \text{(I.)}.$$

Wenn ferner R' den Bogen bezeichnet, welchen ein Himmelskörper am Ende des Zeitmoments M zurückgelegt hat, so ist der Bogen, den derselbe am Schlusse der Zeit $M + n$ durchlaufen haben wird

$$= R' + nr + (n^2 + n)\frac{r'}{2};$$

und wenn man diesen Bogen mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{R} = R' + nr + (n^2 + n)\frac{r'}{2} \dots\dots\dots\dots \text{(II.)}.$$

In dieser Gleichung ist r und r' unbekannt, aber von den, in den Zeitintervallen vor und nach $M + n$ durchlaufenen Bögen abhängig.

Bezeichnet man die gleichen Zeitintervalle, die zwischen den Zeiten enthalten sind, für welche man in der Ephemeride die Elemente angegeben findet, mit Z und nimmt an, dass, da n jeden Werth haben kann, dasselbe auch $= -Z, = 0, = Z, = 2Z$ sei, so findet man, wenn für n in der Gleichung (II.) $-Z$, 0, Z, $2Z$ substituirt wird, die Bögen, welche ein Himmelskörper durchlaufen hat in den Momenten:

$$M - Z = R' - Zr + (Z^2 - Z)\frac{r'}{2} = R \dots\dots \text{(III.)},$$

$$M = R' = R' \dots\dots \text{(IV.)},$$

$$M + Z = R' + Zr + (Z^2 + Z)\frac{r'}{2} = R'' \dots\dots \text{(V.)},$$

$$M + 2Z = R' + 2Zr + (4Z^2 + 2Z)\frac{r'}{2} = R''' \dots\dots \text{(VI.)}.$$

Durch Subtraction jeder dieser vorhergehenden Gleichungen von der nächstfolgenden, erhält man die ersten Differenzen:

$$R' - R = Zr - (Z^2 - Z)\frac{r'}{2} = D_1 \ldots\ldots\ldots (\text{VII.}),$$

$$R'' - R' = Zr + (Z^2 + Z)\frac{r'}{2} = D'_1 \ldots\ldots\ldots (\text{VIII.}),$$

$$R''' - R'' = Zr + (3Z^2 + Z)\frac{r'}{2} = D''_1 \ldots\ldots\ldots (\text{IX.}).$$

Durch Subtraction jeder dieser Gleichungen von der nächstfolgenden, erhält man die zweiten Differenzen:

$$D'_1 - D_1 = Z^2 r' = D_2 \ldots\ldots\ldots (\text{X.}),$$

$$D''_1 - D'_1 = Z^2 r' = D'_2 \ldots\ldots\ldots (\text{XI.}).$$

Die zweiten Differenzen sind hier, der Annahme zufolge, gleich gross; da dieses aber bei den Elementen der Ephemeride meistens nicht der Fall ist, so nimmt man das Mittel von D_2 und D'_2 als die zweite Differenz an.*)

Aus den zweiten Differenzen lässt sich nun der Werth von r' bestimmen, denn aus (X.) ergiebt sich

$$r' = \frac{D_2}{Z^2} \ldots\ldots\ldots (\text{XII.}).$$

Wenn man diesen Werth für r' in die Gleichung (VIII.) substituirt, so erhält man

$$D'_1 = Zr + (Z^2 + Z)\frac{D_2}{2Z^2}, \text{ woraus sich ergiebt}$$

$$r = \frac{D'_1 - (Z^2 + Z)\dfrac{D_2}{2Z^2}}{Z} = \frac{D'_1}{Z} - (Z + 1)\frac{D_2}{2Z^2},$$

$$= \frac{D'_1}{Z} - \frac{D_2}{2Z} - \frac{D_2}{2Z^2} \ldots\ldots\ldots (\text{XIII.}).$$

Setzt man ferner die in (XII.) und (XIII.) gefundenen Werthe von r' und r in (II.), so erhält man:

$$\mathfrak{R} = R' + \frac{nD'_1}{Z} - \frac{nD_2}{2Z} - \frac{nD_2}{2Z^2} + (n^2 + n)\frac{D_2}{2Z^2},$$

$$= R' + \frac{nD'_1}{Z} - \frac{nZD_2}{2Z^2} + \frac{n^2 D_2}{2Z^2},$$

$$= R' + \frac{nD'_1}{Z} - \frac{n(Z - n)}{2Z^2} D_2 \ldots\ldots\ldots (\text{XIV.}),$$

nach welcher Gleichung man den durchlaufenen Bogen zu einem Zeitmomente $M + n$ mit Rücksicht auf die zweite Differenz finden kann.

*) Etwas leichter findet man die zweite Differenz, besonders wenn die ersten Differenzen für 1^h oder für $10'$ zur Erleichterung der einfachen Interpolation gegeben sind, wenn man die halbe Differenz der algebraischen Summe des ersten und vierten weniger der algebraischen Summe des zweiten und dritten aus der Ephemeride aufzuschreibenden Elementes nimmt, denn es ist:

$$R + R''' = 2R' + Zr + (5Z^2 + Z)\frac{r'}{2},$$

$$R' + R'' = 2R' + Zr + (Z^2 + Z)\frac{r'}{2} \text{ und}$$

$\frac{1}{2}[R + R''' - (R' + R'')] = Z^2 r' =$ der zweiten Differenz in (X.) und (XI.).
Auch ergiebt sich, ob die zweite Differenz positiv oder negativ ist, je nachdem $(R + R''') - (R' + R'')$ minus oder plus wird.

Die Gleichung (XIV.) besteht aus drei Theilen, nämlich:

1. aus R', welches der Bogen ist, den der Himmelskörper bis zum Ende des Zeitmoments M durchlaufen hat;
2. aus $\frac{nD'_1}{Z}$, welches der Bogen ist, den der Himmelskörper in der Zeit n durchläuft, wenn die Bewegung gleichmässig angenommen wird. Man findet denselben durch die einfache Interpolation und muss ihn immer mit demselben Zeichen, welches D'_1 hat, auf R' anwenden;
3. aus $-\frac{n(Z-n)}{2Z^2}D_2$, welches die Correction für die gleichmässige Veränderung der Bewegung der Himmelskörper ist; dieselbe erhält immer das entgegengesetzte Zeichen von D_2 oder der zweiten Differenz.

Da $\frac{n(Z-n)}{2Z^2}$ nie grösser als $\frac{1}{8}$ werden kann, welchen grössten Werth dieser Ausdruck hat, wenn $n = \frac{1}{2}Z$ ist, so folgt daraus, dass der grösstmöglichste Fehler, der durch Vernachlässigung der zweiten Differenz entstehen kann, nicht mehr als $\frac{1}{8}$ der zweiten Differenz beträgt, und dann stattfindet, wenn die Zeit, für welche man interpolirt, in der Mitte der beiden nächsten Zeiten, für welche die Elemente in der Ephemeride angegeben sind, liegt.

Zur Interpolation mit Rücksicht auf die zweite Differenz ergiebt sich dem Vorstehenden zufolge, die Regel:

Man schreibe ausser den beiden Elementen der Ephemeride und den diesen entsprechenden Zeiten, zwischen welche die Zeit fällt, für die man das Element sucht, noch das vorhergehende und nächstfolgende Element der natürlichen Reihenfolge nach unter einander, subtrahire dann das zweite der aufgeschriebenen Elemente von dem dritten und gebe dem Reste das ihm zukommende algebraische Zeichen, so hat man die erste Differenz (D'_1).

Ferner addire man das erste und vierte, sowie das zweite und dritte der aufgeschriebenen Elemente algebraisch, subtrahire die so gefundene zweite Summe von der ersten und gebe dem Rest das ihm zukommende algebraische Zeichen, so ist dieser Rest durch 2 dividirt, gleich der zweiten Differenz (D_2). *)

Man findet nun die Correction für die erste Differenz, wie unter A. in diesem Paragraphen vorgeschrieben ist, welche Correction immer das Zeichen der ersten Differenz erhält.

Die Correction für die zweite Differenz ergiebt sich, wenn man setzt:

$$2Z : n = D_2 : x_2 \text{ und}$$
$$Z : n = x_2 : y,$$

worin Z die Zwischenzeit bezeichnet, in welcher die Elemente in der Ephemeride angegeben sind, n die Differenz der Greenwicher Zeit, für welche man interpolirt, weniger der nächstvorhergehenden Zeit aus der Ephemeride, und D_2 die zweite Differenz. Diese Correction ($x_2 - y$) erhält immer das entgegengesetzte Zeichen der zweiten Differenz.

*) Zieht man die erste Summe von der zweiten, so bekommt der Rest, und mithin auch die zweite Differenz das entgegengesetzte, folglich das Zeichen, mit welchem die Correction für die zweite Differenz anzuwenden ist. Man hat dann wie bei der ersten Differenz, die obere von der unteren Grösse abzuziehen, und beide Correctionen mit dem Zeichen ihrer Differenzen anzuwenden.

Zu dem aus der Ephemeride aufgeschriebenen zweiten Element addire man die Correction für die erste und zweite Differenz mit Rücksicht auf ihre Zeichen, so ist die Summe das gesuchte Element ($\mathfrak{R}$).

Beispiel 8. 1872 den 16. Februar um $5^h\ 21'\ 15''$ mittlere Greenwicher Zeit Abends soll die gerade Aufsteigung und Abweichung des Mondes mit Rücksicht auf die zweiten Differenzen gefunden werden.

Nautisches Jahrbuch den 16. um 0^h ☾ AR $= 3^h\ 51'\ 49'',1$

3^h » $= 3^h\ 57'\ 55'',8$ } 1ste Diff. (D_1)

6^h » $= 4^h\ 4'\ 3'',6$ } $= +\ 6'\ 7'',8$

9^h » $= 4^h\ 10'\ 12'',5$

$8^h\ 2'\ 1'',6$

$8^h\ 1'\ 59'',4$

$+\ 0'\ 2'',2 : 2 = +\ 1'',1$ $=$ d. 2ten Diff.;

$6^h : 2^h\ 21'\ 15'' = +\ 1'',1 : x_2$

2^h	3	$0'',37$
$20'$	6	$0'',06$
$1\frac{1}{4}$	16	$0'',00$

$x_2 = +\ 0'',43$

$y = +\ 0'',34$

C. f. 2te Diff. $= -\ 0'',09$.

$3^h : 2^h\ 21'\ 15'' = +\ 0'',43 : y$

$1\frac{1}{2}^h$	2	$0'',22$
$30'$	3	$0'',07$
15	2	$0'',04$
5	3	$0'',01$

$y = +\ 0'',34$.

$3^h : 2^h\ 21'\ 15'' = 6'\ 7'',8 : x$

$1\frac{1}{2}^h$	2	$3'\ 3'',9$
$30'$	3	$1'\ 1'',3$
15	2	$30'',7$
5	3	$10'',2$
1	5	$2'',0$
$15''$	4	$0'',5$

$x = +\ 4'\ 48'',6$

☾ AR. d. 16. um $3^h = 3^h\ 57'\ 55'',8$

Corr. f. 2te Diff. $= -\ 0'',1$

☾ AR. $= 4^h\ 2'\ 44'',3$;

d. 16. um 0^h ☾ Decl. $= 18^\circ\ 27'\ 18''$ N.

3^h » $= 18^\circ\ 53'\ 26''$ N.

6^h » $= 19^\circ\ 18'\ 46''$ N.

9^h » $= 19^\circ\ 43'\ 17''$ N.

$+\ 38^\circ\ 10'\ 35''$

$+\ 38^\circ\ 12'\ 12''$

$-\ 1'\ 37'' : 2 = -\ 48'',5 =$ d. 2ten Diff. (D_2);

$6^h : 2^h\ 21'\ 15'' = -\ 48'',5 : x_2$

2^h	3	$16'',17$
$20'$	6	$2'',70$
$1\frac{1}{4}$	16	$0'',17$

$x_2 = -\ 19'',04$

$y = -\ 14'',94$

C. f. 2te Diff. $= +\ 4'',1$.

$3^h : 2^h\ 21'\ 15'' = -\ 19'',04 : y$

$1\frac{1}{2}^h$	2	$9'',52$
$30'$	3	$3'',17$
$15'$	2	$1'',59$
5	3	$0'',53$
$1\frac{1}{4}$	4	$0'',13$

$y = -\ 14'',94$.

Diff. f. 10' $= +\ 84'',4$

$2^h\ 21'\ 15''$ ist . . $= 14{,}125 \cdot 10'$

$x = +\ 1192'',2$

Corr. f. 1ste Diff. = + 19′ 52″
» » 2te » = + 0′ 4″
+ 19′ 56″
☾ Decl. um 3^h = 18° 53′ 26″ N,
☾ Decl. = 19° 13′ 22″ N.

Beispiel 9. 1872 den 27. Juni um 13^h 11′ mittlere Greenwicher Zeit soll die Declination der Sonne mit Rücksicht auf die zweite Differenz gefunden werden.

N. A. Juni d. 26. ⊙Decl. = 23° 21′ 28″,4 N.
27. » = 23° 19′ 3″,8 »
28. » = 23° 16′ 14″,6 »
29. » = 23° 13′ 1″,0 »
46° 34′ 29″,4
46° 35′ 18″,4
— 0′ 49″,0 : 2 = — 24″,5 = d. 2ten Diff.

$48^h : 13^h\ 11' = -24'',5 : x_2$

12^h	4 6″,12
1	12 0″,51
10′	6 0″,09
1	10 0″,01

$x_2 = -\ 6'',73$
$y = -\ 3'',70$
C. f. 2te Diff. = + 3″,03.

$24^h : 13^h\ 11' = -6'',73 : y$

12^h	2 3″,37
1	12 0″,28
10′	6 0″,05
1	10 0″,00

$y = -\ 3'',70.$

Diff. für 1^h = — 7″,05
13^h 11′ = 13^h,18
x = — 92″,9
Corr. f. 1ste Diff. = — 1′ 32″,9
» » 2te » = + 3″,0
— 1′ 29″,9
d. 27. ⊙ Decl. . . = 23° 19′ 3″,8 N,
⊙ Decl. . . = 23° 17′ 33″,9 N.

§. 104.

Wenn das Datum und ein astronomisches Element bekannt ist, mit Hülfe einer Ephemeride, worin dieses Element von Zeit zu Zeit angegeben ist, die entsprechende Zeit des Meridians der Ephemeride zu finden, wenn auf die zweiten Differenzen Rücksicht genommen wird.

A. Allgemeine Lösung.

Es ist nach Formel (XIV.) §. 103.

$$\mathfrak{R} = R' + \frac{nD'_1}{Z} - \frac{n(Z-n)}{2Z^2} D_2,$$

mithin
$$\mathfrak{R} - R' = \frac{nD'_1}{Z} - \frac{n(Z-n)}{2Z^2} \cdot D_2$$

und
$$\frac{\mathfrak{R} - R'}{D'_1} \cdot Z = n - \frac{n(Z-n)}{2Z} \cdot \frac{D_2}{D'_1},$$

woraus sich ergiebt
$$n = \frac{\mathfrak{R} - R'}{D'_1} \cdot Z + \frac{n(Z-n)}{2Z} \cdot \frac{D_2}{D'_1} \quad \text{(XV.)},$$

nach welcher Formel die Zeit des Meridians der Ephemeride, hier ($M + n = M'$), die einem gegebenen Element ($\mathfrak{R}$) entspricht, gefunden werden kann, wenn man vorläufig

$$n' = \frac{\mathfrak{R} - R'}{D'_1} \cdot Z$$

setzt, wodurch man einen genäherten Werth von n erhält.

Zur Berechnung von n' nach dieser Gleichung kann man sich der Proportional-Logarithmen (plg) bedienen. Diese enthält Tafel XL.

Man hat $Z : n' = D'_1 : \mathfrak{R} - R'$,

also $\lg Z - \lg n' = \lg D'_1 - \lg (\mathfrak{R} - R')$.

Ist nun, wie bei den Monddistanzen, $Z = 3^h$, und addirt man rechts $\lg 3^\circ - \lg 3^\circ$, so erhält man

$$\lg 3^h - \lg n' = \lg 3^\circ - \lg (\mathfrak{R} - R') - [\lg 3^\circ - \lg D'_1],$$

d. h. $$\operatorname{plg} n' = \operatorname{plg} (\mathfrak{R} - R') - \operatorname{plg} D'_1 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XVI.)}.$$

Mit n' als n angenommen, kann man den Ausdruck $\frac{n(Z-n)}{2Z} \cdot \frac{D_2}{D'_1}$ berechnen, welcher die Correction für die zweite Differenz ist. Diese Correction ist stets positiv, wenn D'_1 und D_2 dasselbe Zeichen haben, negativ, wenn D'_1 und D_2 entgegengesetzt bezeichnet sind.

Hieraus folgt die Regel:

Man entnehme aus der Ephemeride die zwei nächstvorhergehenden und die zwei nächstfolgenden Elemente, zwischen welchen das gegebene Element ($\mathfrak{R}$) liegt, finde daraus, wie in §. 103., die erste Differenz (D'_1) und die zweite Differenz (D_2).

Die Correction für die erste Differenz oder den genäherten Werth von n (n') findet man nach der Proportion:

Die Veränderung des Elements (D'_1), oder die erste Differenz, verhält sich zum Intervall (Z), wie die Differenz zwischen dem gegebenen und nächstvorhergehenden Element ($\mathfrak{R} - R'$) sich zu dem ungefähren Unterschied (n') zwischen der Zeit des Meridians der Ephemeride (M') und der nächstvorhergehenden (M) verhält; oder, was dasselbe ist, nach der Gleichung

$$n' = \frac{\mathfrak{R} - R'}{D'_1} \cdot Z.$$

Wenn man ferner diesen durch die einfache Interpolation gefundenen ungefähren Werth von n (n') in Gleichung (XV.) für n substituirt, so findet man die Correction für die zweite Differenz nahe

$$= \frac{n'(Z - n')}{2Z} \cdot \frac{D_2}{D'_1},$$

und die Abweichung von der Richtigkeit wird nie so erheblich sein, dass es nöthig wäre, die Rechnung zu wiederholen, welches geschehen kann, indem man die beiden schon gefundenen Correctionen zusammengenommen als das ungefähre n annimmt und damit den letzten Theil der Rechnung wiederholt.

Die Correction für die zweite Differenz ist immer positiv, wenn D'_1 und D_2 gleiche Zeichen haben, hingegen negativ, wenn D'_1 und D_2 entgegengesetzt bezeichnet sind.

Zu der Zeit, die zu dem zweiten aus der Ephemeride notirten Element (M) gehört, addire man die Correction für die erste Differenz (n') und die Correction für die zweite Differenz, indem auf das Zeichen der letzteren Rücksicht genommen wird, so ist die Summe gleich der Zeit des Meridians der Ephemeride (M'), die zu dem gegebenen Element ($\mathfrak{R}$) gehört.

Beispiel 1. 1872 den 11. Januar ist die Rectascension des Mondes $20^h\ 45'\ 36'',7$ gefunden, man soll die entsprechende mittlere Greenwicher Zeit mit Hülfe des nautischen Jahrbuchs finden.

Nach dem nautischen Jahrbuche ist:

☾ AR. den 11. Januar. $3^h = 20^h\,32'\,55'',1$

$6^h = 20^h\,40'\,55'',4$

$9^h = 20^h\,48'\,52'',1$ $\Big\}$ $+\,7'\,56'',7 = D'_1 = +\,476'',7$

$12^h = 20^h\,56'\,45'',0$

$41^h\,29'\,40'',1$

$41^h\,29'\,47'',5$

$-\,7'',4 : 2 = -\,3'',7 = D_2.$

☾ AR. den 11. um $6^h = 20^h\,40'\,55'',4$

Gegebene ☾ AR. . . . $= 20^h\,45'\,36'',7$

$\mathfrak{R} - R' = 0^h\,4'\,41'',3 = 281'',3.$

Die Correction für die erste Differenz findet man nach der Proportion:

$476'',7 : 3^h\,(10800'') = 281'',3 : n'$

lg 10800 $= 4{,}03342$

lg 281,3 $= 2{,}44917$

c lg 476,7 $= 7{,}32175 - 10$

lg n' $= 3{,}80434$

$n' = 6373'',0 = 1^h\,46'\,13'',0$

$Z = 10800'',0$

$Z - n' = 4427'',0.$

Die Correction für die zweite Differenz ist demnach in Secunden

$$= \frac{6373 \cdot 4427 \cdot 3{,}7}{2 \cdot 10800 \cdot 476{,}7}$$

lg 6373 $= 3{,}80434$

lg 4427 $= 3{,}64611$

lg 3,7 $= 0{,}56820$

c lg 21600 $= 5{,}66555 - 10$

c lg 476,7 $= 7{,}32175 - 10$

lg $10'',14 = 1{,}00595$

mithin ist die Correction für die zweite Differenz . . . $= \quad -\,10'',1$

Correction für die erste Differenz $= 1^h\,46'\,13'',0$

Zeit des aus dem Jahrbuche notirten zweiten Elementes $= 6^h\,0'\,0''$

Die dem gegebenen Elemente entspr. mittl. Greenw. Zt. $= 7^h\,46'\,2'',9$

Abends den 11. Januar.

Beispiel 2. 1872 den 6. November ist die wahre Distanz zwischen dem Monde und Fomalhaut $38^\circ\,20'\,15''$ gefunden; man soll die entsprechende mittlere Greenwicher Zeit finden.

Naut. Jahrb. wahre Distanz den 6ten um $3^h = 40^\circ\,26'\,31''$

$6^h = 38^\circ\,50'\,25''$

$9^h = 37^\circ\,15'\,7''$ $\Big\}$ D'_1 plg $= 0{,}2762n$

$12^h = 35^\circ\,40'\,42''$

$76^\circ\,7'\,13''$

$76^\circ\,5'\,32''$

$+\,1'\,41'' : 2 = 50'',5 = D_2.$

Distanz um 6^h . . . $= 38^\circ\,50'\,25''$

Gegebene Distanz $= 38^\circ\,30'\,15''$

$\mathfrak{R} - R' = -\,30'\,10''$ plg $= 0{,}7757n$

plg $D'_1 = 0{,}2762n$

$n' = 0^h\,56'\,59''$ plg $= 0{,}4995$

$n' =$	$0^h\ 56'\ 59''$	plg $= 0{,}4995$
$Z =$	$3^h\ 0'\ 0''$	
$Z - n' =$	$2^h\ 3'\ 1''$	plg $= 0{,}1653$
$D_2 =$	$+ 50'',5$	plg $= 2{,}3302$
		$2{,}9950$
	D'_1	plg $= 0{,}2762\,n$
	$- 21''$	plg $= 2{,}7188\,n.$

Die Correction für die zweite Differenz ist also . . . $= -\frac{21''}{2} = -10'',5$
Die Correction für die erste Differenz war $= 0^h\ 56'\ 59''$
mittl. Greenw. Zeit des zweiten aufgeschrieb. Elementes $= 6^h\ 0'\ 0''$
mittlere Greenwicher Zeit (M') $= 6^h\ 56'\ 48'',5.$

B. Lösung dieser Aufgabe mit ausschliesslicher Beziehung auf Monddistanzen und auf die Rectascension des Mondes, wenn diese, wie im nautischen Jahrbuche, in Zwischenzeiten von 3 Stunden gegeben sind.

Da es hauptsächlich in der Navigation vorkommt, zu einer bekannten Distanz zwischen dem Monde und einem andern Himmelskörper die entsprechende Zeit des Meridians der Ephemeride zu ermitteln, wenn die Distanzen zwischen den beiden in Rede stehenden Gestirnen von 3 zu 3 Stunden in der Ephemeride gegeben sind, so findet man zur Erleichterung der Lösung dieser Aufgabe:

1. Die Proportional-Logarithmen der ersten Differenzen im Nautical-Almanac angegeben, wodurch, und auch weil der Proportional-Logarithme von 3 Stunden $= 0$ ist, die einfache Interpolation bedeutend erleichtert wird, wenn man mit Proportional-Logarithmen diese Rechnung ausführt, wie schon im vorstehenden zweiten Beispiel geschehen ist.

2. Ist zur Erleichterung der Interpolation für die zweite Differenz die nautische Tafel XLVI., dem Nautical-Almanac entlehnt, welche gebraucht werden kann, wenn man zu einer bekannten Monddistanz oder zu einer bekannten Rectascension des Mondes nach dem nautischen Jahrbuche die mittlere Greenwicher Zeit finden will. Dieselbe ist wie folgt entstanden:

Die erste Differenz (D'_1) der Monddistanz beträgt im Mittel mit nicht bedeutender Abweichung $1°\ 30'$. Wenn nun die zweite Differenz (D_2) $= 60''$ wäre, so würde der Unterschied zweier Proportional-Logarithmen, die in der Nähe von $1°\ 30'$ zu zwei Bögen gehören, welche $60''$ mit einander differiren $= 48$ sein.

Man kann in dieser Beziehung ohne erheblichen Fehler annehmen, dass die Proportional-Logarithmen sich den Secunden der zweiten Differenz proportional ändern. Es verhält sich also, in der Nähe von $1°\ 30'$, die Veränderung des Proportional-Logarithmen zur Veränderung des Bogens von $60''$, wie

$$48 : 60 = 4 : 5,$$

folglich ist

$$D_2 \text{ in Secunden} = \frac{5\,\delta}{4},$$

worin δ den Unterschied der Proportional-Logarithmen von D'_1 und der nächstfolgenden oder nächstvorhergehenden ersten Differenz der Ephemeride bezeichnet.

Man kann daher in der Formel (XV.) für D_2 stets $\frac{5\,\delta}{4}$, und weil D'_1 nie sehr viel von $1°\ 30'$ abweicht, auch für $2 \cdot Z \cdot D'_1$ im letzten Theil der Formel allgemein $2 \cdot 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 9$ setzen.

Hiernach ist $\frac{n(Z-n)}{2Z} \cdot \frac{D_2}{D'_1} = \frac{n(3-n)\,5\,\delta}{9 \cdot 4} = n(3-n)\,\delta \cdot 0'',14 \; \ldots,$ oder, wenn man, wie vorher schon geschehen, $n' = n$ setzt, so wird: $n'(3-n')\,\delta \cdot 0'',14$ = der Correction für die zweite Differenz in Secunden, welche Tafel XLVI. mit den Argumenten n' und δ (dem schon durch die einfache Interpolation gefundenen Zeitintervall und der Differenz der in Rede stehenden Proportional-Logarithmen der nächsten Differenzen der Ephemeride) entnommen werden kann.

Die Correction der zweiten Differenz ist stets positiv, wenn die Veränderung der Distanz zunehmend ist, und negativ, wenn abnehmend. Da nun letztere Veränderung derjenigen der Proportional-Logarithmen entgegengesetzt ist, so folgt, dass die Correction für die zweite Differenz mit + oder — auf die gefundene genäherte mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride anzuwenden ist, je nachdem die Proportional-Logarithmen ab- oder zunehmen.

Die Correction für die erste Differenz ist schon im Beispiel 2. durch Rechnung mit Proportional-Logarithmen gefunden.

Um die Correction für die zweite Differenz mit Hülfe der Tafel XLVI. zu ermitteln, würde man nur den Unterschied der Proportional-Logarithmen von D'_1 und dem nächstfolgenden Proportional-Logarithmen D''_1 zu nehmen haben. Der Proportional-Logarithme von D'_1 ist = 2762 und der in der Ephemeride nächstfolgende Proportional-Logarithme ist = 2802, mithin ist die Differenz $(\delta) = +40$. Hiermit und mit $n' = 0^h\,57'$ findet man in gedachter Tafel die Correction für die zweite Differenz = 10'',7 und dieselbe ist —, weil die Differenz der Proportional-Logarithmen + ist.

Nach der gegebenen Formel würde man in diesem Falle die Correction für die zweite Differenz

$$= 0^h,9\,(3^h - 0^h,9)\,40 \cdot 0'',14 = 10'',6 \text{ haben.}$$

Im Beispiel 2. ist nur 10'',5 gefunden; der Unterschied entsteht dadurch, dass man eigentlich auch noch die Differenz zwischen dem Proportional-Logarithmen von D'_1 und dem in der Ephemeride nächstvorher angegebenen Proportional-Logarithmen, hier 2726, nehmen und das Mittel aus beiden Differenzen = δ setzen sollte. Man findet demnach

$\delta = \frac{36 + 40}{2} = 38$ und die gesuchte Correction

$$= 0,9\,(3 - 0,9)\,38 \cdot 0'',14 = 10'',1.$$

Wenn man von der erwähnten Tafel bei Interpolation der mittleren Greenwicher Zeit aus der bekannten ☾ AR. Gebrauch machen will, muss man die ersten Differenzen in Bogen verwandeln. Nach Beispiel 1. ist

☾ AR. den 11ten um $6^h = 20^h\,40'\,55''.4$ } $D'_1 = 7'\,56'',7 = 1^\circ\,59'\,10'',5$ plg = 1791
$9^h = 20^h\,48'\,52'',1$ }
$12^h = 20^h\,56'\,45'',0$ } $D''_1 = 7'\,52'',9 = 1^\circ\,58'\,13'',5$ plg = 1825

plg D''_1 — plg D'_1 = ... + 34.

Die schon berechnete erste Differenz oder das genäherte Intervall ist = $1^h\,46'\,13''$; hiermit und mit 34 als Differenz der Proportional-Logarithmen findet man in der Nautischen Tafel XLVI. die Correction für zweite Differenz = 10'', welche mit — anzuwenden sind, weil 34 mit + bezeichnet ist.

Beispiel 3. 1872 den 30. Januar ist die wahre Distanz zwischen Mond und Venus = 78° 0' 15'' gefunden; man soll die entsprechende mittlere Greenwicher Zeit finden.

N. Jahrb. d. 30. Jan. 12^h w. Dist.	$= 78^\circ\ 57'\ 57''$	$1^\circ\ 27'\ 52''$. . plg = 3114
15^h » »	$= 77^\circ\ 30'\ 5''$	$1^\circ\ 28'\ 8''$. . plg = 3101
18^h » »	$= 76^\circ\ 1'\ 57''$	+ 13.
Wahre Distanz um 12^h	$= 78^\circ\ 57'\ 57''$	 plg = 3114
gegebene Distanz	$= 78^\circ\ 0'\ 15''$	
	$57'\ 42''$	 plg = 4941
genähertes Intervall	$= 1^h\ 58'\ 12''$	 plg = 1827
Correction für 2te Differenz . .	$= +\ 4''$	
	$1^h\ 58'\ 16''$	
mittl. Greenw. Zeit d. nächstvorhergehenden w. Dist. . .	$= 12^h$	
mittl. Greenw. Zeit	$= 13^h\ 58'\ 16''$	den 30. Januar.

§. 105.

Ein in mittlerer Zeit gegebenes Intervall in Sternzeit auszudrücken und umgekehrt.

Ein tropisches Jahr enthält 365,242255 mittlere Sonnentage, in welcher Zeit die Rectascension der mittleren Sonne um 360° zunimmt, und da diese Zunahme das ganze Jahr hindurch gleichmässig ist, so folgt, dass die Rectascension der mittleren Sonne während der Dauer eines mittleren Sonnentages um $\frac{360^\circ}{365{,}242255} = 0{,}9856472^\circ$ zunimmt, welche in Zeit ausgedrückt = 0,0657098 Stunden = $0^h\ 3'\ 56'',56$ = 0,0027379 Tage sind. Wenn also an einem Tage der Mittelpunkt der mittleren Sonne mit dem Frühlingspunkte zugleich durch den obern Meridian eines Ortes geht, so wird an dem folgenden Tage die Sonne, vermöge ihrer eigenen Bewegung, östlich von dem Frühlingspunkte stehen, und zwar im Augenblicke der zweiten Culmination des Mittelpunktes der mittleren Sonne um den 0,0027379ten Theil eines Sterntages, so dass der mittlere Sonnentag 1,0027379 Sterntage = $24^h\ 3'\ 56'',56$ Sternzeit beträgt.

Ein Sterntag ist dagegen $= \frac{1}{1{,}0027379} = 0{,}9972696$ mittlere Sonnentage = $23^h\ 56'\ 4'',09$ mittlere Zeit, oder was dasselbe ist, ein Sterntag ist um den 0,0027304ten Theil eines mittl. Sonnentages = $3'\ 55'',9$ mittlere Zeit kürzer als ein mittlerer Sonnentag. Hieraus folgt zugleich, dass das tropische Jahr, oder die Zeit von 365.242255 Sonnentagen, gleich 366.242255 Sterntagen ist, oder dass nach Verlauf eines tropischen Jahres der Frühlingspunkt genau einen vollen Umlauf mehr um die Erde gemacht hat, als die mittlere Sonne.

Diejenige Zeit in Sternzeit ausgedrückt, welche der Frühlingspunkt an dem folgenden Tage früher durch den Meridian geht, als der Mittelpunkt der mittleren Sonne, wird Acceleration (Voreilung, Beschleunigung) genannt; dieselbe beträgt also in einem mittleren Sonnentage $0^h\ 3'\ 56'',56$ Sternzeit, mithin ist die Acceleration in einer mittleren Sonnenstunde $= \frac{3'\ 56'',56}{24} = 9'',86$ Sternzeit, und ebenso viele Secunden muss man zu jeder Stunde mittlerer Zeit addiren, um ein in mittlerer Zeit gegebenes Intervall in Sternzeit auszudrücken.

Zur Erleichterung der Rechnung ist die nautische Tafel XXIV. berechnet, welche die Acceleration für jede Stunde bis 24, sowie für jede Minute und Secunde bis 60 enthält.

Die Zeit (in mittl. Zeit ausgedrückt), welche der Mittelpunkt der mittleren Sonne an jedem folgenden Sterntage später als der Nullpunkt des Widders durch den Meridian geht, nennt man Retardation (das Zurückbleiben), welche in einem Sterntage $0^h\,3'\,55'',9$ mittlere Zeit, mithin in einer Sternstunde $9'',83$ beträgt; ebenso viele Secunden muss man also von jeder Stunde Sternzeit subtrahiren, um ein in Sternzeit gegebenes Intervall in mittl. Zeit auszudrücken.

Zur Erleichterung der Rechnung ist die nautische Tafel XXV. berechnet, welche die Retardation für jede Sternstunde bis 24 und für jede Minute und Secunde bis 60 enthält.

I. Ein in mittlerer Zeit gegebenes Intervall in Sternzeit auszudrücken.

Regel. Man nehme aus der nautischen Tafel XXIV. für die zu reducirenden Stunden, Minuten und Secunden die entsprechende Acceleration, und addire diese zu dem zu verwandelnden Zeitintervall, so hat man dasselbe in Sternzeit.

Beispiel 1. Es sollen $9^h\,15'\,6''$ mittlere Zeit in Sternzeit verwandelt werden.

Zeit-Intervall	$= 9^h\,15'\,6''$	mittlere Zeit,
Acceleration für 9^h	$= 1'\,28'',71$	
» » $15'$	$= 2'',46$	
» » $6''$	$= 0'',02$	
gesuchtes Sternzeit-Intervall	$= 9^h\,16'\,37'',19.$	

II. Ein in Sternzeit gegebenes Intervall in mittlere Zeit zu verwandeln.

Regel. Man nehme für die zu reducirenden Stunden, Minuten und Secunden aus Tafel XXV. die Retardation und subtrahire dieselbe von dem gegebenen Intervall, so hat man dasselbe in mittlere Zeit ausgedrückt.

Beispiel 2. $9^h\,16'\,37''$ Sternzeit sollen in mittlere Zeit verwandelt werden.

Gegebenes Sternzeit-Intervall		$= 9^h\,16'\,37''$
Retardation für 9^h	$= 1'\,28'',47$	
» » $16'$	$= 2'',62$	$= -\ 1'\,31'',19$
» » $37''$	$= 0'',10$	
das gegebene Intervall in mittlerer Zeit		$= 9^h\,15'\,5'',81.$

§. 106.

Wenn nach einer Uhr, die täglich n Secunden accelerirt oder retardirt, t Stunden verflossen sind, die wirklich verflossene Zeit zu finden.

Es sei die Acceleration mit — und die Retardation mit + bezeichnet, so sind 24 Stunden von derjenigen Zeit, gegen welche der tägliche Gang der Uhr ($\mp n''$) bestimmt ist, = 24 Stunden nach der Uhr, weniger der Secunden des täglichen Ganges, wobei auf das algebraische Zeichen von n Rücksicht zu nehmen ist.

Wenn die Uhr daher accelerirt, so sind $24^h + n''$, und bei Retardation $24^h - n'' = 24$ Stunden von derjenigen Zeit, gegen die der Gang der Uhr bestimmt ist.

Man setze daher:

$$24^h \pm n'' : t^h = \mp n'' : x'';^*)$$

x erhält das Zeichen —, wenn die Uhr accelerirt, dagegen +, wenn dieselbe retardirt, und $t \mp x''$ ist die wirklich verflossene Zeit.

Da n'' gegen 24^h immer eine sehr kleine Grösse, so kann man in dieser Beziehung ohne erheblichen Fehler $24^h \pm n'' = 24^h$ setzen, und es verhält sich dann

$$24^h : t^h = \mp n'' : x'',^{**})$$

nach welcher Proportion x leicht gefunden werden kann, weil das erste Glied eine ganze Zahl ist.

Die Regel hiernach ist also

24^h : verflossenen Zeit nach der Uhr in Stunden ausgedrückt
= täglicher Gang in Secunden : x''.

Die nach dieser Proportion gefundene Grösse x ist, wenn die Uhr voreilt, mit — und wenn dieselbe zurückbleibt, mit + auf die nach der Uhr verflossene Zeit anzuwenden, um letztere in der Zeit ausgedrückt zu finden, gegen welche der tägliche Gang der Uhr bestimmt ist.

Beispiel. Nach einer Uhr, welche in 24^h mittl. Zeit 18″,5 accelerirt gegen mittl. Zeit, sind 3^h 52′ 48″,5 verflossen; man soll die verflossene mittl. Zeit finden.

$24^h : 3^h\ 52'\ 48'',5 = -\ 18'',5 : x$

3^h	8	2″,31
45′	4	0 ,58
5	9	0 ,06
$2\frac{1}{2}$	2	0 ,03
15″	10	0 ,00
3,5	4	0 ,00
	$x =$	— 2″,98
		3^h 52′ 48″,50

Verflossene mittl. Zeit = 3^h 52′ 45″,52.

Es wird immer genau genug sein, wenn man die nach der Uhr verflossene Zeit in Stunden und zehntel Stunden ausdrückt.

*) Wenn man x nach dieser Proportion finden will, so ist es des unbequemen Divisors wegen, und weil n eine für mehrere Tage constante Grösse ist, eine bedeutende Erleichterung, wenn man ermittelt, wie viel der Gang der Uhr in einer Stunde nach der Uhr beträgt; man hat dann diesen Gang für eine Stunde nur mit t zu multipliciren, um x zu finden. Der Gang der Uhr für eine nach derselben verflossene Stunde ist $= \frac{3600 \cdot n''}{86400 \pm n''}$.

**) Auch wenn man nach dieser Proportion rechnet, wird es, da n eine für längere Zeit constante Grösse ist, eine Erleichterung sein, wenn man den Gang der Uhr für eine Stunde bestimmt hat.

Man findet x dann aus der Proportion

$$24^h : 3^h,9 = -18'',5 : x$$

$$\begin{array}{r} 3,9 \\ \hline 1665 \\ 555 \\ \hline 72'',15 \end{array}$$

$$x = -\frac{72'',15}{24} = -3'',0.$$

§. 107.

Wenn die Länge, das Datum und die wahre Zeit eines Ortes gegeben ist, die entsprechende mittlere Zeit zu finden und umgekehrt.

Der Unterschied der wahren und mittleren Zeit heisst bekanntlich Zeitgleichung (§. 20.). Man hat daher:

m. Zeit = w. Zeit ± Zeitgl. (Seite 1 N.-A.) (I.),
w. Zeit = m. Zeit ∓ Zeitgl. (Seite 2 N.-A.) (II.).

Im nautischen Jahrbuche ist die Zeitgleichung Seite 1 jeden Monats nur für den mittleren Mittag zu Greenwich und zwar mit dem Zeichen angegeben, womit dieselbe auf wahre Zeit anzuwenden ist; auf mittlere Zeit ist sie daher mit entgegengesetztem Zeichen anzuwenden.

I. Es ist die wahre Zeit gegeben, man soll die mittlere Zeit finden.

a. Nach dem Nautical-Almanac.

Man reducire die Zeitgleichung (Seite 1 Nautical-Almanac) (§. 103.) und wende dieselbe, wie über deren Rubrik bemerkt steht, auf die gegebene wahre Zeit an, so hat man die entsprechende mittlere Zeit.

b. Nach dem nautischen Jahrbuche.

Auf die gegebene wahre Zeit wende man die ungefähre Zeitgleichung (die Zeitgleichung, welche im Jahrbuche für den gegebenen Tag steht) mit dem im Jahrbuche angegebenen Zeichen an, so ergiebt sich die ungefähre mittlere Zeit des Ortes. Für diese finde man die entsprechende mittlere Greenwicher Zeit (§. 102.), und für die ungefähre mittlere Greenwicher Zeit interpolire man die Zeitgleichung (§. 103.). Die reducirte Zeitgleichung mit dem Zeichen, welches im Jahrbuche steht, auf die gegebene wahre Zeit angewandt, giebt die entsprechende mittlere Zeit des Ortes.

Beispiel 1. 1872 den 24. August auf $31^\circ\ 51'$ WL. von Greenwich um $13^h\ 16'\ 15''$ wahre Zeit soll die mittlere Zeit gefunden werden.

Gegebene wahre Zeit den 24sten . = $13^h\ 16'\ 15''$
WL. in Zeit = + $2^h\ 7'\ 24''$
Ungefähre wahre Greenwicher Zeit = $15^h\ 23'\ 39''$
N.-A. den 24. August (Seite 1) Zeitgleichung = $2'\ 3'',35$ + auf w. Zeit,
stündl. Diff. . . = $-0'',672$
$15^h\ 24'$ = $15^h,4$
$-10'',35$ $-10'',35$
reducirte Zeitgleichung = $1'\ 53''$ + auf w. Zeit,
gegebene wahre Zeit = $13^h\ 16'\ 15''$
gesuchte mittlere Zeit = $13^h\ 18'\ 8''$ den 24. Aug.

Beispiel 2. 1872 den 8. Januar auf 81° 37′ OL. von Greenwich um 4^h 15′ 37″ wahre Zeit Abends, will man die entsprechende mittlere Zeit finden.

Gegebene wahre Zeit = 4^h 15′ 37″
Ungefähre Zeitgleichung = + 6′ 47″ auf w. Zeit.
Ungefähre mittl. Zeit = 4^h 22′ 24″
OL. in Zeit = − 5^h 26′ 28″
Ungef. mittl. Greenwicher Zeit . . . = 22^h 55′ 56″ Ab. d. 7. Jan.,
oder 1^h 4′ vor dem mittleren Greenwicher Mittage den 8. Januar.

Nautisches Jahrbuch den 8ten, Zeitgleichung = 6′ 47″,5 + auf w. Zeit,
stündl. Diff. = − 1″,08
1^h 4′ = 1^h,1
− 1″,19 − 1″.2
reducirte Zeitgleichung = 6′ 46″,3 + auf w. Zeit,
gegebene wahre Zeit = 4^h 15′ 37″
gesuchte mittlere Zeit = 4^h 22′ 23″ Ab. d. 8. Jan.

II. Die mittlere Zeit ist gegeben, man soll die wahre Zeit finden.

Man suche für den gegebenen Zeitpunkt die ungefähre mittlere Greenwicher Zeit (§. 102.), interpolire dafür die Zeitgleichung nach dem Jahrbuche, oder nach dem Nautical-Almanac Seite 2, und wende dieselbe mit dem entgegengesetzten Zeichen, welches im N. Jahrbuche steht, oder wie über der Rubrik im Nautical-Almanac Seite 2 angegeben ist, auf die gegebene mittlere Zeit an, so erhält man die entsprechende wahre Zeit.

Beispiel 1. 1872 den 24. August auf 31° 51′ WL. von Greenwich um 13^h 18′ 10″ mittlere Zeit soll die entsprechende wahre Zeit gefunden werden.

Gegebene mittl. Zeit = 13^h 18′ 10″
WL. in Zeit = + 2^h 7′ 24″
Ungef. mittl. Greenwicher Zeit . . . = 15^h 25′ 34″ den 24. Aug.

N.-A. den 24. August, Seite 2, Zeitgleichung = 2′ 3″.38 − auf. m. Zt.,
stündl. Diff. = − 0″.672
15^h 26′ = 15^h4
− 10″,35 . . . − 10″,35
reducirte Zeitgleichung = 1′ 53″ − auf m. Zt.,
gegebene mittl. Zeit = 13^h 18′ 10″
gesuchte wahre Zeit = 13^h 16′ 17″ den 24. Aug.

Beispiel 2. 1872 den 8. Januar auf 81° 37′ OL. von Greenwich um 4^h 22′ 30″ mittlere Zeit Abends soll die entsprechende wahre Zeit gefunden werden.

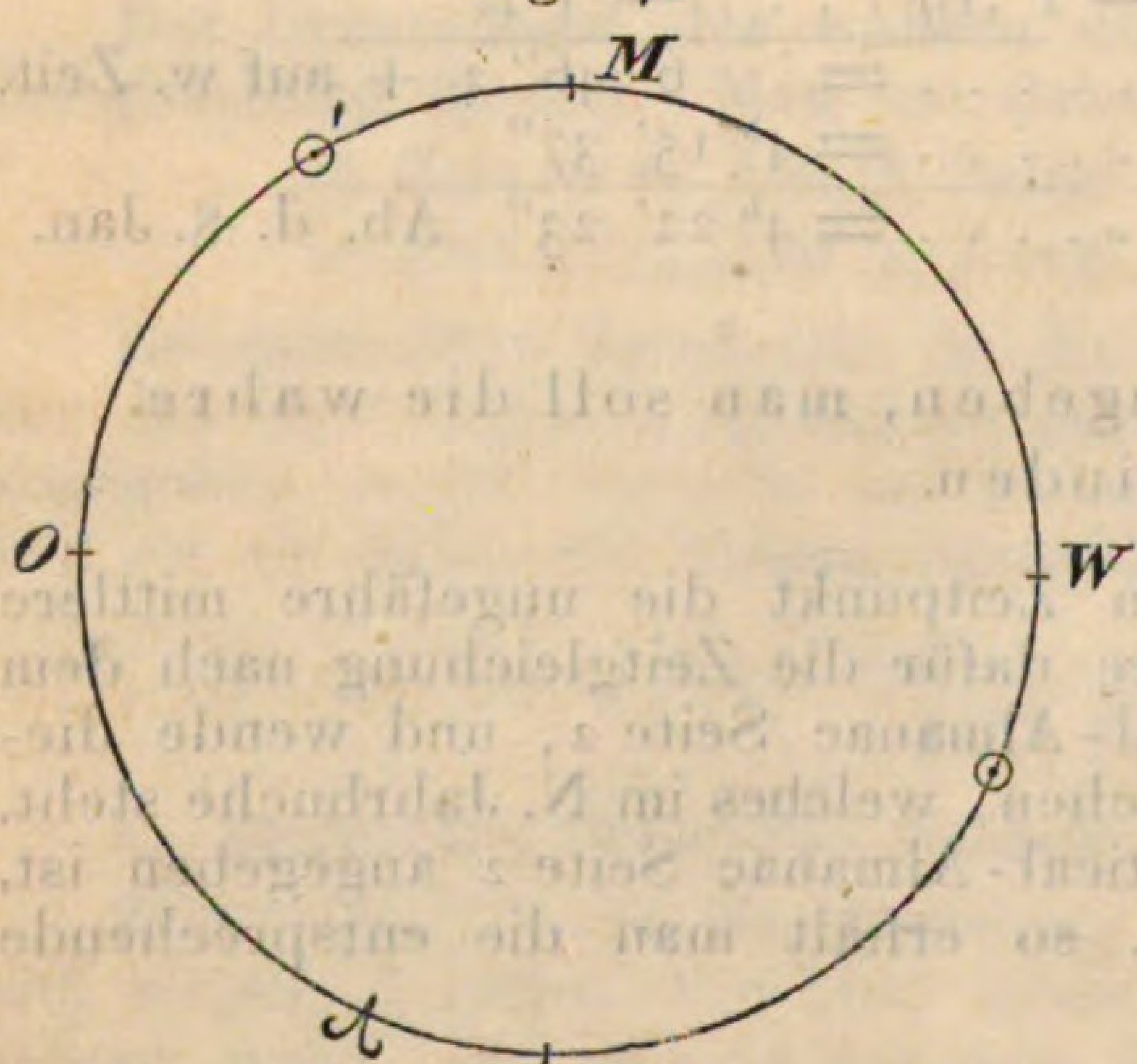
Gegebene mittl. Zeit = 4^h 22′ 30″
OL. in Zeit = − 5^h 26′ 28″
Mittlere Greenwicher Zeit = 22^h 56′ 2″ Abends den 7. Januar, oder 1^h 4′ vor dem mittleren Greenwicher Mittage den 8. Januar.
Nautisches Jahrbuch den 8. Januar, Zeitgl. = 6′ 47″,5 − auf mittl. Zt.,

stündl. Diff. = — 1″,08
$1^h\,4'$ = $1^h,1$
— 1″,19 = — 1″,2
reducirte Zeitgleichung = 6′ 46″ — auf mittl. Zt.,
gegebene mittl. Zeit = 4^h 22′ 30″
gesuchte wahre Zeit = 4^h 15′ 44″ Abds. den 8. Jan.

§. 108.

Wenn die mittlere oder wahre Zeit eines Ortes, wie auch das Datum und die Länge desselben gegeben ist, die entsprechende Sternzeit zu finden.

Fig. 67.



Es sei (Fig. 67.) *MW* ⊙ ♈ *O* ⊙′ der Himmels-Aequator, den der obere Meridian des Ortes in *M* schneidet, so ist, wenn man, nach Süden sehend, sich auf der Nordseite des Aequators denkt, Westen zur Rechten und Osten zur Linken.

Die Zeit wird vom oberen Meridian nach und durch Westen, die Rectascension aber vom Nullpunkte des Widders in entgegengesetzter Richtung gezählt (§. 20. und §. 23.).

Wenn daher die mittlere Sonne sich in ⊙ befindet, so ist die mittlere Zeit = dem Bogen *MW* ⊙ in Zeit, und wenn der Frühlingspunkt in ♈ ist, so ist die AR. der mittleren Sonne der Bogen ♈⊙; die AR. des Meridians aber ist = dem Bogen ♈⊙*WM* und die Sternzeit ist = dem Bogen *MW*⊙♈, woraus folgt, dass, AR. des Meridians und Sternzeit immer gleich gross sind.

Befindet sich aber die mittlere Sonne in ⊙′, so ist die mittlere astronomische Zeit = dem Bogen *MW*⊙ ♈ *O*⊙′ in Zeit. Die AR. der mittleren Sonne ist für diesen Fall der Bogen ♈ ⊙ *WM*⊙′ und die Sternzeit ist = dem Bogen *MW*⊙♈ in Zeit.

Es ist daher:

1. *MW*⊙♈ = ♈⊙ + *MW*⊙,

d. h. die ✻ Zeit oder Merid. AR. = m. ⊙AR. + mittl. astr. Zeit . . . (I.);

2. ♈⊙*WM* = ♈⊙*WM*⊙′ — ⊙′*M* = ♈⊙*WM*⊙′ — (24^h — *M*⊙♈⊙′)
= ♈⊙*WM*⊙′ + *M*⊙♈⊙′ — 24^h,

d. h. ✻Zeit = m. ⊙ AR. + mittl. astron. Zeit — 24^h (II.).

Lässt man ⊙ und ⊙′ die Oerter der wahren Sonne bezeichnen, so ergeben sich nachstehende Formeln:

1. ✻Zeit = ⊙ AR. + astr. wahrer Zeit (III.),
2. ✻Zeit = ⊙ AR. + astr. wahrer Zeit — 24^h (IV.).

Um nach (I.) resp. (II.) aus der mittleren Zeit die Sternzeit zu finden, verfahre man wie folgt.

Man suche die der gegebenen mittleren Zeit des Ortes entsprechende mittlere astronomische Zeit (§. 101.) und finde für diese die mittlere astronomische Zeit des Meridians der Ephemeride (§. 102.). Für letztere nehme man aus Tafel XXIV. die Acceleration und addire dieselbe zu der in der Ephemeride angegebenen Sternzeit des nächstvorhergegan-

genen mittleren Mittags, so ist die Summe die gesuchte m. ⊙ AR.; diese addire man zu der mittleren astronomischen Zeit des Ortes, so ist die Summe die entsprechende Sternzeit des Ortes, wenn vorher 24^h davon subtrahirt sind, falls diese Summe 24 Stunden übersteigen sollte.

Beispiel 1. 1872 den 12. September auf 16° 36′ WL. von Greenw. soll man um 23^h 2′ 20″ mittlere Zeit die Sternzeit finden.

Gegebene mittl. Zeit	=	23^h 2′ 20″	den 12. Septbr.
WL. in Zeit .	+	1^h 6′ 24″	
Ungefähre mittl. Greenwicher Zeit	=	24^h 8′ 44″	den 12. Septbr.
	=	0^h 8′ 44″	den 13. Septbr.
N. A. den 13. Septbr. m. ⊙ AR.	=	11^h 31′ 8″,0	
Acceleration für 8′	=	1″,3	
» » 44″	=	0″,1	
Reducirte m. ⊙ AR.	=	11^h 31′ 9″,4	
Mittlere Zeit an Bord	=	23^h 2′ 20″	d. 12. Septbr.
Die Summe — 24^h gleich d. gesuchten ✻ Zeit	=	10^h 33′ 29″,4	d. 12. Septbr.

Beispiel 2. 1872 den 10. Januar auf 17° 18′ OL. von Greenwich um 6^h 15′ 36″ mittlere Zeit Abends soll man die Sternzeit finden.

Gegebene mittl. Zeit	=	6^h 15′ 36″	Abends.
OL. in Zeit .	= —	1^h 9′ 12″	
Ungefähre mittl. Greenwicher Zeit	=	5^h 6′ 24″	Ab. d. 10. Jan.
Naut. Jahrb. den 10. Januar m. ⊙ AR. . . .	=	19^h 17′ 18″,8	
Acceleration für 5^h	=	49″,3	
» » 6′	=	1″,0	
» » 24″	=	0″,1	
Reducirte m. ⊙ AR.	=	19^h 18′ 9″,2	
Gegebene mittl. Zeit	=	6^h 15′ 36″	
Gesuchte Sternzeit	=	1^h 33′ 45″,2.	

Um nach (III.) resp. (IV.) aus der gegebenen wahren Zeit die Sternzeit zu finden, verfahre man auf folgende Weise.

Wenn bürgerliche wahre Zeit gegeben ist, so suche man erst die ihr entsprechende wahre astronomische Zeit (§. 101.) und dafür die ungefähre wahre Greenwicher Zeit (§. 102.). Für letztere interpolire man die Rectascension der wahren Sonne nach dem Nautical-Almanac Seite 1 und addire zu derselben die wahre astronomische Zeit des Ortes, so ist die Summe die gesuchte Sternzeit, wenn vorher 24^h davon subtrahirt sind, falls dieselbe 24^h übersteigen sollte.

Wenn man nach dem nautischen Jahrbuche rechnet, worin die AR. d. w. Sonne nur für den mittleren Mittag gegeben ist, so muss man auf die ungefähre wahre Greenwicher Zeit die Zeitgleichung für den gegebenen Tag mit dem daneben stehenden Zeichen anwenden, um die ungefähre mittlere Greenwicher Zeit zu erhalten, für welche die AR. d. w. ⊙ interpolirt wird (§. 103.).

Beispiel 1. 1872 den 18. Juni auf 21° 34′ OL. von Greenwich um 4^h 15′ 10″ wahre Zeit Morgens, soll man die entsprechende Sternzeit finden.

Wahre Zeit d. 18. = 4^h 15′ 10″ Mrg. = d. 17. . . .		16^h 15′ 10″	astronomisch.
OL. in Zeit .	= —	1^h 26′ 16″	
Ungefähre wahre Greenwicher Zeit . . .	=	14^h 48′ 54″	den 17. Juni.

N. A. d. 17. Juni, Seite 1, ⊙ AR.	=	$5^h\ 44'\ 50'',4$
stündl. Differenz = + 10″,4		
$14^h\ 49'$ = $14^h,8$		
+ 153″,9	+	$2'\ 33'',9$
Reducirte ⊙ AR.	=	$5^h\ 47'\ 24'',3$
Wahre Zeit	=	$16^h\ 15'\ 10'',0$
Sternzeit .	=	$22^h\ 2'\ 34'',3$.

Beispiel 2. 1872 den 5. Januar auf 90° 17′ WL. von Greenwich um $3^h\ 36'\ 55''$ wahre Zeit Nachmittags soll die Sternzeit gefunden werden.

Wahre Zeit	=	$3^h\ 36'\ 55''$ Abends.
WL. in Zeit	= +	$6^h\ 1'\ 8''$
Ungefähre wahre Greenwicher Zeit . . .	=	$9^h\ 38'\ 3''$
Zeitgleichung d. 5.	= +	$5'\ 38''$
Ungefähre mittl. Greenwicher Zeit	=	$9^h\ 43'\ 41''$
Naut. Jahrbuch den 5. Januar ⊙ AR. . .	=	$19^h\ 3'\ 4'',3$
stündl. Differenz = + 10″,98		
$9^h\ 44'$ = $9^h,7$		
+ 106″,5	= +	$1'\ 46'',5$
Reducirte ⊙ AR.	=	$19^h\ 4'\ 50'',8$
Wahre Zeit	=	$3^h\ 36'\ 55''$
Sternzeit .	=	$22^h\ 41'\ 46''$.

§. 109.

Aus der Sternzeit die mittlere Zeit zu finden, wenn ausser der Sternzeit das Datum und die Länge des Ortes gegeben ist.

Es ist nach Gleichung (I.) in §. 108.:

mittlere astr. Zeit = Sternzeit — m. ⊙ AR. (I.).

Kennt man ausser der gegebenen Sternzeit, wie dieses fast immer der Fall ist, die ungefähre mittlere oder wahre Zeit, so kann man die m. ⊙ AR. für die bekannte Zeit finden (§. 103.) und die Gleichung (I.) ohne Weiteres auflösen; ist dieses aber nicht der Fall, oder will man, unabhängig von der ungefähr bekannten mittleren oder wahren Zeit, die Aufgabe lösen, so setze man in die obige Gleichung, worin zwei unbekannte Grössen sind, statt der m. ⊙ AR. für den gegebenen Moment die m. ⊙ AR. für den nächstverflossenen mittleren Mittag des Ortes, so ist:

> ✳Zeit — m. ⊙ AR. am nächstvergangenen mittleren Mittage des Ortes = der mittl. astr. Zeit des Ortes in Sternzeit ausgedrückt; diese in mittl. Zeit verwandelt, giebt die gesuchte mittlere astronomische Zeit.

Um nach (I.) aus der Sternzeit die mittlere Zeit zu finden, verfahre man wie folgt.

1. Ist ausser der Sternzeit auch die ungefähre mittlere oder wahre Zeit des Ortes gegeben, so suche man für diese die m. ⊙ AR. (§. 103.) und subtrahire letztere von der gegebenen ✳Zeit; der Rest ist die gesuchte mittlere Zeit.

Ist hierbei die gegebene Sternzeit kleiner als die m. ⊙ AR., so werden 24^h zu ersterer addirt.

2. Kennt man nicht die ungefähre mittlere oder wahre Zeit, oder will man genau verfahren, so reducire man die Sternzeit des nächstver-

flossenen mittleren Mittags der Ephemeride auf den nächstverflossenen mittleren Mittag des Ortes, indem die Sternzeit des mittleren Mittags der Ephemeride für den nächstverflossenen mittleren Mittag des gegebenen astronomischen Datums*) um die Acceleration für WL. in Zeit vergrössert oder für OL. in Zeit verkleinert wird; die so gefundene Sternzeit, für den verflossenen mittleren Mittag des gegebenen Ortes geltend, subtrahire man von der gegebenen Sternzeit, — diese um 24^h vergrössert, wenn sie kleiner als jene ist, — so hat man die seit dem mittl. Mittage des Ortes verflossene Sternzeit; für diese suche man in Tafel XXV. die Retardation und subtrahire dieselbe, so ist der Rest die gesuchte mittlere astronomische Zeit.**)

Beispiel 1. 1872 den 2. Januar auf 70° 37′ WL. von Greenwich war die ungefähre mittlere Zeit $10^h\ 15'$ Abends, als die Sternzeit $5^h\ 2'\ 4''$ gefunden wurde; was war die genaue mittlere Zeit?

Ungefähre mittl. Zeit den 2ten	=	$10^h\ 15'$ Abends.
WL. in Zeit	= +	$4^h\ 42'\ 28''$
Ungefähre mittl. Greenw. Zeit	=	$14^h\ 57'\ 28''$ d. 2ten Ab.
Naut. Jahrb. d. 2. Januar, Sternzeit . .	=	$18^h\ 45'\ 46'',3$
Acceleration für 14^h	= +	$2'\ 18'',0$
» » $57'$	= +	$9'',4$
» » $28''$	= +	$0'',1$
Reducirte m. ⊙ AR.	=	$18^h\ 48'\ 13'',8$
Gegebene Sternzeit	=	$5^h\ 2'\ 4'',0$
Gesuchte mittlere Zeit	=	$10^h\ 13'\ 50'',2$ Abends.

*) Ist das bürgerliche Datum gegeben, so subtrahire man, um zu untersuchen, ob dasselbe mit dem astronomischen Datum übereinstimmend ist, die Sternzeit des mittleren Mittags aus der Ephemeride entnommen, von der gegebenen Sternzeit (letztere vergrössert um 24^h, wenn es nöthig ist); beträgt dieser Rest weniger der etwa für OL. in Zeit zu subtrahirenden Acceleration und weniger der Retardation für die seit dem mittleren Mittage verflossene Sternzeit, mehr als 12^h, so muss eins vom gegebenen bürgerlichen Datum abgezogen werden, um das entsprechende astronomische Datum zu erhalten; ist jener Rest oder plus der etwa für WL. in Zeit zu addirenden Acceleration weniger der für die seit dem mittleren Mittag verflossenen Sternzeit zu subtrahirenden Retardation, weniger als 12^h, so ist das gegebene bürgerliche Datum mit dem astronomischen Datum übereinstimmend.

**) Da ein Sterntag oder 24 Sternstunden = $23^h\ 56'\ 4'',09$ mittlere Zeit sind, und nach Verlauf von 24 Sternstunden wieder dieselbe Sternzeit stattfindet, so folgt daraus, dass, wenn die mittlere Zeit grösser als $23^h\ 56'\ 4'',09$ ist, zu derselben dieselbe Sternzeit stattfindet, als an demselben Tage 24 Sternstunden = $23^h\ 56'\ 4'',09$ mittlere Zeit früher statthatte. Auch ist zu einer mittleren Zeit, die kleiner als $0^h\ 3'\ 55'',91$ ist, die entsprechende Sternzeit ebenso gross, als die, welche $23^h\ 56'\ 4'',09$ mittlere Zeit später, also noch an demselben Tage stattfindet. Es gehören demnach zu einer mittleren Zeit, die grösser als $23^h\ 56'\ 4'',09$ oder kleiner als $0^h\ 3'\ 55'',91$ ist, zwei gleiche, aber einen Sterntag von einander verschiedene Sternzeiten.

Bei Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit kann aber hierdurch in der Praxis wohl schwerlich ein Versehen geschehen, weil man jedenfalls die mittlere Zeit so genau kennen wird, dass man weiss, ob der Tag im Beginnen oder Enden ist.

Wenn z. B. den 16ten die gegebene Sternzeit	=	$11^h\ 42'\ 30''$
und die für Länge in Zeit reducirte Sternzeit	=	$11^h\ 40'\ 3'',6$ ist, so ist
die seit dem mittleren Mittage verflossene Sternzeit	=	$0^h\ 2'\ 26'',4$
Retardation für $2'\ 26'',4$	=	$0'',4$
mithin 1) gesuchte mittlere Zeit den 16ten im Anfange des Tages	=	$0^h\ 2'\ 26'',0$
		$23^h\ 56'\ 4'',1$
2) gesuchte mittlere Zeit den 16ten am Ende des Tages	=	$23^h\ 58'\ 30'',1$.

Lösung ohne die ungefähre mittlere Zeit zu gebrauchen.

Januar den 2ten, Sternzeit	=	$18^h\ 45'\ 46'',3$
Acceleration für 4^h	= +	$39'',4$
» » $42'$	= +	$6'',9$
» » $28''$	= +	$0'',1$
Sternzeit am mittl. Mittage des Ortes .	=	$18^h\ 46'\ 32'',7$
Gegebene Sternzeit	=	$5^h\ 2'\ 4'',0$
Seit dem mittl. Mittage verfl. Sternzeit	=	$10^h\ 15'\ 31'',3$
Acceleration für $10^h = 1'\ 38'',3$; » » $15' = 2'',5$; » » $31'' = 0'',1$...	—	$1'\ 40'',9$
Gesuchte mittlere Zeit	=	$10^h\ 13'\ 50'',4$ Abends.

Beispiel 2. 1872 den 7. October auf $30^\circ\ 15'$ OL. von Greenwich, ungefähr um $3^h\ 12'$ mittlere Zeit Morgens, als die Sternzeit $4^h\ 15'\ 16''$ war, soll man die entsprechende mittlere Zeit finden.

Ungefähre mittl. Zeit d. 7. Morg. $3^h\ 12'$	=	$15^h\ 12'$ den 6ten astron.
OL. in Zeit	= —	$2^h\ 1'$
Ungefähre mittl. Greenw. Zeit	=	$13^h\ 11'$ den 6ten.
N.-A. den 6. October, Sternzeit	=	$13^h\ 1'\ 48'',7$
Acceleration für 13^h	= +	$2'\ 8'',1$
» » $11'$	= +	$1'',8$
Reducirte m. ⊙ AR.	=	$13^h\ 3'\ 58'',6$
Gegebene Sternzeit + 24^h	=	$28^h\ 15'\ 16''$
Gesuchte mittlere astron. Zeit	=	$15^h\ 11'\ 17'',4$ den 6ten.

Lösung ohne die ungefähre mittlere Zeit zu gebrauchen.

N.-A. den 6. October, Sternzeit	=	$13^h\ 1'\ 48'',7$
Acceleration für $2^h = 19'',71$; » » $1' = 0'',16$	—	$19'',9$
Sternz. i. mittl. Mttg. d. 6. in $30^\circ\ 15'$ OL.	=	$13^h\ 1'\ 28'',8$
Gegebene Sternzeit + 24^h	=	$28^h\ 15'\ 16'',0$
Seit dem mittl. Mittage verfl. Sternzeit	=	$15^h\ 13'\ 47'',2$
Retardation für $15^h = 2'\ 27'',44$; » » $13' = 2'',13$; » » $47'' = 0'',13$...	—	$2'\ 29'',7$
Gesuchte mittlere astron. Zeit	=	$15^h\ 11'\ 17'',5$ den 6ten,
oder mittlere Zeit	=	$3^h\ 11'\ 17''5$ Morg. d. 7ten.

§. 110.

Wenn das Datum und die Länge des Ortes gegeben ist, aus der Sternzeit die entsprechende wahre Zeit zu finden.

Aus Formel (III.) und (IV.) in §. 108. ergiebt sich:

wahre astronomische Zeit = Sternzeit — ⊙ AR. (I.),

wahre astronomische Zeit = Sternzeit + 24^h — ⊙ AR. (II.),

welche letztere Formel gilt, wenn die Sternzeit kleiner als die ⊙ AR. ist.

Wenn man ausser der Sternzeit die ungefähre wahre oder mittlere Zeit genau genug kennt, um darnach die ⊙ AR. reduciren zu können, so kann man nach den gegebenen Formeln die der gegebenen Sternzeit entsprechende wahre Zeit finden. Ohne die ungefähre wahre Zeit

hierzu nöthig zu haben, kann man diese Aufgabe lösen, wenn man erst aus der Sternzeit nach §. 109. die mittlere Zeit, und aus dieser die wahre Zeit sucht (§. 107.).

Man verfahre hierbei auf folgende Weise:

1. Wenn man ausser der gegebenen Sternzeit noch die wahre oder mittlere Zeit ungefähr kennt, so reducire man die ⊙ AR. für dieselbe (§. 103.), welche von der gegebenen Sternzeit — diese, wenn es nöthig ist, um 24^h vergrössert — subtrahirt, die gesuchte wahre Zeit giebt.*)

2. Kennt man die ungefähre wahre oder mittlere Zeit nicht, oder will man dieselbe nicht gebrauchen, so berechne man aus der Sternzeit die mittlere Zeit (§. 109.), und aus dieser die wahre Zeit (§. 107.).

Beispiel. 1872 den 5. Januar auf 21° 34′ OL. von Greenwich, ungefähr um $3^h\ 3'$ mittlere Zeit Nachmittags, ist die Sternzeit $22^h\ 1'\ 39'',5$ gefunden, man soll die wahre Zeit ermitteln.

Ungefähre mittl. Zeit	=	$3^h\ 3'$	
OL. in Zeit	= —	$1^h\ 26'\ 16''$	
Ungefähre mittl. Greenw. Zeit	=	$1^h\ 36'\ 44''$	Nachm. d. 5. Jan.
Naut. Jahrb. den 5. Jan., ⊙ AR.	=	$19^h\ 3'\ 4'',3$	
Stündl. Differenz = + $10'',98$			
Ungef. mittl. Greenw. Zeit = $1^h,6$			
$17'',57$	+	$17'',6$	
Reducirte ⊙ AR.	=	$19^h\ 3'\ 21'',9$	
Sternzeit	=	$22^h\ 1'\ 39'',5$	
Wahre Zeit	=	$2^h\ 58'\ 17'',6.$	

Lösung ohne die ungefähre mittlere Zeit zu gebrauchen.

N. Jahrb. d. 5. Januar, Sternzeit . . .	=	$18^h\ 57'\ 36'',0$	
Acceleration für $1^h = 9'',86$; » » $26' = 4'',27$; » » $16'' = 0'',04$	—	$14'',2$	= Accel f. OL.
Sternzt. i. mttl. Mttg. d. 5ten in 21° 34′ OL.	=	$18^h\ 57'\ 21'',8$	
Gegebene Sternzeit	=	$22^h\ 1'\ 39'',5$	
Seit dem mittl. Mittage verfl. Sternzeit	=	$3^h\ 4'\ 17'',7$	
Retardation für $3^h = 29'',49$; » » $4' = 0'',66$; » » $17'',7 = 0'',05$	—	$0'\ 30'',2$	
Mittl. Zeit den 5. Januar	=	$3^h\ 3'\ 47'',5$	Nachmittags.
OL. in Zeit	=	$1^h\ 26'\ 16''$	
Ungefähre mittl. Greenw. Zeit	=	$1^h\ 37'\ 31'',5$	
N. Jahrb. den 5ten Januar, Zeitgl. . .	=	$5'\ 28'',3$	+ auf wahre Zeit.
Stündl. Differenz = + $1'',12$			
$1^h,6$			
+ $1'',79$	+	$1'',8$	
Reducirte Zeitgl.	=	$5'\ 30'',1$	— auf mttl. Zt.
Mittlere Zeit wie oben	=	$3^h\ 3'\ 47'',5$	
Wahre Zeit	=	$2^h\ 58'\ 17'',4.$	

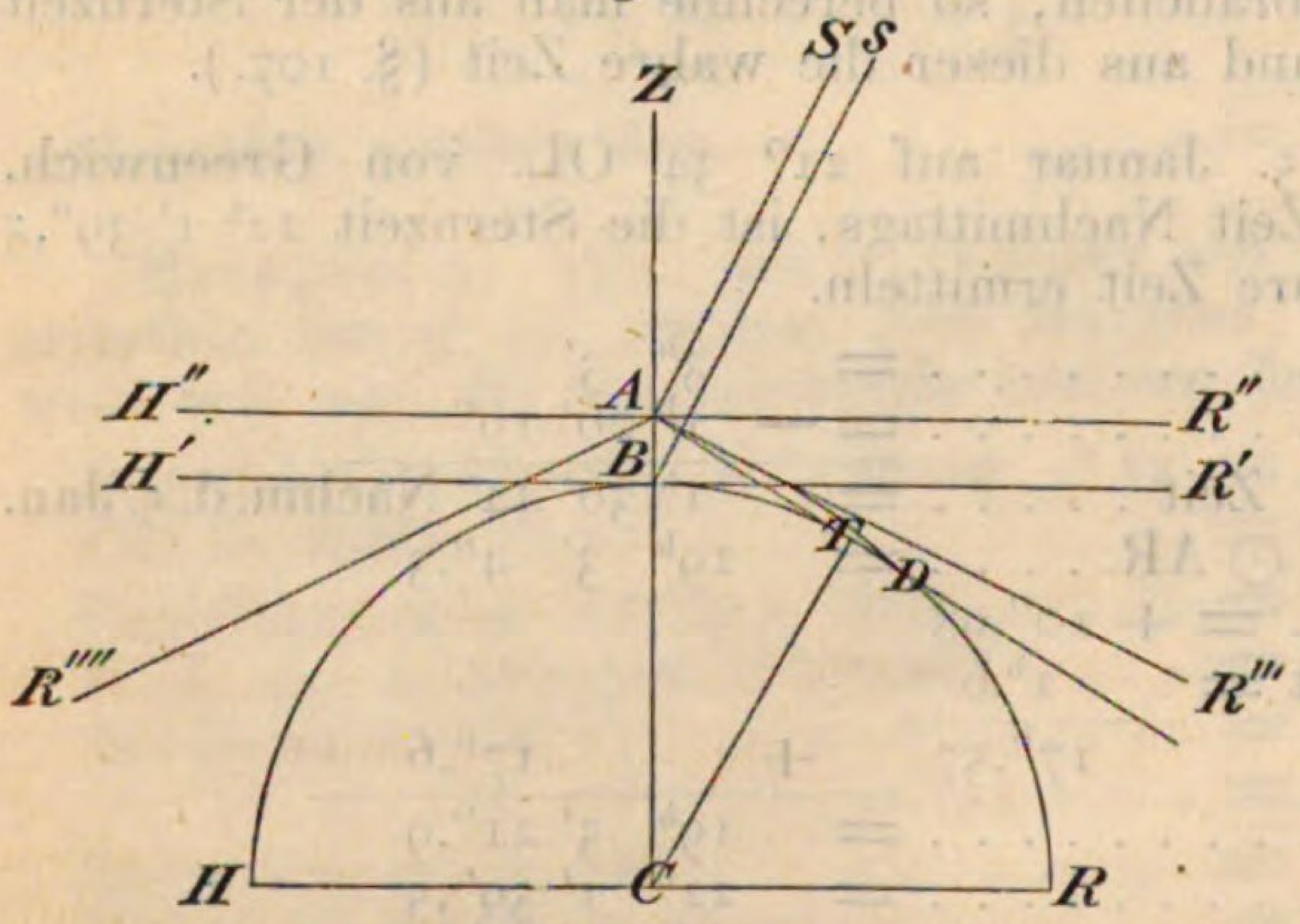
*) Weicht die gefundene wahre Zeit so viel von der ungefähren wahren Zeit ab, dass es, wenn man die ⊙ AR. für dieselbe aufs Neue berechnet, einen erheblichen Unterschied mit der nach der ungefähren wahren Zeit schon gefundenen ⊙ AR. machen würde, so muss man die Rechnung wiederholen, indem man die gefundene wahre Zeit als die ungefähre wahre Zeit annimmt.

§. 111.

Kimmtiefe.

1. Wenn das Auge des Beobachters auf See etwas über der Wasserfläche sich befindet, so wird es um sich herum den Seehorizont, auch Kimm oder Kimmung genannt, wahrnehmen (§. 15.). Kimmtiefe heisst der Winkel, den die Gerade, vom Auge dieses Beobachters nach seinem Seehorizonte gedacht, mit der Ebene seines scheinbaren Horizontes bildet.

Fig. 68.



Es sei Fig. 68. *HBR* ein grösster Halbkreis, der mit dem Radius *BC* um *C* (dem Mittelpunkte der Erde und diese als Kugel betrachtet) beschrieben ist und dessen erweiterte Fläche durch das Zenith (*Z*) eines Beobachters in *B* und durch ein Gestirn *S* geht. Ferner sei in derselben Fläche *HR* eine Durchschnittslinie in der Ebene des wahren Horizontes, sowie *H'R'* in der Ebene des scheinbaren Horizontes des Ortes *B*, *A* sei das Auge eines Beobachters in *B*, *R''H''* eine Linie durch *A* parallel mit *RH*, und *AT* eine Tangente durch *A*, welche die Oberfläche des Meeres in *T* berührt; so wird der Winkel *TAR''* die wahre Kimmtiefe genannt.

Denkt man sich noch eine Linie *Bs* von *B* an das Gestirn *S* gezogen, so kann man, da jedenfalls die Augeshöhe *AB* gegen die Entfernung eines Gestirnes von der Erde sehr klein ist, ohne erheblichen Fehler annehmen, dass *Bs* mit *AS* parallel und mithin der Winkel $sBR' =$ dem Winkel SAR'' ist.

Die Höhe des Gestirnes *S* über dem scheinbaren Horizonte ist $= \angle sBR' = \angle SAR''$ (§. 18.) und die Höhe desselben Gestirnes über dem Seehorizonte $= \angle SAT = \angle sBR' + \angle R''AT$. Die Höhe eines Gestirnes über dem Seehorizonte ist mithin um die Kimmtiefe grösser als die Höhe desselben Gestirnes über dem scheinbaren Horizonte; weil aber alle hier gezogenen Linien in einer und derselben Verticalebene liegen, so wird das Azimuth eines Gestirnes nicht durch die Kimmtiefe verändert.

2. Bestimmung der wahren Kimmtiefe.

Man ziehe Fig. 68. den Radius *CT* an den Berührungspunkt *T* der Tangente *AT*, so entsteht ein bei *T* rechtwinkliges Dreieck *ATC*.

Es ist nun $\angle ACT = 90^\circ - \angle CAT$; aber auch

$\angle R''AT = 90^\circ - \angle CAT$, mithin

$\angle ACT = \angle R''AT$ und

$$\text{tang} \angle ACT = \text{tang Kimmtiefe} = \frac{AT}{CT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)}.$$

Es ist aber, wenn *h* die Augeshöhe (*AB*) und *r* den Halbmesser der Erde $CT = CB$ bezeichnet,

$$AT^2 = r^2 + 2rh + h^2 - r^2$$

$= 2rh$, wenn man h^2 als eine unbedeutende Grösse gegen $2rh$ vernachlässigt.

Setzt man diesen Werth von AT^2 in Gleichung (I.), so erhält man

$$\text{tang Kimmtiefe} \ldots\ldots\ldots = \sqrt{\frac{2hr}{r^2}} = \sqrt{\frac{2h}{r}},$$

oder weil die Kimmtiefe nur klein,

$$\text{Kimmtiefe in Secunden} \ldots = \frac{1}{\text{tang } 1''} \cdot \sqrt{\frac{2h}{r}} = \frac{1}{\text{tang } 1''} \cdot \sqrt{\frac{2}{r}} \cdot \sqrt{h} \text{ (II.)},$$

worin der Erdradius und die Augeshöhe in gleichem Maasse auszudrücken sind. Nach §. 8. ist der mittlere Erdradius = 20285700 Fuss Rheinl. = 20888653 Fuss Engl., daher, wenn h in Rheinl. Fussen ausgedrückt ist, hat man

$$\text{wahre Kimmtiefe in Secunden} = \frac{1}{\text{tang } 1''} \cdot \sqrt{\frac{2}{20285700}} \cdot \sqrt{h}$$
$$= 64'',766 \cdot \sqrt{h} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (III.)};$$

wenn h aber in Engl. Fussen gegeben ist, so ergiebt sich

$$\text{wahre Kimmtiefe in Secunden} = \frac{1}{\text{tang } 1''} \cdot \sqrt{\frac{2}{20888653}} \cdot \sqrt{h}$$
$$= 63'',824 \cdot \sqrt{h} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (IV.)}.$$

3. Die irdische Refraction und die scheinbare Kimmtiefe.

Durch die irdische Refraction — die Brechung der Lichtstrahlen, die von irdischen Gegenständen kommen — welche dadurch entsteht, dass die Strahlen durch Luftschichten von verschiedener Dichtigkeit gehen, bis sie in das Auge des Beobachters gelangen, erscheinen oft entfernte niedrige Gegenstände auf der Oberfläche der Erde (mithin auch die Kimm) höher als sie wirklich sind; denn die Luft zunächst dem Wasser ist meistens dichter als die Luft in der Gegend des erhöhten Auges, wodurch die vom Horizonte kommenden Strahlen dergestalt gebogen werden, dass die convexe Seite nach oben gekehrt ist. Das Auge sieht den Strahl in der letzten Richtung, also in der Richtung der Tangente an den letzten Bogen des Lichtstrahls, der das Auge trifft. Wenn daher der vom Horizonte in's Auge gelangende Strahl die Curve DA durchläuft (Fig. 68.), so wird das Auge die Kimm in der Richtung AR''' sehen, und die scheinbare Kimmtiefe ist dann $= \angle R'''AR'' = \angle R''AT - \angle R'''AT$.

Delambre hat im Mittel aus mehreren Beobachtungen, die aber weder gleichzeitig, noch mit Berücksichtigung des verschiedenen Zustandes der Atmosphäre gemacht sind, den Coefficienten, womit man die Kimmtiefe zu multipliciren hat, um die terrestrische Refraction zu erhalten, = 0,08 gefunden, woraus sich der Coefficient, womit die wahre Kimmtiefe zu multipliciren ist, um die scheinbare Kimmtiefe zu erhalten, = 0,92 ergiebt.

Es ist daher, wenn die Augeshöhe h in Rheinl. Fussen gegeben ist, nach (III.):

$$\text{scheinb. Kimmt. in Sec.} = 64'',77 \cdot 0,92 \cdot \sqrt{h} = 59'',59 \cdot \sqrt{h} \ldots\ldots \text{ (V.)},$$

und wenn h in Engl. Fussen bekannt ist, so ergiebt sich aus (IV.):

$$\text{scheinb. Kimmt. in Sec.} = 63'',82 \cdot 0,92 \cdot \sqrt{h} = 58'',72 \cdot \sqrt{h} \ldots\ldots \text{(VI.)}.$$

Nach (V.) ist die nautische Tafel VII. in den ersten fünf Auflagen berechnet, und die scheinbare Kimmtiefe kann aus derselben für jeden Fuss Rheinl. bis 80 Fuss Augeshöhe entnommen werden. Ist die Augeshöhe in Meter angegeben, so drücke man diese Meter in Fuss Rheinl. aus, was dadurch geschieht, dass man erstere mit 3,19 multiplicirt.

Wird in (II.) sowohl r als h in Meter ausgedrückt, so ergiebt sich, da
$$r = 6366738{,}06 \text{ Meter ist,}$$

$$\text{wahre Kimmtiefe in Secunden} = \frac{1}{\text{tang } 1''} \cdot \sqrt{\frac{2}{6366738{,}06}} \cdot \sqrt{h}$$
$$= 115'',61 \cdot \sqrt{h} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha),$$
$$\text{scheinb. Kimmtiefe in Secunden} = 115'',61 \cdot 0{,}92 \cdot \sqrt{h}$$
$$= 106'',36 \cdot \sqrt{h} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\beta).$$

Nach (β.) ist Tafel VII. in der sechsten Auflage berechnet.

Beispiel. Man soll die wahren und scheinbaren Kimmtiefen für die Augeshöhen von 25 Fuss Rheinl. und 25 Fuss Engl. finden.

$64'',77 \cdot \sqrt{25} = 323'',85 = 5'\,23'',9$ ist die wahre Kimmtiefe für 25 Fuss Rheinl.
$59'',59 \cdot \sqrt{25} = 297'',95 = 4'\,58''$ » » scheinb. » » 25 » »
$63'',82 \cdot \sqrt{25} = 319'',15 = 5'\,19'',2$ » » wahre » » 25 » Engl.
$58'',72 \cdot \sqrt{25} = 293'',6 = 4'\,53'',6$ » » scheinb. » » 25 » ».

Nach den oben erwähnten Beobachtungen von Delambre haben die verschiedenen Resultate auf jeder Seite des mittleren Werthes des Coefficienten von 0,08 höchstens um 0,22 differirt, woraus hervorgeht, dass die nach vorstehender Formel berechnete scheinbare Kimmtiefe nicht immer mit der wirklichen scheinbaren Kimmtiefe übereinstimmen wird, und woraus dann weiter folgt, dass Höhenmessungen über dem Seehorizonte, berichtigt mit der oben berechneten scheinbaren Kimmtiefe, nicht sehr zuverlässig sein können.

Ein anderer Umstand, wodurch die Kimmtiefe unsicher wird, ist, dass die Augeshöhe sich selten genau angeben lässt, weil das Schiff sich beständig hebt und senkt; auch setzen die Wellen die Kimmung ebenfalls in eine wellenförmige Bewegung, welches indessen einen geringeren Einfluss auf die Kimmtiefe hat, wenn das Auge bedeutend über der Wasserfläche steht. Jedenfalls muss das Auge so hoch sein, dass es über die zwischen Schiff und Kimm laufenden Wellen hinwegsieht.

Man hat zwar mehrere Instrumente, womit man die Kimmtiefe an Bord beobachten kann, nämlich den sogenannten Dipsector, sowie den von Oertling erfundenen Kreis und den Sextanten von Pistor und Martins, mit welchen letzteren beiden Instrumenten man Winkel über 180° messen kann; die diesfälligen Beobachtungen zur Bestimmung der Kimmtiefe werden aber an Bord durch die beständige Bewegung des Schiffes manchmal so unsicher, dass man aus den unter sich stattfindenden Abweichungen der gleichzeitigen Beobachtungen ersehen kann, dass es räthlicher ist, die durch genauere Beobachtungen gefundene mittlere Wirkung der irdischen Refraction anzunehmen.

Als Beispiel mögen hier folgende Beobachtungen dienen, welche bei heiterer Luft, deutlichem Horizonte und nicht sehr starker Bewegung des Schiffes gemacht sind.

1. 1844 den 31. Mai wurden um 10^h Morgens mit einem Dipsector bei einer Augeshöhe von 15 Fuss Englisch der convexe und hohle Winkel gemessen, welche Tangenten vom Auge des Beobachters nach zwei entgegengesetzten Punkten der Kimm gezogen, mit einander bilden. Diese Winkel sind:

	der convexe	der concave
	18° 4′ 10″	17° 46′ 30″
	5′ 0″	45′ 0″
	4′ 10″	45′ 50″
	4′ 10″	45′ 50″
Mittel =	18° 4′ 22″	17° 45′ 47″
	17° 45′ 47″	

Differenz = 18′ 35″ : 4 = 4′ 39″ scheinbare Kimmtiefe.

$\sqrt{15}$ ist nahe 3,9 und die scheinbare Kimmtiefe nach (VI.) = 58″,72 · 3,9 = 229″ = 3′ 49″.

Die wahre Kimmtiefe aber ist nach (IV.) = 63″,83 · 3,9 = 248″,9 = 4′ 8″,9.

Die scheinbare Kimmtiefe nach der Beobachtung ist = 4′ 39″ = 279″, die durch 248″,9 dividirt 1,12 geben, welches hiernach der Coefficient ist, womit man die wahre Kimmtiefe multipliciren muss, um die scheinbare Kimmtiefe zu erhalten.

2. 1844 den 31. Mai um $10\frac{1}{4}^h$ Morgens mit einem Dipsector, Augeshöhe 11 Fuss Englisch, ähnlich wie vorstehend beobachtet.

	17° 46′ 20″	18° 3′ 50″
	46′ 30″	2′ 50″
	47′ 10″	3′ 0″
	46′ 40″	3′ 0″
	47′ 20″	3′ 50″
Mittel =	17° 46′ 48″	18° 3′ 18″
	18° 3′ 18″	

Differenz = 16′ 30″ : 4 = 4′ 7″,5 scheinbare Kimmtiefe.

$\sqrt{11}$ = 3,32, mithin wahre Kimmtiefe = 63″,83 · 3,32 = 211″,9 = 3′ 31″,9.

Die scheinbare Kimmtiefe ist = 4′ 7″,5 = 247″,5 und diese dividirt durch 211″,9 giebt 1,17, womit man hiernach die wahre Kimmtiefe zu multipliciren hat, um die scheinbare Kimmtiefe zu erhalten.

3. 1844 den 31. Mai um $10\frac{1}{3}^h$ Morgens wurde bei einer Augeshöhe von 11 Fuss Englisch mit Pistor und Martins Sextant No. 1. der hohle Winkel zwischen zwei gegenüberstehenden Punkten der Kimm zur Bestimmung der Kimmtiefe gemessen:

	179° 53′ 20″
	53′ 20″
	52′ 50″
	52′ 40″
	53′ 0″
Mittel =	179° 53′ 2″
Indexcorrection =	— 10″
	179° 52′ 52″
	180°
	7′ 8″ : 2 = 3′ 34″ scheinbare Kimmtiefe.

Die wahre Kimmtiefe ist oben für 11 Fuss Englisch Augeshöhe = 211″,9 gefunden, folglich ist die scheinbare Kimmtiefe dividirt durch die wahre Kimmtiefe = 214″ : 211,9 = 1,01, womit man diesemnach die wahre Kimmtiefe zu multipliciren hat, um die scheinbare Kimmtiefe zu erhalten.

4. 1844 den 31. Mai um 10^h 25' Morgens ist mit Oertlings Kreis bei 12,5 Fuss Englisch Augeshöhe beobachtet, nachdem erst der Indexfehler untersucht und eine Alhidade auf 90° gestellt war:

	89° 51' 10"
	50' 40"
	50' 40"
	51' 0"
	51' 0"
	50' 50"
	51' 0"
	51' 0"
	51' 0"
	51' 10"
Mittel =	89° 50' 57"
Indexcorrection =	+ 40"
	89° 51' 37", also 179° 51' 37" der hohle Winkel zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten der Kimm,

folglich 8' 23" : 2 = 4' 11",5 scheinbare Kimmtiefe.

$\sqrt{12{,}5} = 3{,}54$, also die wahre Kimmtiefe = 63".83 · 3,54 = 226" = 3' 46". Die scheinbare Kimmtiefe dividirt durch die wahre Kimmtiefe ist also = 251.5 : 226 = 1,11.

Das Barometer stand während dieser Beobachtungen auf 30",03 Engl. und das Thermometer zeigte + 60°,2 Fahrenheit.

Auch mit einem gewöhnlichen Sextanten kann man auf See die scheinbare Kimmtiefe durch Beobachtung finden, wenn die Höhe der Sonne 60° und darüber ist. Man messe nämlich mit dem Sextanten erst die kleinste, dann die grösste Höhe nach der entgegengesetzten Seite des Horizontes und zuletzt wieder die kleinste Höhe; bringe dann, indem man die Höhenänderungen den Zeiten proportional setzt, die kleinste Höhe auf die Zeit der grössten Höhe, so ist für die Sonne in S (Fig. 68.) die kleinste Höhe = $\angle R''AS$, die grösste Höhe = $\angle R'''AS$ und die Summe beider Höhen = 180° + 2 scheinbare Kimmtiefen, wenn man zuvor die Indexcorrection auf jede Höhe angewandt hat.

Es ist diesemnach

$$\text{die scheinbare Kimmtiefe} = \frac{\text{kl. Höhe} + \text{gr. Höhe} - 180°}{2}.$$

Wollte man nur die vom Indexfehler und von der scheinbaren Kimmtiefe befreite kleinste Höhe haben, so ist dieselbe

$$= 90° - \frac{\text{gr. Höhe} - \text{kl. Höhe}}{2};$$

denn beide Höhen müssen durch den Indexfehler und durch die Kimmtiefe gleich viel zu gross oder zu klein gefunden sein, ihr halber Unterschied ist also = der scheinbaren Zenithdistanz $\angle SAZ$.

Als Beispiel kann folgende Beobachtung dienen.

1844 den 3. Juni Mittags, Barometer 30",0 Englisch; Thermometer + 57° Fahrenheit; Indexcorrection — 0' 40"; Augeshöhe = 13' Englisch.

$12^h\ 4'\ 9''$	$12^h\ 3'\ 25''$ ⊙ kl. H. = $57^\circ\ 6'\ 50''$			
	$12^h\ 4'\ 4''$ » » » = $57^\circ\ 8'\ 45''$	 $57^\circ\ 8'\ 47''$		
	$12^h\ 4'\ 58''$ » » » = $57^\circ\ 10'\ 45''$	+ $12'\ 24''$		
		$57^\circ\ 21'\ 11''$ =	kl. Höhe zur Zeitd. grössten Höhe beobachtet.	
		I. C. — $0'\ 40''$		
		Kl. H. = $57^\circ\ 20'\ 31''$		

$12^h\ 9'\ 30''$	$12^h\ 7'\ 23''$ ⊙ gr. H. = $122^\circ\ 50'\ 30''$	
	$12^h\ 8'\ 28''$ » » » = $122^\circ\ 48'\ 20''$	
	$12^h\ 10'\ 6''$ » » » = $122^\circ\ 44'\ 10''$	 $122^\circ\ 45'\ 46''$
	$12^h\ 10'\ 36''$ » » » = $122^\circ\ 43'\ 20''$	I. C. — $40''$
	$12^h\ 10'\ 58''$ » » » = $122^\circ\ 42'\ 30''$	Gr. H. = $122^\circ\ 45'\ 6''$

$12^h 12' 51''$	$12^h\ 12'\ 9''$ ⊙ kl. H. = $57^\circ\ 27'\ 30''$	
	$12^h\ 12'\ 53''$ » » » = $57^\circ\ 29'\ 20''$	 $57^\circ\ 28'\ 57''$
	$12^h\ 13'\ 32''$ » » » = $57^\circ\ 30'\ 0''$	

Dies liefert $8'\ 42'' : 5'\ 21'' = 20'\ 10'' : x$

$8'\ 42''$ plg = 1,3158	
$5'\ 21''$ plg = 1,5269	
$20'\ 10''$ plg = 0,9506	Gr. H. = $122^\circ\ 45'\ 6''$
2.4775	Kl. H. = $57^\circ\ 20'\ 31''$
$x = 12'\ 24''$ plg = 1,1616	Sum. = $180^\circ\ 5'\ 37''$
	180°
	$5'\ 37'' : 2 = 2'\ 48'',5$ scheinbare Kimmtiefe.

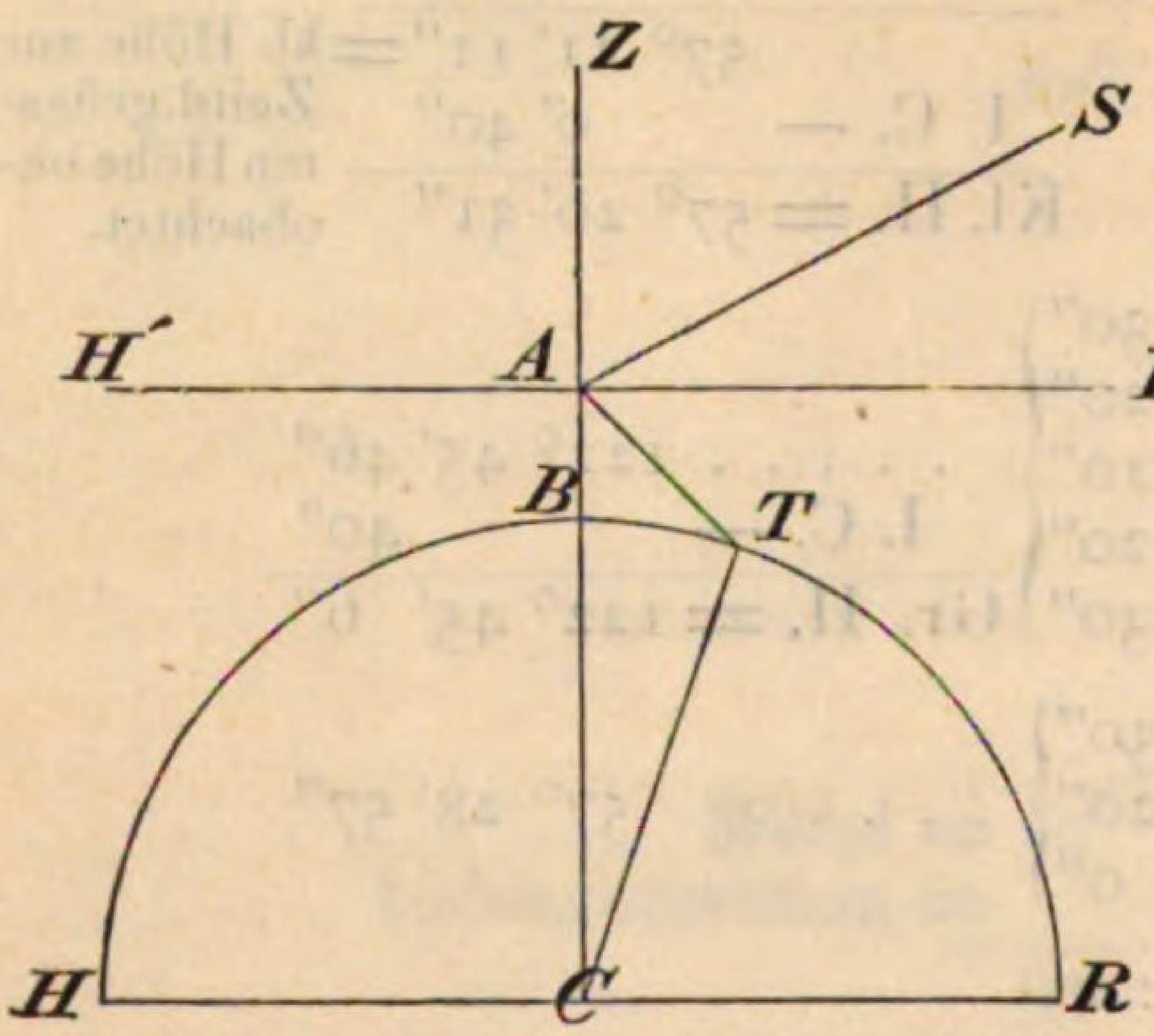
$\sqrt{13} = 3{,}6$; folglich wahre Kimmtiefe $= 3{,}6 \cdot 63'',83 = 229'',8$ und scheinbare Kimmtiefe dividirt durch wahre Kimmtiefe $= 168'',5 : 229'',8 = 0{,}73$, womit man hiernach die wahre Kimmtiefe multipliciren müsste, um die scheinbare Kimmtiefe zu finden.

Die für scheinbare Kimmtiefe und Indexfehler corrigirte Höhe wäre in diesem Falle $= 90^\circ - \frac{122^\circ\ 45'\ 46'' - 57^\circ\ 21'\ 11''}{2} = 57^\circ\ 17'\ 42'',5$.

Abgesehen von der Mühe, welche auch mit dieser zuletzt angeführten Beobachtung verbunden ist, um die scheinbare Kimmtiefe zu ermitteln, gewährt dieselbe ebenfalls keine grosse Genauigkeit, weil besonders über dem Seehorizonte grosse Winkel sich nicht so genau messen lassen als kleine; da aber selbst der grösste Winkel hierbei nie so gross werden kann, als wenn man den Winkel zwischen zwei entgegengesetzten Punkten der Kimm misst, welcher immer nahe 180° ist und sich am allerschwersten beobachten lässt, so wird jene Beobachtung auch ebenso viel Genauigkeit gewähren als diejenige, welche besondere Instrumente erfordert. Bei allen diesen Beobachtungen ist übrigens die Voraussetzung gemacht, dass zwei einander gegenüberliegende Kimmtiefen immer gleich gross sind, welches, abgesehen von der sphäroidischen Gestalt der Erde, wegen der möglichen Ungleichheit der Temperatur an verschiedenen Stellen des Horizontes und der ungleichen Dichtigkeit der Luft, durch welche die Lichtstrahlen von den Punkten der Kimm gehen, nicht immer der Fall sein dürfte.

4. Von der Kimmtiefe, die man anzuwenden hat, wenn eine innerhalb des Seehorizontes liegende Strandlinie als Kimm angenommen wird und man den Abstand dieser Grenzlinie kennt.

Fig. 69.



Es sei (Fig. 69.) HBR ein grösster Halbkreis der Erde durch den Ort eines Beobachters in B gehend, dessen Scheitellinie ZC ist, BA sei die Augeshöhe und BT die Entfernung des Beobachters von der als Kimm angenommenen Strandlinie innerhalb des Seehorizontes gelegen.

Wenn ein Gestirn S mit AT in derselben Verticalebene liegt, so ist die Höhe desselben über dieser Kimm der $\angle SAT$, welcher um den $\angle R'AT$ grösser als die Höhe desselben Gestirnes über dem scheinbaren Horizonte, nämlich $\angle SAR'$ ist. Der $\angle R'AT$ ist hier die Tiefe gedachter Strandlinie (Strandtiefe).

Zieht man CT und ist BT in Seemeilen bekannt, so enthält $\angle BCT$ ebenso viele Minuten als BT Seemeilen. Bezeichnet man die Augeshöhe mit h und den Radius der Erde $BC = TC$ mit r, so verhält sich, wenn man die halbe Differenz der Winkel CAT und $CTA = n$ setzt

$$2r + h : h = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \angle ACT : \operatorname{tang} n,$$

mithin ist $\operatorname{tang} n = \dfrac{h}{2r+h} \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \angle ACT = \dfrac{h}{2r+h} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \angle ACT}$,

oder da n und $\angle ACT$ nur stets klein sein werden, so hat man, r und h in Rheinl. Fussen und n in Minuten ausgedrückt:

$$n \text{ in Minuten} = \frac{h}{2 \cdot 20285700} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \angle ACT \cdot \operatorname{tang}^2 1'},$$

$$= \frac{h}{\angle ACT} \cdot \frac{1}{20285700 \cdot \operatorname{tang}^2 1'},$$

$$= \frac{h}{\angle ACT} \cdot 0{,}5826.$$

Es ist ferner $\angle CAT = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ACT - n$, und auch $= 90^\circ - \angle R'AT = 90^\circ$ — Strandtiefe; folglich

wahre Strandtiefe in Minuten

$= n$ in Minuten $+ \frac{1}{2} \angle ACT$,

$$= \frac{h}{\angle CAT \text{ in Min.}} \cdot 0{,}5826 + \tfrac{1}{2} \angle ACT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XI.)}.$$

Auf ähnliche Art findet man, h in Engl. Fussen bekannt, und $r = 20888653$ Engl. Fuss,

wahre Strandtiefe in Minuten

$$= \frac{h}{\angle ACT \text{ in Min.}} \cdot 0{,}5658 + \tfrac{1}{2} \angle ACT,$$

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl. in Seem.}} \cdot 0{,}5658 + \frac{\text{Abst. d. Strandl. in Seem.}}{2} \quad \ldots \text{(XII.)}.$$

Durch die irdische Refraction wird die nach (XI.) und (XII.) gefundene wahre Strandtiefe ungefähr um den 0,08ten Theil des Abstandes der Kimm verkleinert, und man findet daher, wenn h in Rheinl. Fussen gegeben ist, nach (XI.):

scheinbare Strandtiefe in Minuten

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl. i. Seem.}} \cdot 0{,}5826 + \frac{\text{Abst. d. Strandl.}}{2} - \text{Abst. d. Strandl.} \cdot 0{,}08,$$

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl.}} \cdot 0{,}5826 + \frac{\text{Abst. d. Strandl.}}{2} - \frac{\text{Abst. d. Strandl.}}{2} \cdot 0{,}16,$$

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl.}} \cdot 0{,}5826 + \frac{\text{Abst. d. Strandl.}}{2} \cdot 0{,}84,$$

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl. in Seem.}} \cdot 0{,}5826 + \text{Abst. d. Strandl. in Seem.} \cdot 0{,}42 \quad \text{(XIII.)},$$

nach welcher Formel die nautische Tafel VIII.*) berechnet ist, und aus welcher die Strandtiefe für verschiedene Augeshöhen und Entfernungen der Kimm entnommen werden kann. Wäre die Augeshöhe in Meter angegeben, so multiplicire man sie mit 3,19 und man hat sie in Fuss Rheinl., womit die Tiefe der Strandlinie aus der Tafel zu entnehmen ist.

Will man aber für h in Meter eine Formel haben zur Berechnung der Tiefe der Strandlinie (Strandtiefe), so hat man nach Vorstehendem

wahre Strandtiefe in Minuten

$$= \frac{h}{\angle ACT \text{ in Min.}} \cdot \frac{1}{6366738 \cdot \tang^2 1'} + \frac{\angle ACT}{2},$$

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl. in Seem.}} \cdot 1{,}8562 + \frac{\text{Abst. d. Strandl. in Seem.}}{2},$$

scheinb. Strandtiefe in Minuten

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl. in Seem.}} \cdot 1{,}8562 + \text{Abst. d. Strandl. i. Seem.} \cdot 0{,}42 \quad \text{(XIV.)}^{**}).$$

Auf ähnliche Art findet man, wenn die Augeshöhe (h) in Englischen Fussen gegeben ist, nach (XII.):

scheinb. Strandtiefe in Minuten

$$= \frac{h}{\text{Abst. d. Strandl. in Seem.}} \cdot 0{,}5658 + \text{Abst. d. Strandl. in Seem.} \cdot 0{,}42 \quad \text{(XV.)}.$$

Beispiel 1. Die Entfernung des Strandes sei 1,5 Seem., die Augeshöhe 15 Fuss Rheinl.; man soll die scheinbare Strandtiefe finden.

$$\frac{15}{1{,}5} \cdot 0{,}5826 + 1{,}5 \cdot 0{,}42 = 6',46 = 6'\ 28'' = \text{scheinb. Strandtiefe.}$$

Beispiel 2. Die Entfernung des Strandes sei 2 Seem., die Augeshöhe 20 Fuss Engl., man soll die wahre Strandtiefe finden.

Es ist $\frac{20}{2} \cdot 0{,}5658 + \frac{2}{2} = 6',658 = 6'\ 39'' =$ wahrer Strandtiefe.

§. 112.

Refraction.

In den §§. 59. und 61. ist nachgewiesen, dass Lichtstrahlen, wenn sie aus einer dünneren durchsichtigen Materie in schräger Richtung in eine dichtere Materie übergehen, an der beide Materien trennenden Fläche gebrochen werden, und zwar in diesem dichteren Medium nach dem im Einfallspunkte auf gedachter Fläche errichteten Lothe. Wenn also ein Lichtstrahl aus einer durchsichtigen dichteren Materie in eine dünnere übergeht, so wird derselbe von dem durch den Einfallspunkt auf die Ebene errichteten Lothe abwärts gebrochen. Fällt ein Lichtstrahl normal auf die Ebene einer dichteren oder dünneren durchsichtigen Materie,

*) Auflage I. bis V.

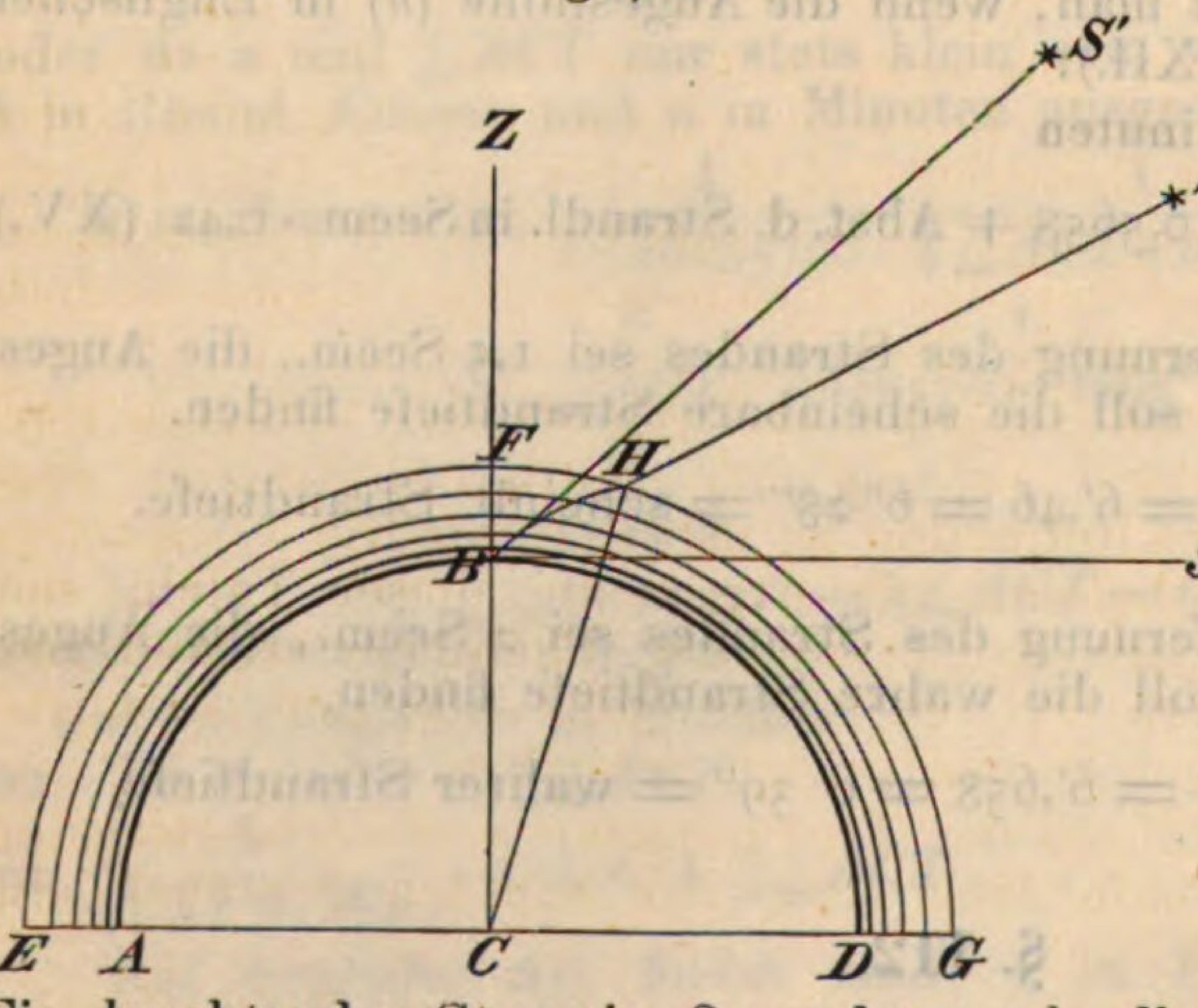
**) Tafel VIII. in Auflage VI. so berechnet.

so behält derselbe seine Einfallsrichtung und geht ohne Brechung durch. Jedenfalls nimmt aber ein Lichtstrahl, er mag aus einer dünneren in eine dichtere Materie oder umgekehrt übergehen, seinen Weg durch diejenige Ebene, welche durch das Loth des Einfallspunktes und die Richtung des einfallenden und gebrochenen Strahles geht (§. 59.).

Diese Brechung erleiden auch die Lichtstrahlen, welche von den Gestirnen durch die Atmosphäre der Erde in das Auge eines Beobachters gelangen, und dieselbe hat zur Folge, dass man die Gestirne — ausgenommen, wenn sich eins im Zenith des Ortes befindet, dessen Strahl dann senkrecht auf die Fläche der Atmosphäre fällt und ungebrochen durchgeht — nicht an derselben Stelle des Himmels sieht, an welcher sie gesehen werden würden, wenn die Erde von keiner das Licht brechenden Atmosphäre umgeben wäre. Diese Verrückung des wahren Ortes der Gestirne durch die Atmosphäre der Erde wird astronomische Strahlenbrechung oder astronomische Refraction genannt.

Um sich von dieser Refraction einen Begriff machen und die Veränderungen derselben erklären zu können, bedenke man, dass die die Atmosphäre bildende Luft, wie andere Körper, schwer und elastisch ist, und dass sich die Dichtigkeit derselben wie das Gewicht, welches sie trägt, oder wie die zusammendrückende Kraft verhält. Mithin muss die Dichtigkeit der Luft sich sehr nahe dem Drucke oder der Barometerhöhe proportional ändern, woraus ferner folgt, dass bei einerlei Temperatur die unteren Schichten der Atmosphäre dichter sein müssen, als die oberen, deren Gewicht die unteren Schichten zusammendrückt.

Fig. 70.



Es sei (Fig. 70.) C der Mittelpunkt der Erde, deren Oberfläche durch ABD dargestellt ist, EFG die äusserste Grenze der die Erde concentrisch umgebenden Atmosphäre, Z das Zenith eines Beobachters in B, und EG die Richtung des wahren Horizontes. Ein leuchtender Stern in S sendet nach allen Richtungen Strahlen aus, und einer derselben muss daher auch die Richtung SH haben. Dieser würde, wenn keine Atmosphäre da wäre, in derselben Richtung fortgehen und das Auge des Beobachters in B nicht treffen. Man ziehe CH, so ist dies die Richtung des Einfallslothes, und vermöge des angeführten Brechungsgesetzes der Lichtstrahlen muss der gedachte Strahl von H an eine die concave Seite nach unten kehrende krumme Linie beschreiben. Wenn nun diese Curve das Auge des Beobachters in B trifft, so wird dieser das Gestirn nach der letzten Richtung des Strahles, der in sein Auge kommt, also nach der Richtung BS', der Tangente der Curve BH, sehen, und der Stern, welcher wirklich in S sitzt, wird von dem Beobachter (B) in S' gesehen. Die Strahlenbrechung ist also in diesem Falle gleich dem Winkel SBS', und um diesen Winkel ist der scheinbare Ort des Sternes (S') dem Zenith (Z) näher als der wahre Ort (S). Es wird daher

die scheinbare Zenithdistanz eines Himmelskörpers durch die Refraction verkleinert, mithin die scheinbare Höhe um ebenso viel vergrössert, woraus folgt, dass man immer die Refraction von der scheinbaren Höhe abziehen muss, um die für Refraction berichtigte Höhe zu erhalten.

Denkt man sich ein Gestirn im Zenith, so fällt der Strahl *ZF* mit dem Einfallslothe zusammen, und ein Beobachter in *B* sieht den Himmelskörper an seinem wahren Orte; die Refraction ist in diesem Falle = o. Ist ein Gestirn aber im Horizonte in *s*, so fällt der in's Auge des Beobachters gelangende Strahl nicht allein am schrägsten auf die Atmosphäre, sondern hat auch den möglichst grössten Weg durch dieselbe zu machen, wodurch der Strahl also auch stärker gebrochen wird. Die Refraction im Horizonte oder für o° Höhe ist demnach die grösste; sie nimmt mit der Höhe ab. Die Refraction ist übrigens unter gleichen Umständen in gleichen Höhen gleich gross und, wie schon bemerkt, im Zenith = o.

Da der Strahl sich stets nach dem Einfallslothe biegt, so folgt daraus, dass die Refraction zwar die Höhe eines Gestirnes ändert, dasselbe aber nicht aus seinem Verticalkreise rückt, sondern nur in dem Verticale, der durch das geographische Zenith des Beobachters geht, wirkt. Demnach ist die astronomische Strahlenbrechung ein Verticalwinkel.

Da Kälte die Luft zusammenzieht, Wärme sie ausdehnt, und bei einem höheren Barometerstande die Luft mehr zusammengedrückt ist, als wenn das Barometer niedriger steht, so muss bei niedrigerem Thermometer- und bei höherem Barometerstande die Refraction grösser sein, als wenn das Thermometer höher und das Barometer niedriger steht.

Es wird die bei einem angenommenen mittleren Barometer- und Thermometerstande stattfindende Refraction die mittlere genannt. Dieser mittlere Thermometer- und Barometerstand ist bei der in Tafel IX. enthaltenen mittleren Refraction zu 50° des Fahrenheit'schen Thermometers und zu 29,6 Zoll Engl. Barometerhöhe angenommen. Das Argument dieser Refractionstafel ist die scheinbare Höhe.

Die Correctionen, welche für jeden anderen als den mittleren Barometer- und Thermometerstand auf die resp. mittlere Refraction anzuwenden sind, um die wahre Refraction zu erhalten, sind in 2 besonderen Tafeln unter No. XIII. enthalten. Die Argumente dieser Tafeln sind: bei der einen die scheinbare Höhe und der Thermometerstand nach Fahrenheit, bei der anderen die scheinbare Höhe und der Barometerstand nach Engl. Zollen und Decimaltheilen desselben.

Zur leichteren Verwandlung der Thermometer- und Barometerstände in die entsprechenden Stände nach einer der anderen gebräuchlichen Scalen ist Tafel XIV. berechnet.

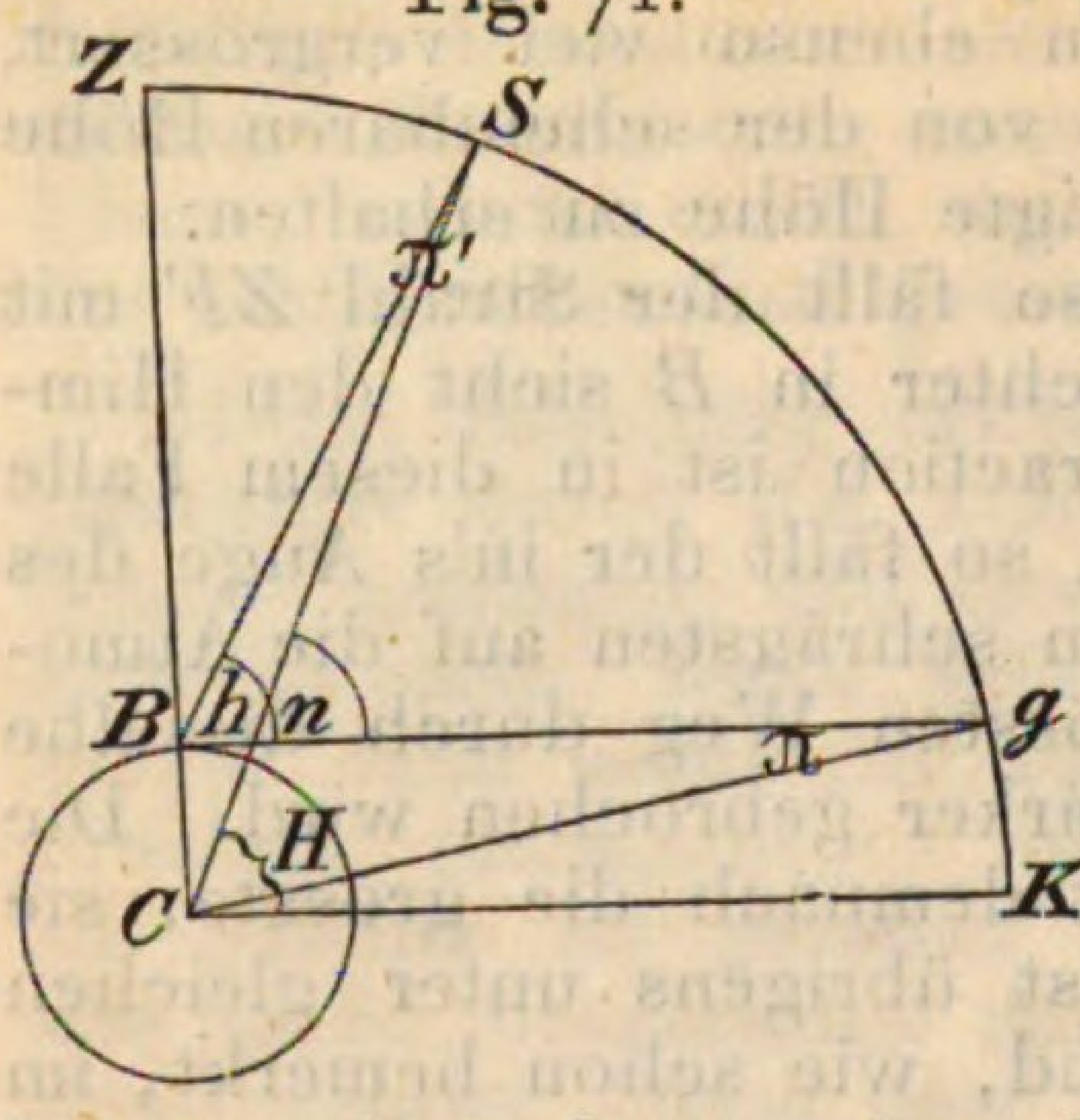
Wie für gegebene scheinbare Höhen die mittlere Refraction aus Tafel IX. gefunden wird, und wie man für einen gegebenen Barometer- und Thermometerstand die mittlere Refraction nach Tafel XIII. zu berichtigen hat, ist in der Erklärung der in Rede stehenden nautischen Tafeln angegeben und durch Beispiele erläutert.

§. 113.

Die Aequatoreal-Horizontalparallaxe der resp. Gestirne in Höhenparallaxe zu verwandeln, ohne dabei auf die Abplattung der Erde Rücksicht zu nehmen.

Es sei (Fig. 71.) *C* der Mittelpunkt der hier als vollständige Kugel angenommenen Erde, in *B* auf der Oberfläche derselben ein Beobachter, so ist der verlängerte Erdhalbmesser *CB* die Verticallinie, *Z* das Zenith

Fig. 71.



und wenn die Winkel ZCK und ZBg rechte Winkel sind, so liegt CK in der Ebene des wahren und Bg in der Ebene des scheinbaren Horizontes des Ortes B.

Es befinde sich ein Gestirn in g. Beschreibt man nun mit Cg von C aus durch g und Z den Quadranten ZK, so ist derselbe ein Bogen des Verticalkreises und ZCK eine Verticalebene durch das Gestirn g und den Ort B gehend.

Der Beobachter in B wird die für Refraction berichtigte Höhe des Gestirnes in $g = 0$ finden; dagegen würde, aus dem Mittelpunkte der Erde C gesehen, die Höhe dieses Himmelskörpers über dem wahren Horizonte (wahre Höhe) der Winkel gCK sein. $\angle BgC = \angle gCK =$ dem Unterschiede der beiden eben genannten Höhen heisst Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Gestirnes, wenn CB gleich dem Radius des Erd-Aequators ist.

Das Gestirn sei in seinem Verticalkreise bis S gestiegen, so ist die Höhe desselben über dem scheinbaren Horizonte (scheinbare Höhe) der Winkel SBg, die wahre Höhe aber ist der Winkel SCK. Es ist $\angle n = \angle SCK = \angle gBS + \angle BSC$; folglich ist die wahre Höhe um den Winkel BSC grösser als die scheinbare Höhe, welcher Winkel die Höhenparallaxe des sich in S befindenden Gestirnes genannt wird.

Befindet sich ein Gestirn in Z, so fallen die Richtungen CZ und BZ zusammen und die Höhe ist sowohl aus C als von B gesehen $= 90°$, mithin ist die Höhenparallaxe für ein Gestirn, welches sich im Zenith befindet, gleich Null.

Man ersieht hieraus, dass die Parallaxe eines Gestirnes zur Reduction seiner Höhe vom scheinbaren auf den wahren Horizont und umgekehrt, erforderlich ist, und dass man zu der Höhe über dem scheinbaren Horizonte, wenn dieselbe für Refraction berichtigt ist, noch die Höhenparallaxe addiren muss, um die Höhe über dem wahren Horizonte (w. Höhe) zu bekommen. Es erhellet ferner hieraus, dass, unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde, ein Gestirn durch die Wirkung der Parallaxe nicht aus seinem Verticalkreise gerückt wird.

Im Dreieck CBg verhält sich:

$$Cg : CB = \sin 90° : \sin \angle CgB,$$

und weil $Cg = CS$, so auch

$$CS : CB = \sin 90° : \sin \angle CgB \; \ldots\ldots\ldots \; \text{(a)}.$$

Im Dreieck CSB verhält sich:

$$CS : CB = \sin \angle CBS : \sin \angle CSB$$
$$= \sin \angle ZBS : \sin \angle CSB$$
$$= \cos \angle SBg : \sin \angle CSB \; \ldots\ldots \; \text{(b)}.$$

Aus (a) und (b) folgt

$$\sin 90° : \sin CgB = \cos SBg : \sin CSB.$$

$\angle CgB$ ist die Horizontalparallaxe und $\angle SBG$ die für Refraction verbesserte scheinbare Höhe des Gestirnes. Es verhält sich daher auch, wenn π die Horizontal- und π' die Höhenparallaxe bezeichnet, h die scheinbare Höhe

$$\sin 90° : \cos h = \sin \pi : \sin \pi',$$

und daraus folgt

$$\sin \pi' = \sin \pi \cdot \cos h \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{(I.)}.$$

Da der Mond unter allen Gestirnen die grösste Parallaxe hat und das Maximum derselben noch nicht 61',5 beträgt, so kann man ohne

erheblichen Fehler den Sinus dem Bogen der Parallaxe proportional setzen, und dann ist

$$\pi' = \pi \cdot \cos h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.)}.$$

Wendet man Logarithmen an, so ist

$$\lg \pi' = \lg \pi + \lg \cos h$$

und dies von $\lg 3^\circ = \lg 3^\circ$ subtrahirt, giebt

$$\lg 3^\circ - \lg \pi' = \lg 3^\circ - \lg \pi + \lg \sec h,$$

also $\text{plg}\, \pi' = \text{plg}\, \pi + \lg \sec h \ldots\ldots\ldots \text{(II'.)}.$

Nach (I.) und (II'.) kann man leicht aus der Horizontalparallaxe eines Gestirnes dessen Höhenparallaxe finden, wenn man die für Refraction berichtigte scheinbare Höhe kennt. Tafel X. ist für eine mittlere Horizontalparallaxe der Sonne = 8″,6 nach dieser Formel berechnet. Tafel XV. ist ebenfalls nach (II'.) berechnet und dient dazu, die Höhenparallaxe der Planeten leicht finden zu können; Tafel XVII. ist auch nach Formel (II'.) berechnet und enthält die Höhenparallaxe des Mondes weniger der mittleren Refraction.

Da der Cosinus der scheinbaren Höhe am grössten ist, wenn die Höhe = o, so folgt aus (I.) oder (II'.), dass die Horizontalparallaxe die grösste Höhenparallaxe sein muss. Weil ferner der $\cos 90^\circ = 0$ ist, so muss die Höhenparallaxe eines Gestirnes, welches im Zenith ist, jedenfalls = o sein.

Wenn man statt der scheinbaren Höhe (h) die wahre Höhe (H) kennt, so kann man ebenfalls die Höhenparallaxe aus der Horizontalparallaxe finden; denn es ist nach (I.).

$$\sin \pi' = \sin \pi \cdot \cos (H - \pi'),$$
$$= \sin \pi (\cos H \cdot \cos \pi' + \sin H \cdot \sin \pi'),$$

und mit $\cos \pi'$ dividirt, ergiebt sich

$$\text{tang}\, \pi' = \sin \pi \cdot \cos H + \sin \pi \cdot \sin H \cdot \text{tang}\, \pi',$$

und hieraus

$$\text{tang}\, \pi' = \frac{\sin \pi \cdot \cos H}{1 - \sin \pi \cdot \sin H} \ldots\ldots\ldots \text{(III.)}.$$

§. 114.

Bestimmung der Local-Horizontalparallaxe eines Gestirnes vermittelst der Aequatoreal-Horizontalparallaxe desselben und der geographischen Breite des Ortes.

Hierzu ist erforderlich, dass man die geocentrische Breite und den Radius der Erde zu einer bestimmten Breite finden kann.

Man bezeichne wieder die halbe grosse Axe des Erdsphäroids mit a, die halbe kleine Axe desselben Sphäroids mit b, den Radius der Erde für eine bestimmte Breite mit r, die geographische Breite mit φ und die geocentrische Breite mit φ', so ist nach §. 85. der Ellipse, Formel (23)

$$\text{tang}\, \varphi = \text{tang}\, \varphi' \cdot \frac{a^2}{b^2},$$

$$\text{tang}\, \varphi' = \text{tang}\, \varphi \cdot \frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)},$$

wonach φ' gefunden werden kann.

Ferner ist nach §. 87. Formel (28) der Ellipse

$$\varphi - \varphi' = \frac{E^2 \cdot \sin 2\varphi}{2 \sin 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.)},$$

worin ausser den gedachten Bezeichnungen $E^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ ist. (Siehe §. 12.).

Es ist ferner nach §. 86. Gleichung (24) der Ellipse

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\sin^2\varphi'}},$$

also, wenn man $a = 1$ setzt,

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1 - b^2}{b^2} \cdot \sin^2 \varphi'}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III.)},$$

nach welcher Formel man den Radius der Erde (r) für jede Breite finden kann, wenn die geocentrische Breite φ' bekannt ist.

Beispiel 1. Wie gross ist der Radius der Erde r auf 45° geographischer Breite, wenn der Halbmesser des Aequators = 1 gesetzt wird und die Abplattung $\frac{1}{300}$ beträgt?

Es ist $b = \frac{299}{300}$ und $b^2 = \frac{89401}{90000}$; folglich $\frac{1}{b^2} = \frac{90000}{89401}$ und $\frac{1}{b^2} - \frac{b^2}{b^2}$ $= \frac{90000}{89401} - 1 = \frac{599}{89401}$, mithin

$$\lg \frac{1 - b^2}{b^2} = 0{,}826085 - 3,$$

welcher Logarithmus constant ist.

Für $\varphi = 45°$ ist $\varphi' = 44°\ 48'\ 31''$ nach Formel (I.) oder nach Tafel XIX., und $\lg \sin^2 \varphi' = 9{,}696060 - 10$,

also $\lg \left(\frac{1 - b^2}{b^2} \cdot \sin^2 \varphi'\right) = 0{,}522145 - 3$

$\frac{1 - b^2}{b^2} \cdot \sin^2 \varphi' + 1 = 1{,}0033277$ davon $\lg = 0{,}001443$

$$\lg \sqrt{1 + \frac{1 - b^2}{b^2} \cdot \sin^2 \varphi'} = 0{,}000722$$

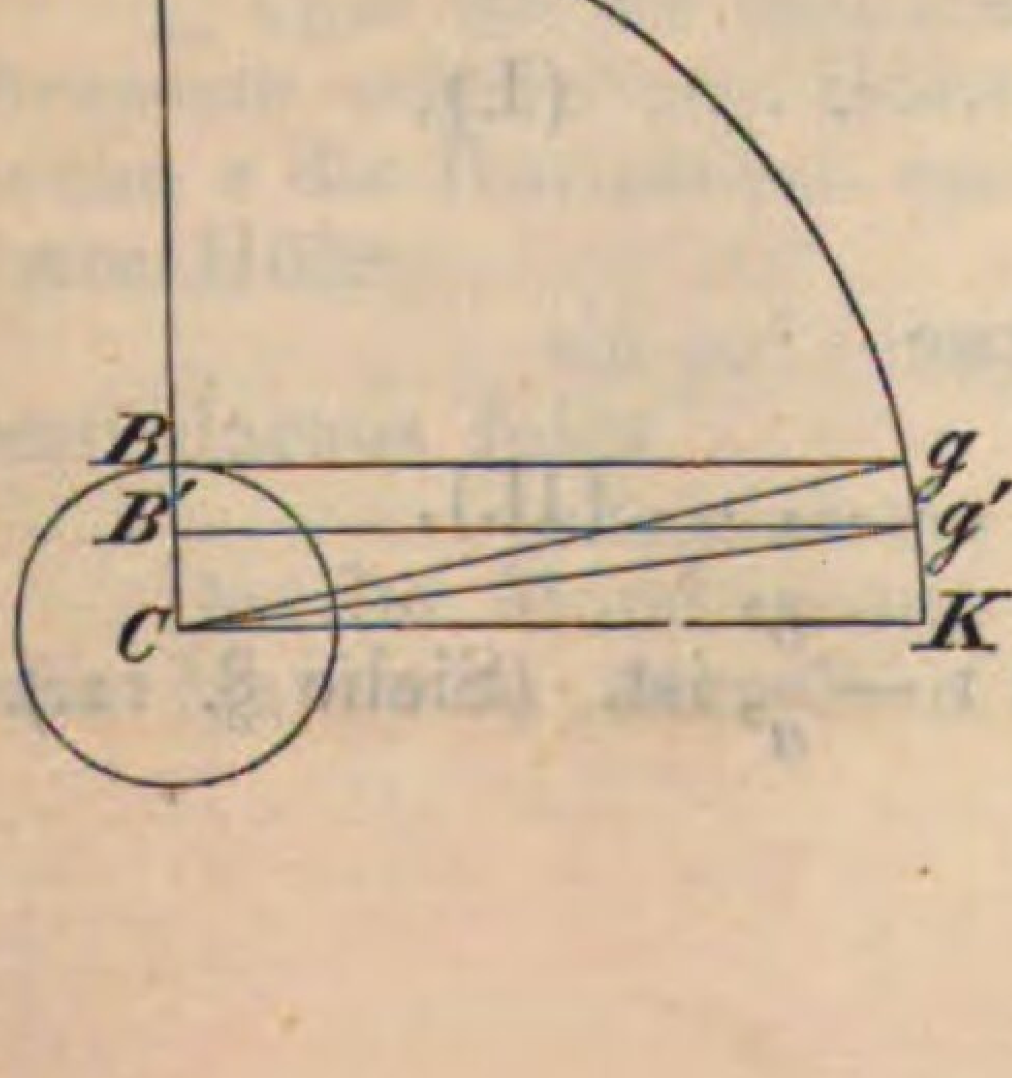
$$\lg 1 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}000000$$

$$\lg r \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}999278 - 1$$

Erdradius f. 45° Br. (r) = 0,99834.

Es sei Fig. 72. CB der Radius des Aequators und CB' der Radius der Erde in einer anderen Breite, so ist für ein Gestirn in g (wenn $gB \perp BC$) $\angle\ BgC$ die Aequatoreal-Horizontalparallaxe und $\angle\ B'g'C$ die Local-Horizontalparallaxe desselben Himmelskörpers für einen Ort auf der Erde, dessen Halbmesser $= CB'$ ist.

Fig. 72.



In den Dreiecken CBg und $CB'g'$ verhält sich

$\sin 90° : Cg = \sin \angle\ CgB : BC$ und

$\sin 90° : Cg' = \sin \angle\ Cg'B' : B'C$.

Hieraus ergiebt sich, weil $Cg = Cg'$ ist, wenn man die Sinusse den Bögen proportional setzt, was hier zulässig ist

$$\angle CgB : \angle Cg'B' = BC : B'C,$$

oder, wenn man die Aequatoreal-Horizontalparallaxe mit p und die Local-Horizontalparallaxe mit p' bezeichnet, den Radius des Aequators $= 1$ und den Erdradius des Ortes $= r$ setzt:

$$p : p' = 1 : r,$$

also

$$p' = p \cdot r,$$

und wenn man für r den in (III.) gefundenen Werth setzt:

$$p' = p \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1 - b^2}{b^2} \cdot \sin^2 \varphi'}} \ldots\ldots\ldots \text{(IV.)}.$$

Man setze $\frac{1 - b^2}{b^2} \cdot \sin^2\varphi' = \tan^2 N$, so ist

$$\tan N = \sin \varphi' \cdot \sqrt{\frac{1 - b^2}{b^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV'.)}.$$

($\lg \sqrt{\frac{1 - b^2}{b^2}} = 0{,}913042 - 2$, wenn die Abplattung $= \frac{1}{300}$ ist.)

Es ist demnach

$$p' = p \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 N}},$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\sqrt{1 + \tan^2 N} = \sec N$ und $\frac{1}{\sec N} = \cos N$ ist, ergiebt sich

$$p' = p \cdot \cos N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.)}.$$

Subtrahirt man (V.) von $p = p$, so bleibt

$$p - p' = p\,(1 - \cos N),$$

oder

$$p - p' = 2p \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VI.)},$$

nach welcher Formel man $p - p'$ berechnen kann und die nautische Tafel XX. berechnet worden ist. (S. Erklärung und Gebrauchsanweisung dieser Tafel.)

Beispiel 1. Das Maximum der Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes ist 61′ 24″; unter den Planeten hat die Venus die grösste Parallaxe, welche im Maximum 33″,65 beträgt, und die grösste Parallaxe der Sonne ist 8″,72; man soll die entsprechenden Local-Horizontalparallaxen finden, wenn $\varphi = 45°$ oder $\varphi' = 44°\ 48'\ 31''$ ist.

Nach (IV'.) und (V.) ist die Berechnung von p':

$$\lg \sqrt{\frac{1 - b^2}{b^2}} = 0{,}913042 - 2$$

$\lg \sin \varphi' \ldots = 9{.}848029 - 10$

$\lg \tan N = 8{,}761071 - 10$

$N = 3°\ 18'\ 5'',5$ $\lg \cos \ldots = 9{,}999278 - 10$

$☾ p = 3684''$ $\lg \ldots = 3{,}566320$

$\lg ☾ p' \ldots\ldots = 3{,}565598$

$☾ p' \ldots\ldots\ldots = 3677'',88 - 61'\ 17'',88.$

$p - p'$ nach (VI.) zu berechnen:

$$\begin{array}{rll}
\tfrac{1}{2}N = 1^\circ\ 39'\ 2'',7 & \lg \sin \ldots = & 8{,}459499 - 10 \\
 & \lg \sin^2 \tfrac{1}{2}N \ldots = & 6{,}918998 - 10 \\
2 ☾ p = 7368'' & \lg \ldots\ldots = & 3{,}867350 \\
 & \lg (p - p') \ldots = & 0{,}786348 \\
 & p - p' \ldots = & 6'',14 \\
 & p \ldots\ldots = & 61'\ 24'',00 \\
 & p' \ldots\ldots = & 61'\ 17'',86;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\lg \cos N \ldots = & 9{,}999278 - 10 \\
\lg ♀ p \ldots\ldots = & 1{,}526985 \\
\lg ♀ p' \ldots = & 1{,}526263 \\
♀ p' \ldots = & 33'',59 \\
♀ p \ldots = & 33'',65 \\
♀ (p - p') = & 0'',06;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\lg \cos N \ldots = & 9{,}999278 - 10 \\
\lg \odot p \ldots = & 0{,}940516 \\
\lg \odot p' \ldots = & 0{,}939794 \\
\odot p' \ldots = & 8'',705 \\
\odot p \ldots = & 8'',720 \\
\odot (p - p') = & 0'',015.
\end{array}$$

Für 90° Breite beträgt $p - p'$ nahe das Doppelte als auf 45° Breite, weil der Erdhalbmesser für 45° Breite nahe der mittlere ist.

Man sieht hieraus, dass nur beim Monde der Unterschied der Aequatoreal- und Local-Horizontalparallaxe zu berücksichtigen ist, indem dieser Unterschied selbst bei der Venus nie 0'',2 werden kann.

In der Praxis kann man den Unterschied der Aequatoreal- und Local-Horizontalparallaxe des Mondes aus der gedachten Tafel XX. entnehmen, deren Argumente die geographische Breite und die Aequatoreal-Horizontalparallaxe sind.

§. 115.

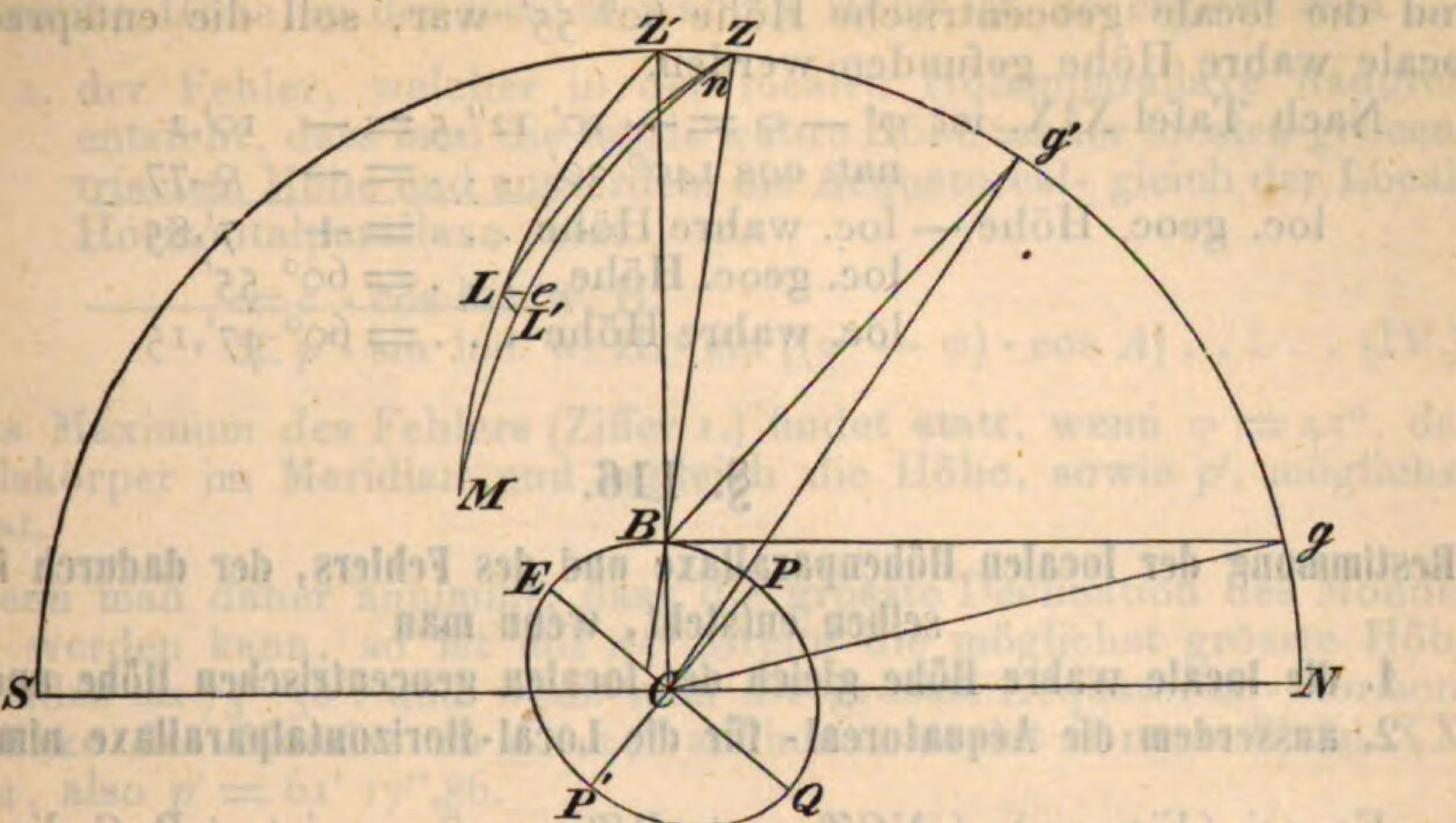
Den Unterschied der localen wahren Höhe und der localen geocentrischen Höhe zu finden, wenn der Unterschied der geographischen und geocentrischen Breite ($\varphi - \varphi'$) bekannt ist, und diesemnach die eine dieser Höhen aus der andern zu ermitteln.

Es sei (Fig. 73.) *EBPQ* ein Erdmeridian, *ZB* die Richtung der Schwere für den Ort *B*, also *Z* dessen Zenith, was hier das geographische Zenith genannt wird zur Unterscheidung von *Z'*, dem Punkte des Himmels, den der verlängerte Erdhalbmesser des Beobachtungsortes trifft und der das geocentrische Zenith heisst; so ist *Z'Z* der Unterschied der geographischen und geocentrischen Breite ($\varphi - \varphi'$).

Für ein Gestirn, dessen für Refraction verbesserter von *B* aus gesehener Ort am Himmel *M* ist, heisst *ZM* die locale wahre Zenithdistanz und 90° — *ZM* die locale wahre Höhe, sowie *Z'M* die locale geocentrische Zenithdistanz und 90° — *Z'M* die locale geocentrische Höhe ist.

Man mache *Mn* = *MZ'*, so ist *nZ* der Unterschied zwischen der localen wahren und der localen geocentrischen Zenithdistanz, also auch

Fig. 73.



gleich dem Unterschiede der localen wahren und der localen geocentrischen Höhe des Gestirns. Das Dreieck $ZZ'n$ kann man, da $\varphi - \varphi'$ stets weniger als 12' beträgt, ohne erheblichen Fehler als ein ebenes, bei n rechtwinkliges Dreieck betrachten, aus dem sich ergiebt:

$$Zn = Z'Z \cdot \cos \angle Z'ZM,$$

oder wenn man $\angle Z'ZM$ mit A bezeichnet,

$$Zn = (\varphi - \varphi') \cdot \cos A \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\text{I.}).$$

Der Winkel $Z'ZM$ ist das wahre Azimuth des Gestirns in M, und es wird später bei Bestimmung der Missweisung des Compasses gezeigt werden, wie man dasselbe durch Rechnung finden kann. Uebrigens ist es zu diesem Zweck genau genug, wenn das Azimuth vermittelst des Compasses bestimmt wird.

Wenn man statt $\varphi - \varphi'$ in der vorigen Gleichung $\varphi' - \varphi$ setzt, welche Grösse dann stets negativ ist, das Azimuth A vom Meridian des oberen Pols rechnet und Rücksicht auf das Zeichen von $\cos A$ nimmt, so ergiebt die Figur, dass die algebraische Summe der localen wahren Höhe und $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A =$ der geocentrischen Höhe, hingegen die algebraische Differenz der localen geocentrischen Höhe und $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A$ $=$ der localen wahren Höhe ist.

Da $\varphi' - \varphi$ am grössten ist, wenn $\varphi = 45^\circ$, so folgt aus der Formel, dass der Unterschied der localen wahren und der localen geocentrischen Höhe in dieser Breite am grössten werden kann, und zwar wenn $A = 0$ oder $= 180^\circ$ ist; am kleinsten aber, oder $= 0$, wenn das Azimuth 90° beträgt. Der grösste Höhenunterschied findet also statt, wenn der Himmelskörper sich im Meridian befindet und ist dann $= \varphi - \varphi'$, welche Grösse auf 45° Breite 11' 28'',7 beträgt.

Beispiel 1. Auf 40° NBr., als die locale wahre Höhe 50° 20' und das wahre Azimuth N. 120° Ost war, soll die entsprechende locale geocentrische Höhe gefunden werden.

Nach Tafel XIX. ist $\varphi' - \varphi = -$ 11' 18''	$= -$ 11',3
nat. cos 120°	$= -$ 0.5
loc. geoc. Höhe — loc. wahre Höhe	$= +$ 5',65
loc. wahre Höhe	$=$ 50° 20'
loc. geoc. Höhe	$=$ 50° 25',65.

Beispiel 2. Auf 31° 30′ NBr., als das wahre Azimuth N. 140° 30′ W. und die locale geocentrische Höhe 60° 55′ war, soll die entsprechende locale wahre Höhe gefunden werden.

Nach Tafel XIX. ist $\varphi' - \varphi = -10' \, 12'',5 = -10',2$
nat. cos 140° 30′ . . . $= -0,77$
loc. geoc. Höhe — loc. wahre Höhe . . . $= +7',85$
loc. geoc. Höhe $= 60° \, 55'$
loc. wahre Höhe . . . $= 60° \, 47',15$.

§. 116.

Bestimmung der localen Höhenparallaxe und des Fehlers, der dadurch in derselben entsteht, wenn man
1. die locale wahre Höhe gleich der localen geocentrischen Höhe und
2. ausserdem die Aequatoreal- für die Local-Horizontalparallaxe nimmt.

Es sei (Fig. 73.) $\angle NCZ' = \angle gBZ' = 90°$, so ist $\angle BgC$ die locale Horizontalparallaxe eines Gestirns in g. Für ein Gestirn in g' ist aber $\angle Bg'C$ die locale Höhenparallaxe und $\angle gBg'$ die locale geocentrische Höhe.

Es ist hiernach, in Verbindung mit dem, was in §. 113. von der Aequatoreal-Horizontal- und Höhenparallaxe gesagt ist, klar, dass man zur Bestimmung der localen Höhenparallaxe in Formel (II.) jenes Paragraphen nur für die scheinbare Höhe (locale wahre Höhe) die locale geocentrische Höhe zu setzen hat.

Es ist daher, wenn p' die locale Horizontalparallaxe bezeichnet,

$$\text{loc. Höhpr.} = p' \cdot \cos \text{loc. geoc. Höhe} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\text{I.}).$$

Kennt man statt der localen geocentrischen Höhe aber die geocentrische Höhe selbst ($\angle g'CN$), so ergiebt sich, wenn man dieselbe für die wahre Höhe in Formel (III.) §. 113. setzt:

$$\text{tang loc. Höhpr.} = \frac{\sin p' \cdot \cos \text{geoc. Höhe}}{1 - \sin p' \cdot \sin \text{geoc. Höhe}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\text{II.}).$$

Wenn man in (I.) für die locale geocentrische Höhe die locale wahre Höhe $\pm (\varphi' - \varphi) \cdot \cos A$ setzt (I. §. 115.), so ergiebt sich

$$\text{loc. Höhpr.} = p' \cdot \cos [\text{loc. w. H.} \pm (\varphi' - \varphi) \cdot \cos A],$$
$$= p' \cdot \cos \text{loc. w. H.} \cdot \cos [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A]$$
$$\mp p' \cdot \sin \text{loc. w. H.} \cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A],$$

und wenn man $\cos [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A] = 1$ setzt, so ist

$$\text{loc. Höhpr.} = p' \cdot \cos \text{loc. w. H.}$$
$$\mp p' \cdot \sin \text{loc. w. H.} \cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A] \ldots (a).$$

Folglich ist:

1. Der Fehler, welcher in der localen Höhenparallaxe dadurch entsteht, dass man die locale wahre Höhe gleich der localen geocentrischen Höhe setzt

$$= \mp p' \cdot \sin \text{loc. w. H.} \cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A] \; (\text{III.}).$$

Setzt man den Unterschied der Aequatoreal- und Local-Horizontalparallaxe $= c$, so ist die Aequatoreal-Horizontalparallaxe $p = p' + c$, und wenn man $p' + c$ für p' in (a) substituirt, so ergiebt sich

$$\text{loc. Höhpr.} = (p' + c) \cdot \cos \text{loc. w. H.}$$
$$\mp (p' + c) \cdot \sin \text{loc. w. H.} \cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A],$$

und wird noch $c \cdot \sin \text{loc. w. H.} \cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A]$, als eine sehr kleine Grösse, fortgelassen, so ist

$$\text{loc. Höhpr.} = p' \cdot \cos \text{loc. w. H.} + c \cdot \cos \text{loc. w. H.}$$
$$\mp p' \cdot \sin \text{loc. w. H.} \cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A] \; . \; . \; (b).$$

Subtrahirt man (I.) von (b), indem man annimmt, dass die locale geocentrische Höhe = der localen wahren Höhe ist, so ergiebt sich

2. der Fehler, welcher in der localen Höhenparallaxe dadurch entsteht, dass man die locale wahre Höhe = der localen geocentrischen Höhe und ausserdem die Aequatoreal- gleich der Local-Horizontalparallaxe setzt

$= c \cdot \cos$ loc. w. H.
$\mp p' \cdot \sin$ loc. w. H. $\cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A]$ (IV.).

Das Maximum des Fehlers (Ziffer 1.) findet statt, wenn $\varphi = 45°$, der Himmelskörper im Meridian und zugleich die Höhe, sowie p', möglichst gross ist.

Wenn man daher annimmt, dass die grösste Declination des Mondes 28° 36′ werden kann, so ist auf 45° Breite die möglichst grösste Höhe des Mondes = 73° 36′; und wenn man die grösste Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes zu 61′ 24″ annimmt, so ist c nach Tafel XX. = 6″,14, also $p' = 61' \, 17'',86$.

Man hat daher nach (III.) nachstehende Rechnung zu machen:

$p' = 3677'',8$ log = 3,56559
log sin 73° 36′ = 9,98196 — 10
$\varphi' - \varphi$ ist nach Taf. XIX. = 689″ log = 2,83822
log sin 1″ = 4,68557 — 10
log cos A = 0,00000
$\mp$ 11″,78 log = 1,07134,

also ist der grösste Fehler, welcher in der localen Höhenparallaxe des Mondes dadurch entstehen kann, dass die locale wahre Höhe = der localen geocentrischen Höhe gesetzt wird, $= \mp$ 11″,78.

Das Maximum des zweiten Fehlers findet unter übrigens denselben Umständen statt, wenn die Höhe 10° kleiner, also = 63° 36′ ist, und man hat demzufolge nach (IV.) nachstehende Rechnung zu machen:

$c = 6'',15$ log = 0,78888
log cos 63° 36′ = 9,64800 — 10
log ($c \cdot$ cos loc. w. Höhe) = 0,43688
also $c \cdot$ cos loc. w. Höhe . = + 2″,74
log (p' in Secunden) = 3,56559
log sin 63° 36′ = 9,95217 — 10
log ($\varphi' - \varphi$) in Secunden = 2,83822
log sin 1″ = 4,68557 — 10
log cos A = 0,00000
log ($p' \cdot$ sin loc. w. H. $\cdot \sin [(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A]$) = 1,04155, dazu d. Zahl = + 11″,00
13″,74

ist mithin das Maximum des Fehlers, der in der localen Höhenparallaxe des Mondes dadurch entstehen kann, dass man die locale wahre Höhe gleich der localen geocentrischen Höhe und ausserdem die Aequatoreal- gleich der Local-Horizontalparallaxe setzt.

Wenn man die grösste Aequatoreal-Horizontalparallaxe der Venus = 33″,65 und die der Sonne = 8″,72 annimmt, so ist nach §. 114. in 45° Breite für ♀ c = 0″,06 und für ⊙ c = 0″,015 gefunden; es ergeben sich demzufolge nach (IV.) die grössten Fehler, welche in den localen Höhenparallaxen dieser Himmelskörper dadurch entstehen können, dass

man die locale wahre Höhe gleich der localen geocentrischen Höhe und ausserdem die Aequatoreal- gleich der Local-Horizontalparallaxe setzt, wie folgt:

♀ $p' = 33'',59$ lg	$= 1{,}52621$		
♀ loc. w. H $= 63^\circ\ 36'$ lg sin .	$= 9{,}95217 - 10$		
lg $(\varphi' - \varphi)$	$= 2{,}83822$		
lg sin $1''$	$= 4{,}68557 - 10$		
lg cos A	$= 0{,}00000$		
lg	$= 9{,}00217 - 10$,	Num. $= \mp 0'',100$	
$c = 0'',06$ lg	$= 0{,}77815 - 2$		
lg cos $63^\circ\ 36'$	$= 9{,}64800 - 10$		
lg	$= 0{,}42615 - 2$,	Num. $= + 0'',027$	
Maximum des Fehlers der loc. Höhenparallaxe der ♀ $=$			$0'',127$.
⊙ $p' = 8''.705$ lg	$= 0{,}93977$		
lg sin $63^\circ\ 36'$	$= 9{,}95217 - 10$		
lg sin $[(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A]$	$= 7{,}52379 - 10$		
lg	$= 8{,}41573 - 10$,	Num. $= \mp 0'',026$	
lg $0'',015$	$= 0{,}17609 - 2$		
lg cos $63^\circ\ 36'$	$= 9{,}64800 - 10$		
lg	$= 9{,}82409 - 12$,	Num. $= + 0'',007$	
Maximum des Fehlers der loc. Höhenparallaxe der ⊙ $=$			$0'',033$.

Hieraus ergiebt sich, dass bei Berechnung der localen Höhenparallaxe der Planeten und der Sonne die locale wahre Höhe gleich der localen geocentrischen Höhe, und ausserdem die Aequatoreal- gleich der Local-Horizontalparallaxe gesetzt werden kann, weil der dadurch entstehende Fehler zu unbedeutend ist, als dass bei nautisch-astronomischen Rechnungen darauf zu rücksichtigen wäre.

§. 117.

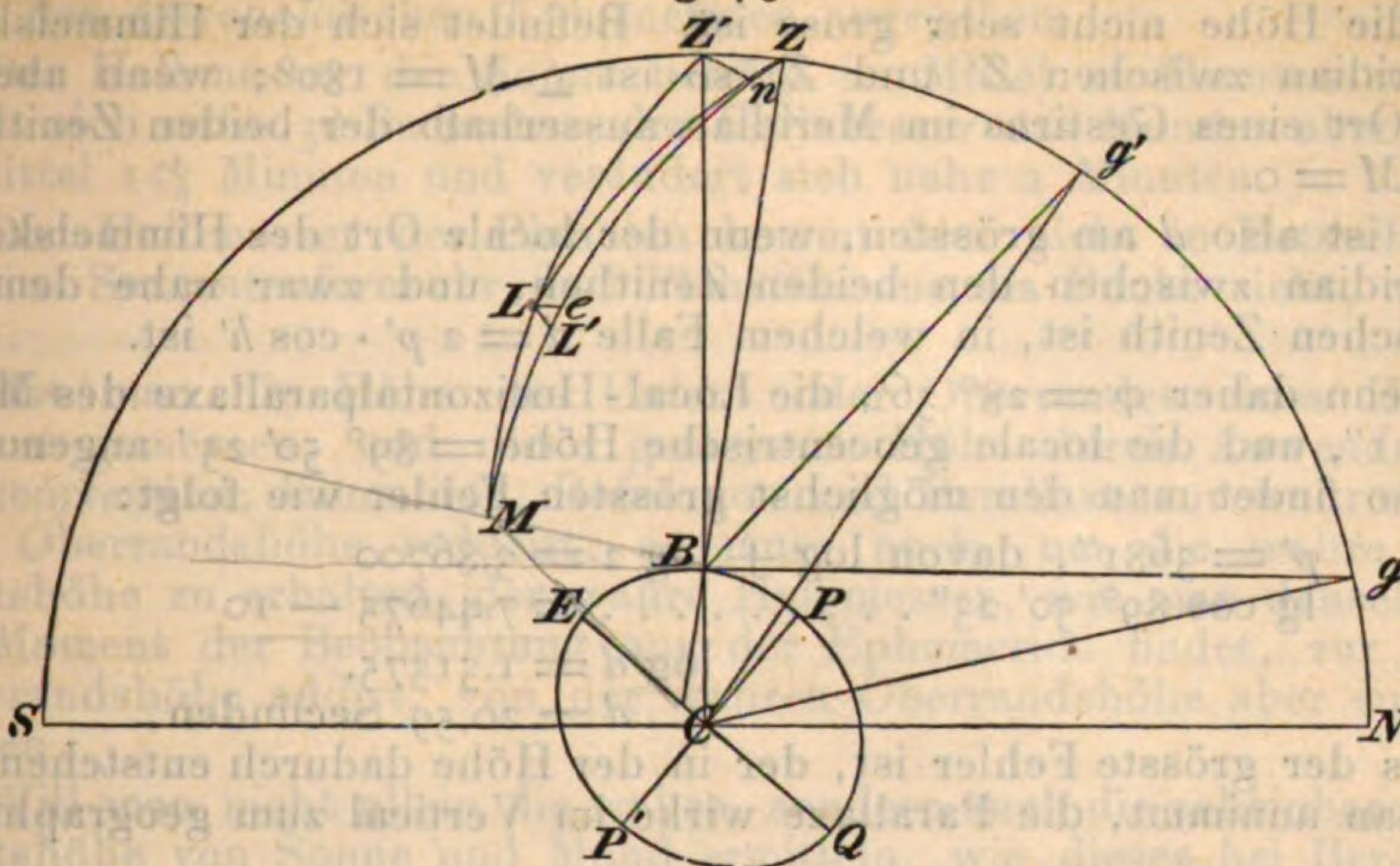
Bestimmung der Fehler, die in den wahren Höhen entstehen:

1. **wenn man annimmt, dass die Höhenparallaxe im Vertical zum geographischen, statt im Vertical zum geocentrischen Zenith wirkt, und**
2. **wenn man die Refraction im Vertical zum geocentrischen, statt zum geographischen Zenith wirken lässt.**

Zu 1. Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass ein Gestirn durch die Wirkung der Parallaxe dem geocentrischen Zenith um die Höhenparallaxe näher kommen muss. Wenn daher in Fig. 73. ML die Höhenparallaxe eines Gestirns ist, dessen localer Ort M war, so ist die geocentrische Zenithdistanz desselben $= Z'L$, und der aus dem Mittelpunkte der Erde gesehene Abstand vom geographischen Zenith $Z = ZL$.

Man mache $ZL' = ZL$ und $Me = ML$, so ist eL' der Fehler, welcher in der Zenithdistanz, mithin auch der, welcher in der auf den Horizont zum geographischen Zenith bezogenen Höhe, entsteht, wenn man die Parallaxe im Vertical nach diesem letzteren Zenith wirken lässt.

Fig. 73.



Das Dreieck MLL' kann man ohne erheblichen Fehler als ein ebenes, bei L' rechtwinkliges Dreieck betrachten, und es giebt

$$ML : ML' = \sin 90^\circ : \cos \angle LML',$$

oder auch, wenn $\sin 90^\circ = 1$ gesetzt wird,

$$ML - ML' : ML = 1 - \cos \angle LML' : 1.$$

Es ist aber $ML - ML' = L'e$ und man hat, um ZL richtig zu finden, $L'e$ zu viel von ZM abgezogen, wenn man annimmt, dass $ZM - ML = ZL$ ist.

Setzt man $L'e = d$, bezeichnet $\angle LML'$ mit M und das Complement der Zenithdistanz MZ' (die loc. geoc. wahre Höhe) mit h', so ergiebt sich aus der letzten Proportion:

$$d : p' \cdot \cos h' = 1 - \cos M : 1,$$

mithin ist $$d = p' \cdot \cos h' \cdot (1 - \cos M),$$

und wenn man für $1 - \cos M$ den gleichen Werth $2 \sin^2 \frac{1}{2} M$ setzt, so ergiebt sich $$d = 2\, p' \cdot \cos h' \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} M \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I.).$$

Aus dem Dreieck $Z'nZ$ findet man, wenn man dasselbe als geradlinig und bei n als rechtwinklig betrachtet:

$$Zn = Z'Z \cdot \sin \angle Z'Zn = (\varphi' - \varphi) \cdot \sin A,$$

worin A das Azimuth bezeichnet.

Man denke sich von M ein Perpendikel auf $Z'n$ gezogen, so halbirt dieses das Dreieck $MZ'n$, und in jedem dieser Dreiecke hat man

$$\sin 90^\circ : \sin MZ' = \sin \tfrac{1}{2} M : \sin \tfrac{1}{2} Z'n,$$

also $$\sin 90^\circ : \cos h' = \sin \tfrac{1}{2} M : \sin \frac{(\varphi' - \varphi) \cdot \sin A}{2};$$

mithin ist $$\sin \tfrac{1}{2} M = \sin \frac{(\varphi' - \varphi) \cdot \sin A}{2 \cos h'},$$

oder $$\tfrac{1}{2} M = \frac{(\varphi' - \varphi) \cdot \sin A}{2 \cos h'} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a),$$

und wenn man diesen Werth für $\frac{1}{2} M$ in (I.) setzt, so ergiebt sich:

$$d = \frac{\sin p' \, (\varphi' - \varphi)^2 \cdot \sin 1'' \cdot \sin^2 A}{2 \cos h'} \; . \; . \; . \; (II.),$$

nach welcher Formel man d genau genug findet, wenn M klein ist, und zwar in Secunden, weil $\varphi' - \varphi$ in Secunden ausgedrückt ist.

Der Winkel M verändert von 0 bis 180°, ist jedoch stets klein, wenn die Höhe nicht sehr gross ist. Befindet sich der Himmelskörper im Meridian zwischen Z' und Z, so ist $\angle M = 180°$; wenn aber der locale Ort eines Gestirns im Meridian ausserhalb der beiden Zenithe ist, so ist $M = 0$.

Es ist also d am grössten, wenn der locale Ort des Himmelskörpers im Meridian zwischen den beiden Zenithen, und zwar nahe dem geographischen Zenith ist, in welchem Falle $d = 2\,p' \cdot \cos h'$ ist.

Wenn daher $\varphi = 28° 36'$, die Local-Horizontalparallaxe des Mondes $= 61' 21''$, und die locale geocentrische Höhe $= 89° 50' 23'$ angenommen wird, so findet man den möglichst grössten Fehler wie folgt:

$$p' = 3681'', \text{ davon } \log + \log 2 = 3{,}86700$$
$$\lg \cos 89° 50' 23'' \ldots\ldots\ldots = 7.44675 - 10$$
$$\log d = 1{,}31375,$$
$$d = 20{,}59 \text{ Secunden},$$

welches der grösste Fehler ist, der in der Höhe dadurch entstehen kann, dass man annimmt, die Parallaxe wirke im Vertical zum geographischen Zenith.

Zu 2. Um den Fehler zu finden, der in der Höhe dadurch entsteht, dass man annimmt, die Refraction wirke im Vertical zum geocentrischen Zenith, braucht man in (I.) statt $2\,p'$ oder $2 \cdot$ locale Höhenparallaxe nur $2 \cdot$ Refraction zu setzen. Wenn dann M den Winkel bezeichnet, welchen die Verticale vom geographischen und geocentrischen Zenith, an den scheinbaren Ort des Gestirns gezogen, mit einander machen, und d den Fehler, der durch die gedachte Annahme in der Höhe entsteht, so ist

$$d = 2 \text{ Refr.} \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III.)}.$$

Hiernach ist d am grössten, wenn die Refraction am grössten und wenn $M = 180°$ ist. Beides kann hier aber nicht zusammentreffen, weil die Refraction mit der Höhe abnimmt und der Winkel M nur 180° ist, wenn sich der Himmelskörper im Meridian zwischen den beiden Zenithen befindet; also, wenn auf 45° Breite die locale scheinbare Höhe wenigstens circa 89° 49' beträgt, in welchem Falle aber die Refraction nur 0'',2 ist. Es würde unter diesen Umständen

$$d = 2 \cdot 0''.2 \cdot 1 = 0''.4 \text{ sein},$$

welches der grösst mögliche Fehler ist.

Im Horizonte ist nach der nautischen Tafel IX. die mittlere Refraction $= 34' 45''$, und der Winkel M am grössten, wenn der Himmelskörper im ersten Vertical und $\varphi = 45°$ ist, in welchem Falle $M = (\varphi - \varphi') = 11' 29''$ wird. Es ist dann

$$d = 2 \cdot 34' 45'' \cdot \sin^2 \frac{11' 29''}{2} = 0'',01.$$

§. 118.

Halbmesser der Gestirne.

Unter wahrem Halbmesser eines Gestirns versteht man den ebenen Winkel, dessen Spitze im Mittelpunkte der Erde liegt und von dessen Schenkeln der eine nach dem Mittelpunkte des Gestirns, der andere nach dem Rande desselben geht.

Unter scheinbarem Halbmesser versteht man dagegen den Winkel, dessen Spitze im Auge des Beobachters liegt und von dessen Schenkeln der eine nach dem Mittelpunkte des Gestirns, der andere nach dessen Rand geht.

Der wahre Halbmesser des Mondes, der Sonne und der Planeten ist in den astronomischen Ephemeriden angegeben.

Der Halbmesser der Sonne beträgt im Mittel 16 Minuten und verändert sich nahe 30 Secunden; der Halbmesser des Mondes aber beträgt im Mittel $15\frac{3}{4}$ Minuten und verändert sich nahe 2 Minuten.

Der Halbmesser der Planeten kommt hier nicht in Betracht, weil man im Sextantenfernrohr den Planeten nur als Punkt sieht, wie den Stern.

Hat man die Höhe des Unter- oder Oberrandes eines Himmelskörpers gemessen, und diese gemessene Höhe durch Anwendung der Indexcorrection, Kimmtiefe, Refraction und Parallaxe zur wahren Unter- oder Oberrandshöhe reducirt, so muss noch, um die wahre Mittelpunktshöhe zu erhalten, der wahre Halbmesser, wie man denselben für den Moment der Beobachtung aus der Ephemeride findet, zur wahren Unterrandshöhe addirt, von der wahren Oberrandshöhe aber subtrahirt werden

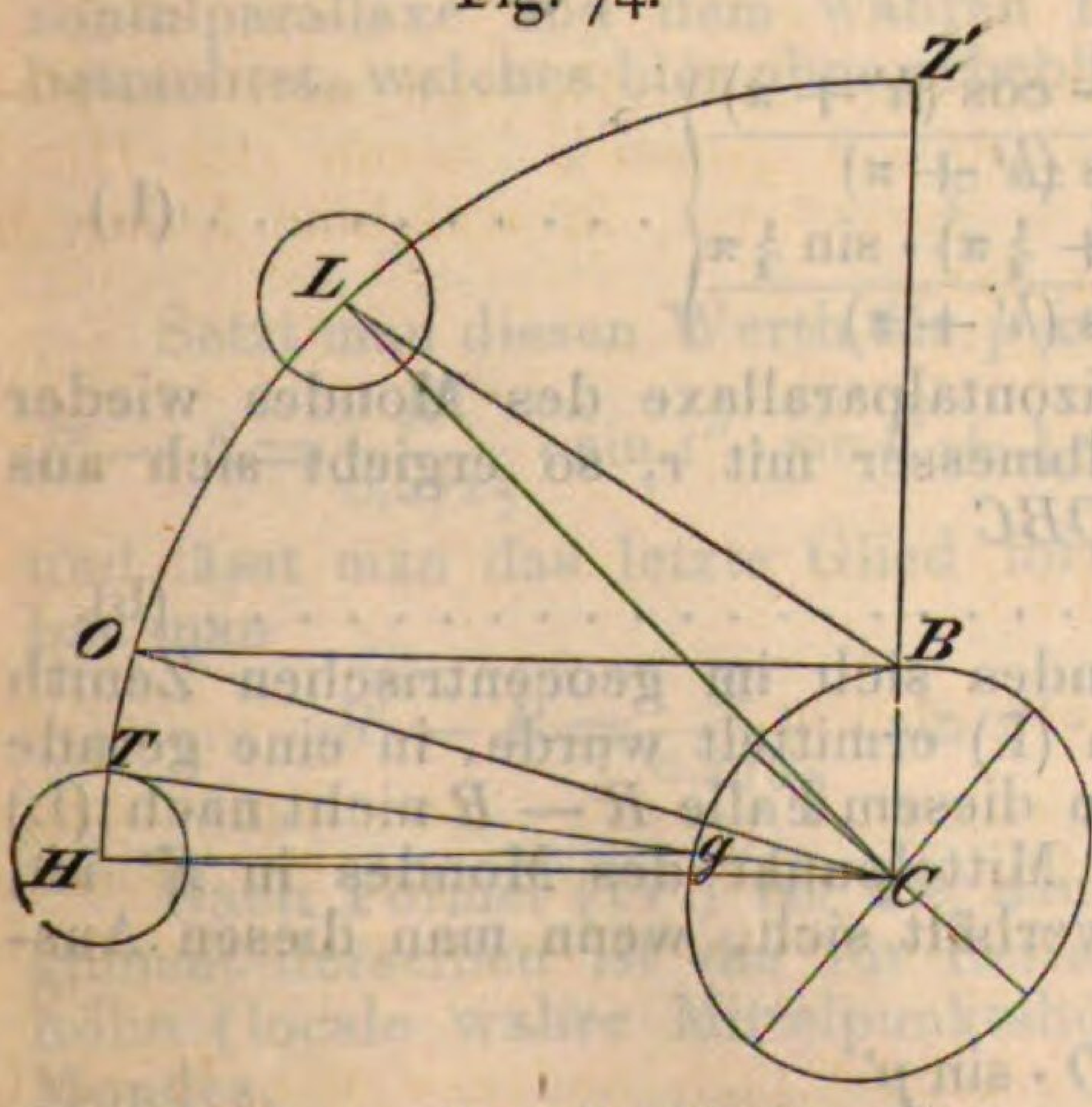
Will man nicht allein die wahre, sondern auch die scheinbare Mittelpunktshöhe von Sonne und Mond ermitteln, wie dieses bei Berechnung der Länge nach Monddistanzen erforderlich ist, so muss man, da sehr selten die Mittelpunkts-, sondern meistens die Unter- oder Oberrandshöhe beobachtet wird, den scheinbaren Halbmesser kennen.

Auf den wahren Halbmesser des Mondes sind zwei Correctionen anzuwenden, um den scheinbaren Halbmesser zu erhalten, nämlich die Vergrösserung, welche durch die bei zunehmender Höhe erfolgte Annäherung desselben an den Beobachter entsteht, und die Contraction (Zusammenziehung oder Verkürzung), welche durch die ungleiche Wirkung der Refraction, besonders bei kleinen Höhen, verursacht wird.

Auf den wahren Halbmesser der Sonne ist nur die Contraction anzuwenden, um den scheinbaren Halbmesser zu erhalten, indem die Vergrösserung zu geringe ist, als dass dieselbe zu beachten wäre.

A. Die Vergrösserung des Mondhalbmessers zu bestimmen.

Fig. 74.



Es sei (Fig. 74.) C der Mittelpunkt der Erde, in B ein Beobachter auf derselben, dessen geocentrisches Zenith Z', und mit dem Radius CZ' der Quadrant $Z'H$ beschrieben, so ist klar, dass, in welchem Punkte dieses Verticals sich auch der Mittelpunkt des Mondes befinden mag, der Halbmesser desselben aus C gesehen, also der wahre Halbmesser, immer gleich gross erscheinen muss.

Wenn aber die Entfernung des Gestirns von der Erde abnimmt, so erscheint der Halbmesser desselben grösser. Zieht man aus C die Linie CH nach dem Mittelpunkte des Mondes (H) und auch die Tangente CT an den Rand desselben, so ist der Winkel HCT der wahre Halbmesser. Denkt man sich aber den Mittelpunkt der Erde nach g gerückt, so ist der wahre Halbmesser des Mondes gleich dem Winkel TgH,

also um den Winkel CHg grösser als wenn der Mittelpunkt der Erde in C angenommen wird.

In den Dreiecken THC und THg verhält sich:

$$\sin 90^\circ : HC = \sin TCH : HT \text{ und}$$
$$Hg : \sin 90^\circ = HT : \sin TgH,$$

woraus folgt

$$Hg : HC = \sin TCH : \sin TgH,$$

und wenn man die Sinusse dieser kleinen Winkel den Bögen proportional setzt, so hat man

$$Hg : HC = \angle TCH : \angle TgH.$$

Die beiden wahren Halbmesser zweier Himmelskörper von gleichem linearen Halbmesser verhalten sich also zu einander, umgekehrt wie die Entfernungen derselben vom Mittelpunkte der Erde.

Wenn daher D die Entfernung des Mittelpunktes des Mondes vom Mittelpunkte der Erde und D' die Entfernung desselben von einem Punkte auf der Oberfläche der Erde, sowie R den aus dem Mittelpunkte und R' den von der Oberfläche der Erde gleichzeitig gesehenen Halbmesser des Mondes bezeichnen, so verhält sich

$$R' : R = D : D' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}.$$

Es bezeichne ferner h' die locale wahre geocentrische Höhe des Mittelpunktes des Mondes, welche in Bezug auf den Mittelpunkt des Mondes in L, das Complement des Winkels $Z'BL$ ist, und π die gleichzeitig mit h' stattfindende locale Höhenparallaxe, so ist die geocentrische wahre Höhe $= h' + \pi$, welche für den Ort des Mondes in L, der Winkel LCH $=$ dem Complement des Winkels $Z'CL$ ist.

Wendet man diese Bezeichnungen auf das Dreieck BCL an, so verhält sich:

$$D : D' = \cos h' : \cos (h' + \pi);$$

aber nach (a) verhielt sich

$$R' : R = D : D',$$

also auch

$$R' : R = \cos h' : \cos (h' + \pi)$$

und

$$R' - R : R = \cos h' - \cos (h' + \pi) : \cos (h' + \pi),$$

woraus sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned} R' - R &= R\,\frac{\cos h' - \cos (h' + \pi)}{\cos (h' + \pi)} \\ &= 2R\,\frac{\sin (h' + \frac{1}{2}\pi) \cdot \sin \frac{1}{2}\pi}{\cos (h' + \pi)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I.)}.$$

Bezeichnet man die Local-Horizontalparallaxe des Mondes wieder mit p' und den zugehörigen Erdhalbmesser mit r, so ergiebt sich aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck OBC

$$r = D \cdot \sin p' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}.$$

Wenn der Mittelpunkt des Mondes sich im geocentrischen Zenith befindet, so ist das Dreieck, wonach (I.) ermittelt wurde, in eine gerade Linie übergegangen und man kann in diesem Falle $R' - R$ nicht nach (I.) bestimmen. Es ist aber, wenn der Mittelpunkt des Mondes in Z' ist, $D' = D - r = D - D \cdot \sin p'$, also verhält sich, wenn man diesen Ausdruck für D' in (a) setzt,

$$R' : R = D : D - D \cdot \sin p'$$

und

$$R' - R : R = D \cdot \sin p' : D - D \cdot \sin p',$$

woraus sich ergiebt:

$$R' - R = R\,\frac{D \cdot \sin p'}{D - D \cdot \sin p'},$$

$$= R\,\frac{\sin p'}{1 - \sin p'},$$

$$= R\,\frac{\sin p'}{2 \sin^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}p')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.)},$$

nach welcher Formel die Vergrösserung des Mondhalbmessers gefunden werden kann, wenn derselbe im geocentrischen Zenith ist.

Setzt man in (I.) für $-\cos(h' + \pi)$ den gleichen Werth nach (II.) in §. 6. der ebenen Trigonometrie, so ergiebt sich

$$R' - R = R\,\frac{\cos h' - \cos h' \cdot \cos \pi + \sin h' \cdot \sin \pi}{\cos h' \cdot \cos \pi - \sin h' \cdot \sin \pi};$$

da aber $\cos \pi = 1 - 2 \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}\pi = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1''$
und $\sin \pi = \pi \cdot \sin 1''$, so geht die Gleichung über in

$$R' - R = R \cdot \frac{\cos h' - \cos h' + \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \cos h' + \pi \cdot \sin 1'' \cdot \sin h'}{\cos h' - \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \cos h' - \pi \cdot \sin 1'' \cdot \sin h'},$$

$$= R \cdot \frac{\pi \cdot \sin 1'' \cdot \sin h' + \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \cos h'}{\cos h' - \pi \cdot \sin 1'' \cdot \sin h' - \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \cos h'},$$

$$= R \cdot \frac{\pi \cdot \sin 1'' \cdot \operatorname{tng} h' + \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1''}{1 - \pi \cdot \sin 1'' \cdot \operatorname{tng} h' - \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1''},$$

$$= R \cdot [\pi \cdot \sin 1'' \cdot \operatorname{tng} h' + \pi^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \operatorname{tng}^2 h' + \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \sin^2 1''],$$

und wenn man erwägt, dass nach §. 116. gesetzt werden kann

$p \cdot \cos h'$ für π, so wird

$$R' - R = R \cdot [p \cdot \sin 1'' \cdot \sin h' + p^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \sin^2 h' + \tfrac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \cos^2 h'],$$

$$= R[p \cdot \sin 1'' \cdot \sin h' + p^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \sin^2 h' + \tfrac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \sin^2 h'],$$

$$= R \cdot [p \cdot \sin 1'' \cdot \sin h' + \tfrac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \sin^2 h' + \tfrac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \sin^2 1''].$$

Nach Burckhardt ist das Verhältniss zwischen der Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes und dem wahren Halbmesser desselben $= 1 : 0{,}2725$, und wenn man dieses auch als zwischen der localen Horizontalparallaxe und dem wahren Halbmesser des Mondes stattfindend betrachtet, welches hier ohne erheblichen Fehler geschehen kann, so wird

$$p = \frac{R}{0{,}2725}.$$

Setzt man diesen Werth für p in die letzte Gleichung, so ergiebt sich:

$$R' - R = \frac{R^2}{0{,}2725} \cdot \sin 1'' \cdot \sin h' + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{R^3}{(0{,}2725)^2} \cdot \sin^2 1'' (\sin^2 h' + 1) \quad \ldots \text{(III.)}$$

und lässt man das letzte Glied fort, weil sein Maximum $= 0'',3$ ist, so hat man

$$R' - R = \frac{R^2}{0{,}2725} \cdot \sin 1'' \cdot \sin h' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV.)}.$$

Nach Formel (IV.) ist die nautische Tafel XII. berechnet; das Argument derselben ist die für Refraction berichtigte locale Mittelpunktshöhe (locale wahre Mittelpunktshöhe) und der wahre Halbmesser des Mondes.

Beispiel. Die Höhe sei $= 50^\circ$, $R = 15'\,40''$, so ergiebt sich $R' - R$ nach (IV.) wie folgt:

$R = 15' \, 40'' = 940''$ lg · 2 . . = 5,94626
$h' = 50^\circ$ lg sin . . = 9,88425 — 10
lg sin 1″ = 4,68557 — 10
10,51608 — 10
lg 0,2725 = 9,43537 — 10
$R' - R = 12''$ lg = 1,08071.

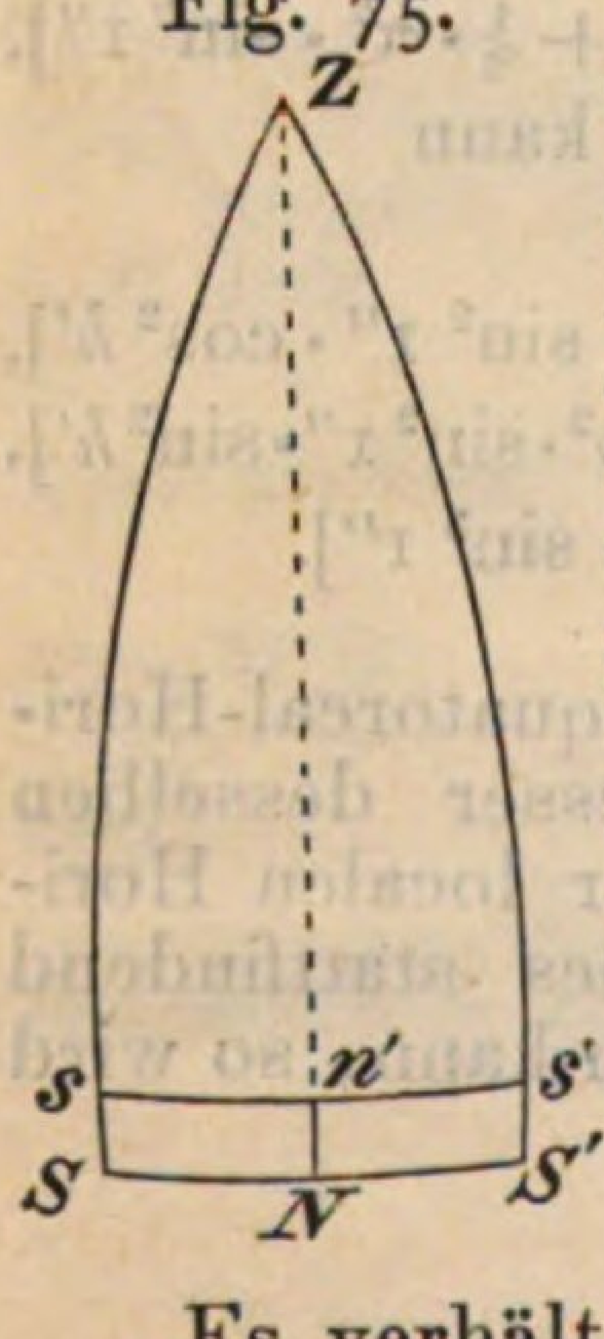
B. Die Verkürzung des Halbmessers der Sonne oder des Mondes zu bestimmen.

Die Verkürzung dieser Halbmesser entsteht dadurch, dass die Refraction mit der Höhe abnimmt, der Oberrand weniger als der Mittelpunkt, und dieser wieder weniger als der Unterrand durch die Refraction gehoben wird, wodurch die sonst runde Scheibe dieser Himmelskörper eine elliptische Form annimmt, deren untere Hälfte etwas mehr excentrisch als die obere ist.

Man kann bei dieser Veränderung der Halbmesser drei verschiedene Fälle annehmen, nämlich: die des horizontalen, die des verticalen und die des gegen den Vertical geneigten Halbmessers.

a. Die Veränderung des horizontalen Halbmessers zu bestimmen.

Fig. 75.



Es sei (Fig. 75.) Z das Zenith, $ZS = ZS'$ seien zwei Verticale, welche den Rand des Himmelskörpers in S und S' berühren, also SS' der horizontale wahre Durchmesser. Durch die Refraction sei der Punkt S nach s und S' nach s' gehoben, folglich ss' der horizontale scheinbare Durchmesser. Es bezeichne ferner d den wahren und d' den durch die Refraction zusammengezogenen Durchmesser; r die Wirkung der Refraction $= sS = s'S'$, und z die mit Refraction behaftete Zenithdistanz $Zs = Zs'$, so ist $ZS = ZS' = z + r$. Man fälle von Z das Perpendikel $Zn'N$, so ergiebt sich aus Dreieck $Zn's' \cong$ Dreieck $Zn's$:

$$\sin \tfrac{1}{2} d' = \sin z \cdot \sin \tfrac{1}{2} \angle Z.$$

Aus Dreieck $ZNS' \cong$ Dreieck ZNS findet man aber

$$\sin \tfrac{1}{2} d = \sin (z + r) \cdot \sin \tfrac{1}{2} \angle Z.$$

Es verhält sich demnach:

$$\sin \tfrac{1}{2} d' : \sin \tfrac{1}{2} d = \sin z : \sin (z + r),$$

und

$$\sin \tfrac{1}{2} d - \sin \tfrac{1}{2} d' : \sin \tfrac{1}{2} d = \sin (z + r) - \sin z : \sin (z + r).$$

Da nun

$$\sin (z + r) - \sin z = 2 \cos \tfrac{1}{2} (2z + r) \cdot \sin \tfrac{1}{2} (z + r - z)$$
$$= 2 \cos (z + \tfrac{1}{2} r) \cdot \sin \tfrac{1}{2} r,$$

so ergiebt sich:

$$\sin \tfrac{1}{2} d - \sin \tfrac{1}{2} d' = [\sin \tfrac{1}{2} d \cdot \cos (z + \tfrac{1}{2} r) \cdot 2 \sin \tfrac{1}{2} r] : \sin (z + r) \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(I.)};$$

hieraus findet man, wenn $\sin \tfrac{1}{2} d - \sin \tfrac{1}{2} d' = \dfrac{d - d'}{2}$, $2 \sin \tfrac{1}{2} r = r = \operatorname{tang} z \cdot 58''$ und $\dfrac{\cos (z + \tfrac{1}{2} r)}{\sin (z + r)} = \operatorname{cotg} z$ genommen wird:

$$\frac{d - d'}{2} = \sin \tfrac{1}{2} d \cdot \operatorname{cotg} z \cdot \operatorname{tang} z \cdot 58'' = \sin \tfrac{1}{2} d \cdot 58'' \; . \; . \; \text{(II.)}.$$

Nach (II.) ist die Veränderung des horizontalen Halbmessers eine constante Grösse und beträgt, wenn man $\frac{1}{2}d = 16'$ setzt, $0'',27$; denn es ist:

$$\begin{aligned} \lg \sin 16' \ldots\ldots &= 7{,}66784 - 10 \\ \lg 58'' \ldots\ldots\ldots &= 1{,}76343 \\ \hline \lg \frac{d-d'}{2} \ldots\ldots &= 9{,}43127 - 10 \\ \frac{d-d'}{2} &= 0'',27. \end{aligned}$$

Ist $z = 90°$, so ist nach der nautischen Tafel IX. $r = 34'\,45''$, und wenn man $\frac{1}{2}d = 16'$ annimmt, so findet man nach (I.) $\frac{d-d'}{2} = -0'',05$; denn es ist

$$\begin{aligned} & \lg \sin 16' \ldots\ldots = 7{,}66784 - 10 \\ \lg \cos (z + \tfrac{1}{2}r) &= \lg \sin 17'\,22'',5 \ldots = 7{,}70365 - 10n \\ & \lg \text{ » } \quad \text{ » } \quad \ldots = 7{,}70365 - 10 \\ \lg \sin (z + r) &= \lg \operatorname{cosec} 90°\,34'\,45'' = 0{,}00002 \\ & \lg 2 \ldots\ldots\ldots = 0{,}30103 \\ \hline & \qquad\qquad 3{,}37619 - 10n \\ & \lg \sin 1'' \ldots\ldots = 4{,}68558 - 10 \\ \hline & \lg \frac{d-d'}{2} \ldots\ldots = 0{,}69061 - 2n \\ & \frac{d-d'}{2} = -0'',05. \end{aligned}$$

Setzt man aber $z = 80°$, so ist r nach Tafel IX. $= 5'\,15''$, und man erhält nach (I.) $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}d' = 0'',26$; es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \lg \sin 16' \ldots\ldots &= 7{,}66784 - 10 \\ \lg \cos 80°\,2'\,37'',5 \,. &= 9{,}23778 - 10 \\ \lg 157'',5 \ldots\ldots &= 2{,}19728 \\ \lg 2 \ldots\ldots\ldots &= 0{,}30103 \\ \lg \operatorname{cosec} 80°\,5'\,15'' &= 0{,}00653 \\ \hline \lg \frac{d-d'}{2} \ldots\ldots &= 9{,}41046 - 10 \\ \frac{d-d'}{2} &= 0'',26. \end{aligned}$$

b. Die Verkürzung des verticalen Halbmessers zu finden.

Die Verkürzung des verticalen Halbmessers ist gleich dem Unterschiede der Refraction für die Höhe des obersten Punktes und des Mittelpunktes, oder für die Höhe des Mittel- und des untersten Punktes der Sonnen- oder Mondscheibe. Bei kleineren Höhen muss die Verkürzung also grösser sein als bei grösseren Höhen, weil die Refraction bei niedern Höhen stärker verändert als bei grösseren Höhen. Ist die Refraction für die scheinbare Höhe des Unter- oder Oberrandes gleich der Refraction für die scheinbare Höhe des Mittelpunktes, so ist die Verkürzung $= 0$.

Beispiel 1. Der Halbmesser sei $16'$; man soll die Verkürzung des oberen verticalen Halbmessers finden, wenn die scheinbare Mittelpunktshöhe $= 0$ ist.

Nach Taf. IX. ist die mittl. Refr. bei $0°$ Höhe . . $= 34'\,45''$
» » » » » » » » $0°\,16'$ Höhe $= 31'\,31''$
Verkürzung $= \;3'\,14''$,

also ist der durch die Refraction veränderte genäherte verticale Halbmesser $= 12'\,46''$.

Man sollte aber diesemnach die Refraction nicht für 0° 16′, sondern für 0° 12′ 46″ gesucht haben, also:

Refraction für 0° Höhe = 34′ 45″
» » 0° 12′ 46″ Höhe = 32′ 8″
Verkürzung = 2′ 37″, also
$\frac{1}{2}d'$ = 13′ 23″.

Wenn man die Rechnung noch einmal wiederholt, indem man die zweite Refraction für 13′ 23″ nimmt, so erhält man die Verkürzung = 2′ 45″ und $\frac{1}{2}d'$ = 13′ 15″; noch eine Wiederholung giebt die Contraction = 2′ 43″ und $\frac{1}{2}d'$ = 13′ 17″.

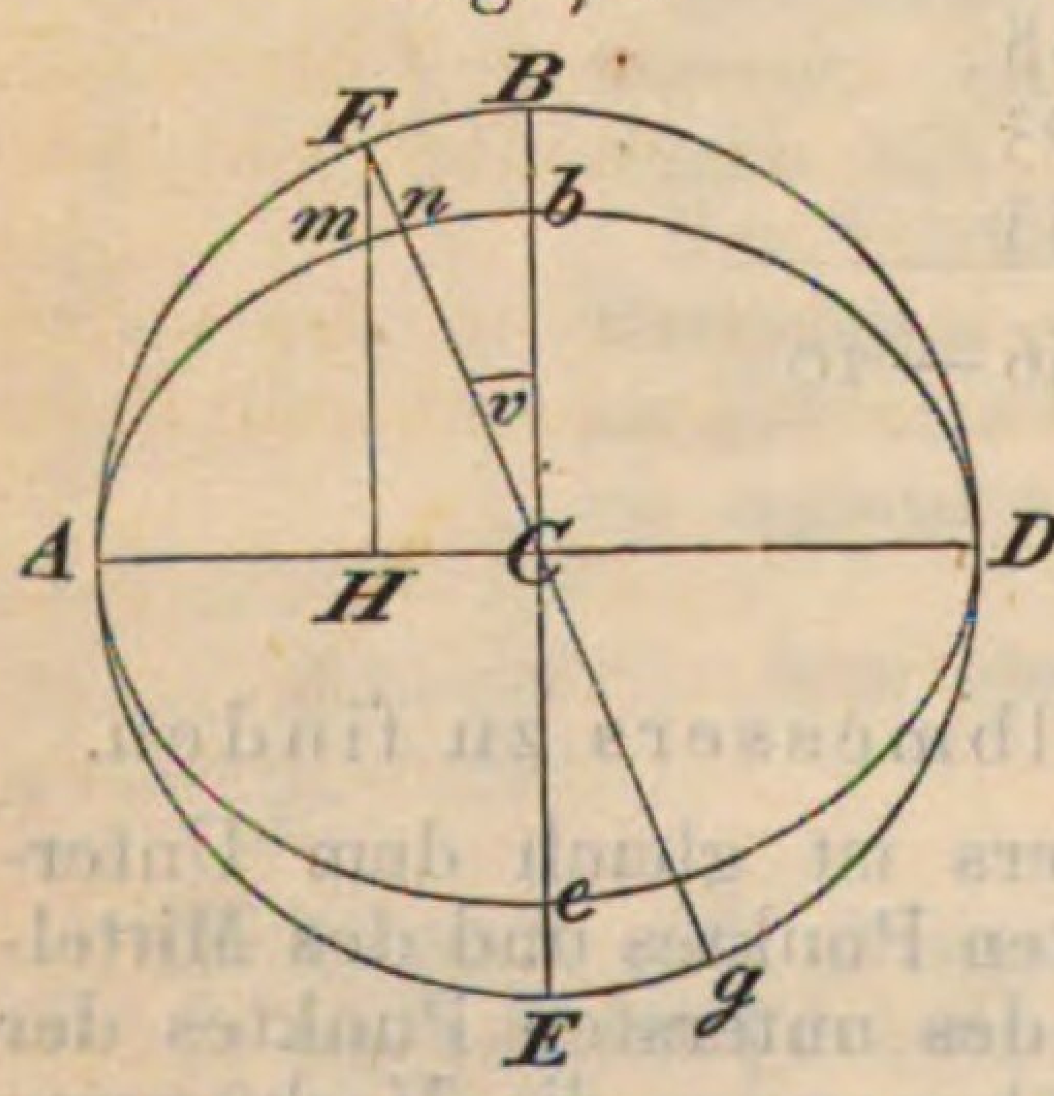
Beispiel 2. Der Halbmesser sei 16′, die scheinbare Höhe des Unterrandes = 5°; man soll die Verkürzung des scheinbaren verticalen Halbmessers finden.

Mittlere Refract. nach Tafel IX. bei 5° Höhe . . = 9′ 45″
» » » » » » 5° 16′ Höhe = 9′ 20″
Verkürzung = 0′ 25″, also
$\frac{1}{2}d'$ = 15′ 35″.

Durch Wiederholung, wie im vorigen Beispiele, findet man die Verkürzung = 0′ 24″ und $\frac{1}{2}d'$ = 15′ 36″, woraus man ersieht, dass es nur bei ganz kleinen Höhen nöthig ist, die Rechnung zu wiederholen. Auch kann es bei kleinen Höhen in dieser Hinsicht nöthig sein, auf den Stand des Barometers und Thermometers Rücksicht nehmen zu müssen.

c. Die Contraction (Verkürzung) des geneigten Halbmessers zu bestimmen, wenn der Winkel, den dieser Halbmesser mit dem durch den Mittelpunkt des betreffenden Gestirns gehenden Verticalkreise bildet, bekannt ist.

Fig. 76.



Es sei (Fig. 76.) $ABDE$ die Scheibe der Sonne oder des Mondes, wie dieselbe ohne Refraction am Himmel erscheinen würde; BE der verticale und AD der horizontale Durchmesser derselben. Ferner sei Bb die Contraction des verticalen obern und Ee die des verticalen untern Halbmessers und $AbDe$ die zusammengezogene ellipsenförmige Scheibe des Himmelskörpers.

Der Winkel FCB, welchen der Halbmesser CF mit dem Vertical BC macht, sei allgemein mit v bezeichnet und der wahre Halbmesser mit $\frac{1}{2}d$. Unter der Annahme, dass die Normale FH mit dem Vertical durch F gehend zusammenfällt, und die Aenderung der Refraction den Höhenunterschieden proportional ist, hat man nach Gleichung (12) im §. 76. der Ellipse

$$BC : bC = FH : mH,$$

woraus folgt $$BC - bC : BC = FH - mH : FH,$$

d. i. $$Bb : BC = Fm : FH,$$

folglich $$Fm = Bb \cdot \frac{FH}{BC} = Bb \cdot \cos v,$$

weil $$FH = \cos v \text{ und } BC = \sin 90° = 1.$$

Man kann ferner das Dreieck Fnm als geradlinig und bei n rechtwinklig betrachten. In demselben ist $\angle nFm = v$, Fn die Contraction des geneigten Halbmessers CF, und es ergiebt sich aus demselben, wenn man für Fm den vorher gefundenen Werth setzt

$$Fn = Bb \cdot \cos^2 v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I.),$$

wonach die Contraction für jeden geneigten Halbmesser gefunden wer-

den kann, wenn man ausser v auch die Contraction des verticalen Halbmessers (hier Bb) kennt.

Die nautische Tafel XVIII. enthält für die scheinbaren Höhen von 2° bis 60° die Contraction der geneigten Halbmesser der Sonne und des Mondes, wenn der wahre Halbmesser = 16′ ist, von 5 zu 5° Neigung mit 0° aufhörend, für welchen letzteren Werth diese Tafel die Contraction des verticalen Halbmessers giebt. Unter der nautischen Tafel XVIII. ist angegeben, wie man zu verfahren hat, um nach derselben die Contraction zu finden, wenn der wahre Halbmesser grösser oder kleiner als 16′ ist, und in der Erklärung der gedachten Tafel ist auch angegeben, wie man bei Ermittelung der Contraction mittelst der Tafel den Stand des Barometers und Thermometers berücksichtigen kann.

Wollte man die Contraction für einen nach unten liegenden Halbmesser, z. B. Cg, haben, so müsste man in (I.) statt Bb die Contraction des untern verticalen Halbmessers Ee setzen.

Beispiel 1. Der aus der Ephemeride gefundene Halbmesser ($\frac{1}{2}d$) sei 16′; der Winkel (v), den der geneigte Halbmesser ($\frac{1}{2}d'$) mit dem Vertical durch den Mittelpunkt des Himmelskörpers gehend macht, = 50°; man soll $\frac{1}{2}d'$ finden, wenn die locale scheinbare Höhe des Mittelpunktes 0 ist.

Es ist nach Beispiel 1. unter b. die Contraction des oberen verticalen Halbmessers

= 2′ 43″ = 163″ lg	= 2,21219
lg cos² 50° .	= 9,61613 — 10
lg Contraction des geneigten Halbmessers	= 1,82832
Contraction = 67″	= 1′ 7″
$\frac{1}{2}d$.	= 16′ 0″
Der geneigte Halbmesser ist also	= 14′ 53″.

Beispiel 2. Der Halbmesser sei 16′, die scheinbare Unterrandshöhe 5°; man soll den Halbmesser finden, der einen Winkel von 160° mit dem Vertical durch den Mittelpunkt gehend macht.

Nach Beispiel 2. unter b. ist die stattfindende Contraction des untern verticalen Halbmessers = 25″ gefunden; man hat also nachstehende Rechnung zu machen:

lg 25″	= 1,39794
lg cos² 160° . .	= 9,94597 — 10
lg Contraction	= 1,34391
Contraction . .	= 22″.

§. 119.

Die abgelesene Höhe des Ober- oder Unterrandes der Sonne zur wahren Mittelpunktshöhe zu reduciren.

1. Addire oder subtrahire die Indexcorrection zu oder von der abgelesenen Höhe des Sonnenrandes, je nachdem diese Correction des gebrauchten Sextanten oder Octanten + oder — ist, so ist die Summe oder der Rest die beobachtete Höhe des Sonnenrandes.

2. Für die Höhe des Auges in Preussischen Fussen bezw. Meter entnimm aus Tafel VII. die scheinbare Kimmtiefe und subtrahire dieselbe von der beobachteten Höhe des Sonnenrandes über dem Seehorizonte, so ist der Rest die locale scheinbare Höhe desselben Randes.

3. Für die locale scheinbare Höhe des Sonnenrandes nimm aus Tafel IX. die mittlere Refraction und berichtige dieselbe nach Tafel XIII. für den Barometer- und Thermometerstand; die so gefundene wahre

Refraction von der localen scheinbaren Höhe subtrahirt, giebt die locale wahre Höhe des Sonnenrandes.

4. Für die locale wahre Höhe des Sonnenrandes nimm aus Tafel X. die Höhenparallaxe der Sonne und addire dieselbe zur obigen localen Höhe, so ist die Summe die wahre Höhe des Sonnenrandes.

5. Im Nautical-Almanac Seite 2 jeden Monats, wie auch im nautischen Jahrbuche Seite 1 jeden Monats und in Tafel XI. der nautischen Tafeln findet man den wahren Halbmesser der Sonne, wie derselbe aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen wird, welcher für die Zeit der Beobachtung interpolirt, zur wahren Höhe des Sonnenrandes addirt oder davon subtrahirt, je nachdem der Unterrand oder Oberrand beobachtet ist, die wahre Höhe des Mittelpunktes der Sonne giebt.

Bemerkung. Wenn die Höhe über dem künstlichen Horizonte gemessen ist, so fällt die Anwendung der Kimmtiefe fort, und es ist die abgelesene Höhe ± der Indexcorrection, dividirt durch 2, gleich der beobachteten Ober- oder Unterrandshöhe, welche nach obiger Anweisung zur wahren Mittelpunktshöhe reducirt werden muss.

Hat man abwechselnd eine gleiche Anzahl Ober- und Unterrandshöhen gemessen, so ist das arithmetische Mittel aus diesen die abgelesene Mittelpunktshöhe, und die Anwendung des Halbmessers fällt dann fort.

Ist die Höhe über einer Strandlinie, also innerhalb der Kimm liegend, gemessen, so findet man in Tafel VIII. mit der Augeshöhe in Rheinl. Fussen bezw. Meter ausgedrückt und der bekannten Entfernung des Strandes in Seemeilen, die anzuwendende Strandtiefe.

Beispiel 1. 1872 den 30. December ⨀ 8° 42′ 15″; Indexcorrection = − 2′ 27″; Augeshöhe 15 Fuss Rheinl., Barometer 30″,6 Engl., Thermometer 44° Fahrenheit; man soll die Mittelpunktshöhe finden.

⨀ .	8° 42′ 15″	
I. C. .	= − 2′ 27″	
beob. ⨀ Höhe	= 8° 39′ 48″	
Kimmtiefe	= − 3′ 51″	mittl. Refr. f. 8° 36′ = 6′ 3″
scheinbare ⨀ Höhe	= 8° 35′ 57″	Corr. f. Barometer = + 13″
Refraction	= − 6′ 21″	» » Thermom. = + 5″.
f. Refr. verb. scheinb. ⨀ Höhe . .	= 8° 29′ 36″	
Höhenparallaxe	= + 0′ 8″	
wahre ⨀ Höhe	= 8° 29′ 44″	
Halbmesser	= + 16′ 18″	
wahre ⊖ Höhe	= 8° 46′ 2″.	

Man zieht die Reduction gewöhnlich mehr zusammen und stellt sie wie folgt:

⨀		8° 42′ 15″
I. C.	− 2′ 27″	− 6′ 18″
Kimmtiefe	− 3′ 51″	
		8° 35′ 57″
Refr. — Parallaxe . . .	− 6′ 13″	+ 10′ 5″
Halbmesser	+ 16′ 18″	
wahre ⊖ Höhe		= 8° 46′ 2″.

Beispiel 2. 1872 den 25. August ⨀ 60° 40′,5; Indexcorrection = 0; Augeshöhe 16 Fuss Rheinl.; man soll die wahre Mittelpunktshöhe finden.

☽ .	60° 40',5
Kimmtiefe	— 4'
	60° 36',5
Refr. — Parallaxe	— 0',5
Halbmesser	— 15',9
wahre ⊖ Höhe	= 60° 20',1.

§. 120.

Aus der abgelesenen Ober- oder Unterrandshöhe des Mondes die wahre Mittelpunktshöhe zu finden.

A. Wenn man genau verfahren will.

1. Addire oder subtrahire die Indexcorrection zu oder von der abgelesenen Höhe des Mondrandes, je nachdem dieselbe mit + oder — bezeichnet ist, so ist die Summe oder der Rest die beobachtete Höhe.

2. Für die Höhe des Auges in Rheinl. Fussen bezw. Meter entnimm aus Tafel VII. die scheinbare Kimmtiefe und subtrahire dieselbe von der beobachteten Höhe, so ist der Rest die locale scheinbare Höhe des gemessenen Randes.

3. Für die locale scheinbare Höhe entnimm aus Tafel IX. die mittlere Refraction, berichtige dieselbe nach Tafel XIII. für den Stand des Barometers und Thermometers und subtrahire die so gefundene wahre Refraction von der localen scheinbaren Höhe des beobachteten Randes, so ist der Rest die locale wahre Höhe.

4. Für die wenigstens ungefähr bekannte Zeit der beobachteten Höhe finde den Halbmesser und die Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes (§. 103.). Mit der geographischen Breite und der Aequatoreal-Horizontalparallaxe finde in Tafel XX. die Berichtigung für Abplattung und subtrahire dieselbe von der Aequatoreal-Horizontalparallaxe, so ist der Rest die locale Horizontalparallaxe.

5. Zu der localen wahren Höhe des Mondrandes addire algebraisch $(\varphi' - \varphi) \cdot$ cosin Azimuth, letzteres vom Meridian des oberen Pols gerechnet, so ist die Summe die locale wahre geocentrische Höhe.

6. Für die locale wahre geocentrische Höhe des Mondrandes suche log sec für den Radius = 1 und addire denselben zum Proportional-Logarithmen der localen Horizontalparallaxe, so ist die Summe der Proportional-Logarithme der Höhenparallaxe, die zur localen wahren Höhe (4) addirt, die sogenannte wahre Höhe des Mondrandes giebt.*)

7. Addire den nach 4. gefundenen wahren Halbmesser zur wahren Unterrandshöhe, oder subtrahire denselben von der wahren Oberrandshöhe, so ist die Summe oder der Rest die wahre Mittelpunktshöhe des Mondes.**)

*) Hierbei ist der Fehler begangen, dass man die Parallaxe im Vertical zum geographischen Zenith wirken lässt, und man hätte, wenn alles richtig sein sollte, nach (II.) in §. 117., von der Höhenparallaxe $\frac{\sin p' \cdot (\varphi' - \varphi)^2 \cdot \sin 1'' \cdot \sin^2 Az.}{2 \cdot \cos h'}$ abziehen sollen. Das Maximum dieses Fehlers kann nach dem im §. 117. berechneten Beispiel 20'',6 betragen, welches stattfindet, wenn der Mond im Meridian zwischen beiden Zenithen und zwar nahe dem geographischen Zenith, $\varphi = 28° \; 36'$ und die locale Horizontalparallaxe = 61' 21'' ist.

**) Dadurch, dass man für die locale wahre Höhe des Randes die Höhenparallaxe nimmt, wird es umgangen, die Vergrösserung des Mondhalbmessers anzuwenden; man macht aber dabei den Fehler, dass man die Parallaxe des Mittelpunktes des Mondes = der Parallaxe vom beobachteten Punkte des Randes setzt, welche letztere zu gross ist, indem

B. Wenn man nicht besonders genau verfahren will.

1. Nimm für die nach A. 1. u. 2. gefundene scheinbare Höhe des gemessenen Randes aus Tafel XVII. die Parallaxe — Refraction, wende darauf die aus Tafel XIII. zu entnehmende Berichtigung für Barometer und Thermometer mit entgegengesetzten Zeichen der Tafel an und addire die so gefundene „Parallaxe — Refraction" zur localen scheinbaren Höhe des gemessenen Randes, so ist die Summe die wahre Höhe desselben Randes.

2. Addire zur wahren Höhe des Unterrandes oder subtrahire von der wahren Höhe des Oberrandes den nach 4. unter A. gefundenen wahren Halbmesser, so ist die Summe oder der Rest die wahre Mittelpunktshöhe des Mondes.*)

Beispiel 1. 1848 den 6. August nach dem Besteck auf 55° 20' NBr. und 15° 30' OL. von Greenw. ist um 4^h 5' mittlere Zeit Abends nachstehende Beobachtung gemacht; man soll die wahre Mittelpunktshöhe des Mondes finden. Augeshöhe 15' Rheinl.; Barom. 30",0 Engl.; Therm. 68° Fahrnh.; ☾ N. 174° Ost; Missw. 16° West; also das wahre Azimuth = N. 158° Ost; I. C. — 2' 30".

☾		21° 3' 30"
I. C.		— 2' 30"
☾ beob. Höhe		= 21° 1' 0"
Kimmtiefe		= — 3' 51"
☾ loc. scheinb. Höhe		= 20° 57' 9"
mittl. Refr. . . .	= 2' 29"	
Corr. f. Bar. . .	= + 2"	— 2' 26"
» » Therm.	= — 5"	
☾ loc. wahre Höhe .		= 20° 54' 43"
Höhenpar.		= + 50' 30"
☾ wahre Höhe . . .		= 21° 45' 13"
w. ☾ Halbmesser . .		= — 14' 47"
☾ wahre Höhe . . .		= 21° 30' 26".

Mittl. Schiffszeit . .	= 4^h 5' Ab.
OL.	— 1^h 2'
Mittl. Greenw. Zeit	= 3^h 3' Ab.
N. A. d. 6. Mittags ☾ Par.	= 54' 14",5
» » Mittern. »	= 54' 13",6
$12^h : 3^h\ 3'$	= 0",9 : x
3 \| 4	0",2
3 \| 60	= 54' 14",5
☾ red. Aeq.-Horiz.-Par.	= 54' 14",3
Corr. f. Abpl.	— 7",0
☾ loc. Horizontalpar. .	= 54' 7",3
☾ Halbm. d. 6. Mittag .	= 14' 46",9
» » Mittern.	= 14' 46",6
w. ☾ Halbm.	= 14' 46",8.

der Berührungspunkt einer Tangente, vom Beobachter an den Rand des Mondes gezogen, nicht so weit vom Mittelpunkte der Erde entfernt ist, als der Mittelpunkt des Mondes. Dieser Fehler ist am grössten, wenn die locale wahre Höhe des beobachteten Randes 0 ist, beträgt jedoch nicht mehr als 0",2, wenn die Horizontalparallaxe = 61' 23",3 und der Halbmesser = 16' 43",7 ist. Es ist nämlich, wenn die locale wahre Unterrandeshöhe = 0 ist, der Sinus der wahren Höhe des Mittelpunktes = sin Horizontalparallaxe + sin Halbmesser = 2 sin ½ (Horizontalparallaxe + Halbmesser) · cos ½ (Horizontalparallaxe — Halbmesser); mithin nach der vorher gemachten Annahme = 2 · sin 39' 3",5 · cos 22' 19",8, welches die wahre Mondhöhe = 1° 18' 7",2 giebt. Nach der gegebenen Regel findet man aber in diesem Falle die wahre Mondhöhe = 61' 23",3 + 16' 43",7 = 1° 18' 7",0; also 0",2 zu wenig.

*) Nach dieser Regel kann nach §. 116. dadurch, dass man die locale wahre Höhe gleich der localen wahren geocentrischen Höhe setzt, höchstens ein Fehler von ∓ 11",8 begangen werden. Setzt man ausserdem noch die Aequatoreal- = der Local-Horizontalparallaxe, so kann dadurch höchstens ein Fehler von + 2",8 entstehen (§. 116.); beide gedachten Fehler zusammengenommen können aber höchstens 13",8 betragen.

Ausserdem wird auch hier der in der vorigen Bemerkung gedachte Fehler begangen, welcher höchstens 20",6 betragen kann. Weil alle drei Fehler aber nie zugleich ihr Maximum erreichen können, so wird man bei der Reduction der Mondhöhen, wenigstens wenn man dieselben zu Breitenbestimmungen berechnen will, nach der unter B. gegebenen Regel verfahren können.

$\varphi' - \varphi = -10'',75$ log . = 1,0314*n*
$A = 158°$ log cos = 9,9672 — 10*n*
+ 9',97 log = 0,9986
= 9' 58'' = $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos$ Az.
20° 54' 43'' ☾ loc. wahre Höhe
21° 4' 41'' ☾ loc. wahre geoc. Höhe
21° 4' 41'' log sec . . . = 0,0301
plg 54' 7'' = 0,5219
Höhenparal. = 50' 30'' plg = 0,5520.

Wenn man nach der unter B. gegebenen Regel verfährt und die Parallaxe — Refraction für die locale scheinbare Höhe aus Tafel XVII. nimmt, so findet man:

Par. — mittl. Refr. = 48' 4''
Corr. f. Barometer = — 2''
» » Thermometer = + 5''
Par. — Refr. + 48' 7''
☾ loc scheinb. Höhe 20° 57' 9''
☾ wahre Höhe = 21° 45' 16''
w. ☾ Halbmesser = — 14' 47''
∢ wahre Höhe = 21° 30' 29''.

Beispiel 2. Die Breite sei 28° 36'; die locale scheinbare Höhe des Mondmittelpunktes 89° 59' 22'' und die Aequatoreal-Horizontalparallaxe = 61' 24''; der Mond ist im Meridian zwischen beiden Zenithen; man soll die wahre Höhe finden.

∢ loc. scheinb. Höhe = 89° 59' 22''
Refr. = 0''
∢ loc. wahre Höhe = 89° 59' 22''
Höhenpar. = + 9'',6.
∢ wahre Höhe . . . = 89° 59' 31'',6,
welche so viel verkehrt ist, als der Fehler beträgt, der dadurch entsteht, dass man die Par. im Vertical zum geographischen Zenith hat wirken lassen.

∢ loc. wahre Höhe zwischen beiden Zenithen = 89° 59' 22''; $\varphi' - \varphi$ = Entfernung der Zenithe von einander = 9' 38'' giebt:
∢ loc. wah. geoc. H. = 89° 51'; davon
log cos = 7,41797 — 10
Aeq.-Horiztp. = 61' 24'';
Corr. f. Abpl. = 2'',8;
giebt loc. Horiztalpar.
= 61' 21'',2 lg sin . . . = 8,25154 — 10
5,66951 — 10
lg sin 1'' = 4,68558 — 10
Höhenparal. = 9'',6 lg = 0,98393.

Nach einer richtigen Reduction findet man:

∢ loc. wahre geoc. Höhe = 89° 51'
loc. Höhenparal. = + 0' 9'',6
∢ geoc. wahre Höhe . . = 89° 51' 9'',6
giebt ∢ wahre Höhe. = 89° 59' 12'',4,

also 19'',2 kleiner als nach der ersten Reduction.

Wenn man gar nicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht nimmt, so ist:

☾ loc. w. H. = 89° 59′ 22″	lg cos = lg sin 38″ oder lg 38″ = 1,57978
Höhenpar. = + 0″,7	Aeq.-Horiztpl. = 61′ 24″ lg sin = 8,25187 — 10
☾ w. Höhe = 89° 59′ 22″,7	lg Höhenparal. in Secunden = 9,83165 — 10
welche nur 10″,3 kleiner als die ganz richtig verbesserte Höhe ist.*)	Höhenparal. = 0,″7.

§. 121.

Die abgelesene Oberrands-, Unterrands- oder Mittelpunktshöhe eines Planeten zur wahren Mittelpunktshöhe zu reduciren.

Wenn die Höhe des Ober- oder Unterrandes eines Planeten beobachtet ist, so geschieht die Reduction ganz nach der Regel, welche zur Reduction der Sonnenhöhe gegeben ist.

Die Höhenparallaxe eines Planeten ist für die locale wahre Höhe und für die Horizontalparallaxe in Tafel XV. enthalten.

Von Seeleuten wird die Mittelpunktshöhe der Planeten beobachtet und es fällt dann natürlich die Berichtigung für den Halbmesser weg.

Beispiel 1. 1850 den 6ten December ♀ Mittelpunkts-Doppelhöhe = 28° 19′ 20″; Barometer 30″,1 Engl.; Thermometer 60° Fahrenheit; Index-Correction — 0′ 10″; man soll die wahre Höhe finden.

♀	28° 19′ 20″	
I. C.	— 0′ 10″	mittl. Refr. . . . 3′ 44″
♀ beob. Höhe . .	= 28° 19′ 10″	Corr. f. Barom. + 4″
♀ beob. Höhe . .	= 14° 9′ 35″	» » Therm. — 4″
Refr.	= — 3′ 44″	
♀ loc. wahre Höhe	= 14° 5′ 51″	♀ Horizontalparal. n. N.-A. = 31″ giebt Höhenparallaxe = 30″.
Höhenparal.	= + 30″	
♀ wahre Höhe . .	= 14° 6′ 21″.	

Beispiel 2. 1848 den 3ten März abgelesene ♂ Mittelpunktshöhe = 31° 35′; Index-Correction = + 1′; Augeshöhe 9′ Rheinl.; wie gross ist die wahre Mittelpunktshöhe?

♂	31° 35′	Horizontalparal. ist n. N.-A. = 6″ giebt Höhenparallaxe = 5″.
I. C.	= + 1′	
Kimmt.	= — 3′	
♂ loc. Höhe . . .	= 31° 33′	
Refr. — Par.. . . .	= — 1′,5	
♂ wahre Höhe . .	= 31° 31′,5.	

§. 122.

Aus der abgelesenen Höhe eines Fixsternes die wahre Höhe zu finden.

Diese Berichtigung wird nach derselben Regel gemacht, welche in §. 119. für die Sonnenhöhe gegeben ist, nur fallen bei Fixsternen die Correctionen für Parallaxe und Halbmesser weg.

*) Diese genauere Uebereinstimmung mit dem richtigen Resultat nach der ungenaueren Methode der Reduction kommt daher, dass der Fehler, welcher dadurch entsteht, dass die Höhenparallaxe für die locale wahre Höhe gefunden ist, den Fehler zum Theil aufgehoben hat, der dadurch entstanden ist, dass man die Parallaxe im Vertical zum geographischen Zenith hat wirken lassen, welches aber nicht immer der Fall ist; denn wenn das Azimuth, vom Meridian des oberen Pols gerechnet, spitz ist, so fallen beide Fehler zusammen.

Antares.

Beispiel 1. ✳ = 26° 48′; I. C. + 1′; Augesh. 9′ Rheinl.; man soll die wahre Höhe finden.

I. C.	= + 1′
	26° 49′
Kimmt	= — 3′
✳ scheinb. Höhe . .	= 26° 46′
Refr.	= — 1′,9
✳ wahre Höhe . . .	= 26° 44′,1.

Beispiel 2. Es ist nachstehende Beobachtung gemacht; man soll daraus die wahre Höhe des Sternes finden.

✳̬	= 43° 41′ 50″; I. C. = + 8′ 36″; Barom. 30″,3 Engl.,		
I. C.	= + 8′ 36″	Therm. = 59°,5 Fahrenheit.	
✳̬ beob. Höhe	= 43° 50′ 26″	m. Refr. . . =	2′ 22″
✳ beob. Höhe	= 21° 55′ 13″	C. f. Barom. =	+ 3″
Refr.	= — 2′ 22″	» Therm. =	— 3″
✳ wahre Höhe	= 21° 52′ 51″.		

§. 123.

Aus der abgelesenen Höhe des Ober- oder Unterrandes eines Himmelskörpers die scheinbare und wahre Mittelpunktshöhe zu finden.

Auf die abgelesene Höhe wird die Indexcorrection nach ihrem Zeichen und die Kimmtiefe mit — angewandt.

Der aus der Ephemeride für die Beobachtung gefundene Halbmesser des Gestirnes wird um die aus Tafel XVIII. zu entnehmende verticale Contraction verkleinert, und wenn es der Halbmesser des Mondes ist, so wird zu demselben auch noch die der Höhe entsprechende Vergrösserung addirt, welche in Tafel XII. enthalten ist. Der so gefundene scheinbare Halbmesser wird zur scheinbaren Höhe addirt oder davon subtrahirt, je nachdem der Unter- oder Oberrand beobachtet ist, bevor die Refraction angewandt wird; dies giebt die scheinbare Mittelpunktshöhe, für welche dann die Refraction aus Tafel IX. zu entnehmen und für den Stand des Barometers und Thermometers nach Tafel XIII. zu berichtigen ist. Die Refraction von der scheinbaren Mittelpunktshöhe subtrahirt giebt die locale wahre Mittelpunktshöhe, für welche die Höhenparallaxe nach den für Sonne, Mond und Planeten bereits gegebenen Vorschriften gefunden wird.

Die Höhenparallaxe zur localen wahren Mittelpunktshöhe addirt, giebt die wahre Mittelpunktshöhe.

Beispiel 1. 1853 den 30. December $\underline{\odot}$ 8° 42′ 15″; I. C. = — 2′ 27″, Augeshöhe 15′ Rheinl., Barometer = 30″,6 Engl., Thermometer = 44° Fahrenheit. Wie gross ist die scheinbare und wahre Mittelpunktshöhe?

$\underline{\odot}$	8° 52′ 15″			Jahrb. ⊙ Halbm. =	16′ 18″
I. C.	= — 2′ 27″			Contraction =	— 10″
$\underline{\odot}$ beob. H. . .	= 8° 39′ 48″	m. Refr. . =	5′ 53″	⊙ scheinb. Halbm. =	16′ 8″.
Kimmt	= — 3′ 51″	C. f. Bar. =	+ 12″		
$\underline{\odot}$ scheinb. H.	= 8° 35′ 57″	» Thm. =	+ 4″		
⊙ Halbm. . .	= + 16′ 8″	Höhenp. =	— 8″		
	8° 52′ 5″		6′ 1″		
Refr. — Par.	= — 6′ 1″				
⊖ wahre H.	= 8° 46′ 4″.				

Beispiel 2. 1853 den 16. Februar in 54° 21′ NBr., 18° 45′ OL. von Greenwich ist nachstehende Beobachtung gemacht; man soll die scheinbare und wahre Mittelpunktshöhe finden.

Barometer 30″,2 Engl., Thermometer 44° Fahrenheit; I. C. + 1′ 12″.

☾̲	109° 12′ 40″ im Süd-Meridian		ungef. m. Z.	= 6^h 25′ Nm. d. $\frac{16}{2}$
I. C.	= + 1′ 12″		OL. in Zt.	= 1^h 15′
	109° 13′ 52″		ung. m. G. Z.	= 5^h 10′ Abd. d. $\frac{16}{2}$
☾̲ scheinb. H.	= 54° 36′ 56″		☾ w. Halbm.	= 14′ 51″,9
☾ sch. Halbm.	= + 15′ 3″		Vergröss.	= + 12″
-☾ scheinb. H.	= 54° 51′ 59″	P. — R. = 30′ 34″	Contract.	= — 0″,5
Paral. — Refr.	= + 30′ 32″	C. f. B. = (+) — 1″	☾ scheinb. Halbm. . .	= 15′ 3″,4
-☾ wahre H. .	= 55° 22′ 31″.	» » T. = (+) — 0″,6	☾ Aeq. Horizontp. . .	= 54′ 24″,5
			Correct. f. Abplat. . .	= — 7″,3
			☾ Local-Horiztp. . .	= 54′ 17″,2.

§. 124.

Aus der abgelesenen Ober- oder Unterrands- oder auch Mittelpunktshöhe eines Himmelskörpers die locale scheinbare geocentrische und die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe zu finden, wenn man die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirken lässt.

Diese Reduction wird nach der Regel gemacht, welche zur Verwandelung der abgelesenen Höhe in die scheinbare und wahre Mittelpunktshöhe gegeben ist; jedoch mit dem Unterschiede, dass zur localen scheinbaren Mittelpunktshöhe $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos$ Azimuth, letzteres vom Meridian des oberen Pols gerechnet, algebraisch addirt wird. Die Summe ist die locale scheinbare geocentrische Mittelpunktshöhe; von derselben subtrahirt man die Refraction (für die locale scheinbare Mittelpunktshöhe aus Tafel IX. entnommen und für den Stand des Barometers und Thermometers nach Tafel XIII. berichtigt) und nenne den Rest die locale wahre geocentrische Mittelpunktshöhe, für welche die Höhenparallaxe aus Tafel X. oder XV. entnommen wird, je nachdem die Sonne oder ein Planet beobachtet ist. Wenn der Mond beobachtet ist, wird nach der Gleichung „lg sec locale wahre geocentrische Höhe + plg locale Horizontalparallaxe = plg Höhenparallaxe", die letztere berechnet und zur localen wahren geocentrischen Mittelpunktshöhe addirt; dann hat man die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe.*)

Beispiel 1. 1853 den 30. December ☉̲ 8° 42′ 15″; I. C. = — 2′ 27″; Augeshöhe = 15′ Rheinl.; Barometer = 30″,6 Engl., Thermometer = 34°

*) Da diese Reduction der Höhen nur gebraucht wird, wenn man die Länge durch Monddistanzen finden will, wobei es nicht so genau auf die Höhen selbst, als vielmehr darauf ankommt, dass die locale scheinbare geocentrische Höhe genau um die Refraction — Parallaxe, bezw. Parallaxe — Refraction, oder beim Fixstern um die Refraction mit der geocentrischen wahren Höhe differirt, welches später bei Monddistanzen bewiesen werden wird, so nimmt man, da es bei diesen einige Leichtigkeit gewährt, gewöhnlich die locale scheinbare geocentrische Höhe auf volle Minuten und wendet dann die Refraction und Parallaxe auf Secunden genau darauf an.

Der grösstmögliche Fehler, welcher nach dieser Reduction dadurch in der localen wahren geocentrischen Höhe entstehen kann, dass man die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirken lässt, beträgt (nach §. 117.) nur 0″,4.

Fahrenheit; wahres Azimuth N. 167° W., NBr. 56°; man soll die locale scheinbare geocentrische Mittelpunktshöhe und die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe finden.

⊙	8° 42′ 15″
I. C. . . = — 2′ 27″ } Kimmt. = — 3′ 51″ } .	— 6′ 18″
⊙ loc. scheinb. Höhe . =	8° 35′ 57″
⊙ scheinb. Halbm. . . =	+ 16′ 8″
⊖ loc. scheinb. Höhe . =	8° 52′ 5″
Red. f. Abpl. =	+ 10′ 23″
⊖ loc. scheinb. geoc. H. =	9° 2′ 28″
Refr. — Parallaxe . . . =	— 6′ 1″
⊖ geoc. wahre Höhe . =	8° 56′ 27″.

⊙ w. Halbm. n. d. Jahrb. =	16′ 18″
Contraction =	— 10″
⊙ scheinb. Halbm. . . =	— 16′ 8″
φ′ — φ = — 10′ 39″ =	
— 639″ lg =	2,8055 *n*
lg cos 167° =	9,9887 *n*
Diff. d. geoc. H. u. loc. H.	
= + 623″ lg . . =	2,7942
= + 10′ 23″	
Mittl. Refr. f. 8° 52′ Höhe =	5′ 53″
Corr. f. Barom. =	+ 12″
» » Therm. =	+ 4″
Höhenparallaxe =	— 8″
	6′ 1″.

Beispiel 2. Die Breite = 30° Süd, abgelesene Höhe eines Fixsternes = 25° 10′, Azimuth desselben S. 80° Ost, I. C. = 0′; Augeshöhe 8′ Rheinl.; man soll die locale scheinbare geocentrische und die geocentrische wahre Höhe finden.

✳ abgelesene Höhe . . =	25° 10′
Kimmtiefe =	— 2′,8
✳ loc. scheinb. Höhe . =	25° 7′,2
Red. f. Abpl. =	— 1′,7
✳ loc. scheinb. geoc. H. =	25° 5′,5
Mittl. Refr. f. 25° 7′ . . =	— 2′
✳ geoc. wahre Höhe . =	25° 3′,5.

φ′ — φ = — 9′ 55″ = — 595″	
davon lg =	2,7745 *n*
lg cos 80° =	9,2398
Diff. d. geoc. H. u. loc. H.	
= — 103″ lg . . =	2,0143 *n*
= — 1′,7.	

§. 125.

Aus der abgelesenen Ober- oder Unterrands- oder auch Mittelpunktshöhe eines Himmelskörpers die locale scheinbare, die locale wahre, die locale wahre geocentrische und die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe zu finden.

Diese Reduction wird nach der zur Reduction der abgelesenen Höhen zu scheinbaren und wahren Mittelpunktshöhen gegebenen Regel gemacht (§. 124.), nur addirt man hier die für die locale wahre geocentrische Mittelpunktshöhe berechnete locale Höhenparallaxe zur localen wahren geocentrischen Höhe des Mittelpunktes; dann ist die Summe die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe.

⊙ =	8° 42′ 15″
I. C. . . . = — 2′ 27″ } Kimmt. . = — 3′ 51″ } =	— 6′ 18″
⊙ scheinbare Höhe. =	8° 35′ 57″
⊙ scheinb. Halbm. =	+ 16′ 8″
⊖ loc. scheinb. Höhe =	8° 52′ 5″
Refraction =	— 6′ 9″
⊖ loc. wahre Höhe =	8° 45′ 56″
Red. für Abpl. =	+ 10′ 23″
⊖ loc. wahre geoc. Höhe . . . =	8° 56′ 19″
loc. Höhenparallaxe =	+ 8″
⊖ geoc. wahre Höhe =	8° 56′ 27″.

Beispiel. Die gegebenen Data seien dieselben wie in Beispiel 2 zu (§. 123.); die locale scheinbare -☾ Höhe, die locale wahre -☾ Höhe, die locale wahre geocentrische -☾ Höhe und die geocentrische wahre -☾ Höhe soll gefunden werden.

☾	109° 12′ 40″ im Süd-Meridian	
I. C. =	+ 1′ 12″	
	109° 13′ 52″	
☾ scheinbare Höhe =	54° 36′ 56″	mittl. Refr. = 0′ 40″
☾ scheinbarer Halbm. . . =	+ 15′ 3″	Corr. f. Barom. . = + 0″,6
-☾ scheinbare Höhe =	54° 51′ 59″	» » Therm. = + 1″
Refr. =	— 0′ 42″	0′ 42″
-☾ loc. wahre Höhe =	54° 51′ 17″	
Red. f. Abpl. =	+ 10′ 53″	loc. Horizpl. plg . . . = 0,5206
-☾ loc. wahre geoc. Höhe . =	55° 2′ 10″	lg sec loc. w. g. H. . = 0,2418
Höhenparallaxe =	+ 31′ 7″	plg Höhenparallaxe . = 0,7624
-☾ geoc. wahre Höhe . . . =	55° 33′ 17″.	

§. 126.

Aus den mit der geographischen Breite berechneten Mittelpunktshöhen der Gestirne die scheinbaren und wahren Mittelpunktshöhen zu finden, wenn man annimmt, dass die Parallaxe im Vertical zum geographischen Zenith wirkt.

a. Ist das in Rede stehende Gestirn die Sonne, ein Planet oder Fixstern, so entnimmt man, indem die wahre Höhe gleich der scheinbaren Höhe gesetzt wird, aus Tafel IX. die Refraction und subtrahirt davon die Höhenparallaxe nach Tafel X. oder XV., wenn das Gestirn die Sonne oder ein Planet ist. Die so gefundene ungefähre Refraction — Parallaxe (für einen Fixstern die ungefähre Refraction) addirt man zur berechneten wahren Höhe, so ist die Summe die scheinbare Mittelpunktshöhe,*) welche, weil diese Reduction nur bei Monddistanzen vorkommt, wo es ohne erheblichen Fehler gestattet ist, auf volle Minuten genommen wird.

Für diese scheinbare Mittelpunktshöhe nimmt man wieder die Refraction aus Tafel IX., verbessert dieselbe für den Stand des Barometers und Thermometers, zieht davon die Höhenparallaxe ab, wenn das Gestirn die Sonne oder ein Planet ist, und subtrahirt die so gefundene wahre Refraction — Höhenparallaxe (beim Fixstern nur die wahre Refraction) von der scheinbaren Mittelpunktshöhe, so ist der Rest die wahre Mittelpunktshöhe.

b. Ist das in Rede stehende Gestirn der Mond, sucht man aus der Ephemeride für die Zeit der Beobachtung die Aequatoreal-Horizontalparallaxe, subtrahirt davon die aus Tafel XX. zu entnehmende Correction für Abplattung, so hat man die locale Horizontalparallaxe; für diese und die berechnete Höhe als Argumente (die berechnete Höhe wird nämlich gleich der localen wahren Höhe gesetzt) entnimmt man aus Tafel XVII. die ungefähre Höhenparallaxe — Refraction, welche von der

*) Ist die scheinbare Höhe kleiner als 3°, so kann man noch einmal die Refraction dafür suchen und zu der berechneten Höhe addiren; das so Gefundene die scheinbare Höhe nennen und für diese wieder die richtige Refraction suchen, dieselbe für den Stand des Barometers und Thermometers berichtigen und um die etwaige Höhenparallaxe vermindern. Die diesemnach gefundene richtige Refr. — Parallaxe von der scheinbaren Höhe subtrahirt, giebt wahre Mittelpunktshöhe.

berechneten wahren Höhe subtrahirt, die scheinbare ☾ Höhe giebt, die wie unter a. bemerkt, ebenfalls nur auf volle Minuten genommen wird.*)

Für die so gefundene scheinbare ☾ Höhe entnimmt man wieder aus Tafel XVII. die Höhenparallaxe — Refraction und corrigirt dieselbe für den etwaigen Stand des Barometers und Thermometers, indem die Correctionen, aus Tafel XIII. entnommen, mit entgegengesetzten Zeichen angewandt werden. Die dadurch erhaltene genauere Höhenparallaxe — Refraction giebt, zur scheinbaren ☾ Höhe addirt, die wahre ☾ Höhe.**)

Beispiel 1. 1853 den 30. December ⊖ berechnete Höhe = 8° 46′; Barometer = 30″,6 Englisch; Thermometer = 44° Fahrenheit; man soll die scheinbare und wahre Mittelpunktshöhe finden.

⊖ berechnete Höhe		= 8° 46′
ungefähre Refr. — Par.		= + 6′
⊖ scheinbare Höhe		= 8° 52′
mittl. Refr. = 5′ 53″	Refr. — Par. = — 6′ 1″	
Berichtg. für Barom. = + 12″		
» » Therm. = + 4″		
Höhenpar. = — 8″		
⊖ wahre Höhe		= 8° 45′ 59″.

Beispiel 2. 1853 den 5. Januar in 54° 38′ NBr. und 18° 53′ OL. von Greenwich ist 8^h 18′ mittlere Zeit Morgens die berechnete Höhe des -☾ = 21° 56′, Barometer = 29″,7 Englisch, Thermometer = 32° Fahrenheit; man soll die scheinbare und wahre Mittelpunktshöhe finden.

-☾ berechnete Höhe . . = 21° 56′	20^h 18′ m. astr. Zt. den $\frac{4}{1}$
ungef. Parall. — Refract. = — 53′	— 1^h 19′ L. i. Zt.
-☾ scheinbare Höhe . . = 21° 3′	18^h 59′ m. astr. Greenw. Zt. den $\frac{4}{1}$
Par. — Ref. = 53′ 12″ } = + 53′ 7″	
Cor. f. Bar. = (+) — 0″	☾ reduc. Aeq. Horizontp. = 59′ 46″,9
» f. Ther. = (+) — 5″	Correc. für Abplattung = — 7″,8
-☾ wahre Höhe = 21° 56′ 7″.	☾ Local-Horizontpar. . . = 59′ 39″,1.

Beispiel 3. 1853 den 16. December ist die berechnete Höhe des ♃ = 10° 35′, Barometer = 31″,0 Englisch, Thermometer = 75° Fahrenheit; man soll die scheinbare und wahre Höhe finden.

♃ berechnete Höhe	= 10° 35′	♃ Horizontalpar. = 1″,4
ungefähre Refr. — Par.	= + 5′	
♃ scheinbare Höhe	= 10° 40′	
mittlere Refr. = 4′ 56″	Refr. — Par. = — 4′ 55″	
Cor. f. Barom. = + 14″		
» f. Therm. = — 14″		
Höhenpar. . . = — 1″		
♃ wahre Höhe	= 10° 35′ 5″.	

*) Was in der Anmerkung zu a. in Hinsicht der Wiederholung gesagt ist, wenn die scheinbare Höhe kleiner als 3° ist, gilt auch hier.

**) Der Fehler, welcher dadurch in der Höhenparallaxe des Mondes entstehen kann, dass man die locale wahre Höhe gleich der localen wahren geocentrischen Höhe setzt, mithin nicht (φ′ — φ) · cos Azimuth zu derselben algebraisch addirt, beträgt nach §. 116. höchstens ∓ 11″,8, und kann, wie in §. 120. Beispiel 2. gezeigt ist, den eigentlichen Fehler noch vermindern. Dies ist der Fall, wenn das Azimuth vom Meridian des oberen Pols gerechnet, spitz ist, denn dadurch, dass man die Parallaxe im Vertical zum geographischen Zenith wirken lässt, wird die scheinbare Höhe zu klein gefunden, indem man zu viel von der berechneten Höhe abzieht; die locale wahre Höhe ist aber bei spitzem Azimuth grösser als die locale wahre geocentrische Höhe, wodurch die Höhenparallaxe wieder zu klein gefunden wird.

Beispiel 4. Die berechnete Höhe eines Fixsternes ist gleich 15° 10′; wie gross ist bei einem mittleren Stande des Barometers und Thermometers die scheinbare und wahre Höhe desselben?

✳ berechnete Höhe	=	15° 10′
ungefähre Refr. . . .	=	+ 3′
✳ scheinbare Höhe	=	15° 13′
Refraction	=	— 3′ 28″
✳ wahre Höhe . . .	=	15° 9′ 32″.

§. 127.

Aus den mit der geographischen Breite berechneten Mittelpunktshöhen der Himmelskörper die localen scheinbaren geocentrischen und die wahren geocentrischen Mittelpunktshöhen zu finden, wenn man annimmt, dass die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirkt.

Ist die Höhe der Sonne oder die Höhe eines Planeten zu reduciren, so setze man die berechnete = der scheinbaren Höhe, finde dafür die ungefähre Refraction—Höhenparallaxe und addire dieselbe zu der berechneten Höhe, so ist die Summe die locale scheinbare Mittelpunktshöhe. Bei einem Fixsterne fällt die Parallaxe weg, man hat daher nur die Refraction zu addiren, um die locale scheinbare Höhe zu erhalten. Beim Monde aber sucht man, die berechnete Höhe = der localen scheinbaren Höhe gesetzt, aus Tafel XVII. die ungefähre Höhenparallaxe—Refraction und subtrahirt dieselbe von der berechneten Höhe, so erhält man die locale scheinbare Höhe, welche bei jedem Gestirn auf volle Minuten genau zu nehmen ist, weil dieses bei Monddistanzen, wo so verfahren wird, gestattet ist.

Für die locale scheinbare Höhe wird die Refraction genau aus Taf. IX. entnommen und für den Stand des Barometers und Thermometers nach Tafel XIII. berichtigt.

Zu der localen scheinbaren Mittelpunktshöhe addirt man ferner algebraisch $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos$ Azimuth, letzteres vom Meridian des oberen Pols gerechnet, so erhält man die locale scheinbare geocentrische Mittelpunktshöhe.

Von der localen scheinbaren geocentrischen Mittelpunktshöhe wird die für Barometer- und Thermometerstand berichtigte Refraction subtrahirt, so erhält man die locale wahre geocentrische Mittelpunktshöhe. Für diese sucht man log sec (für Radius = 1) und addirt dazu plg Local-Horizontalparallaxe, so ist die Summe plg Höhenparallaxe. Die Höhenparallaxe zu der localen wahren geocentrischen Mittelpunktshöhe addirt, giebt die wahre geocentrische Mittelpunktshöhe.

Für die Sonne kann die Höhenparallaxe aus Tafel X. und für einen Planeten aus XV. für die locale wahre geocentrische Höhe entnommen werden. Für einen Fixstern ist die gefundene locale wahre geocentrische Höhe desselben gleich der geocentrischen wahren Höhe.

Beispiel 1. 1853 den 30. December, auf 56° NBr., Barometer = 30,″6 Englisch, Thermometer = 34° Fahrenheit; ⊖ berechnete Höhe = 8° 56′; wahres Azimuth N. 161° W.; wie gross ist die locale scheinbare geocentrische und wie gross die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe?

⊖ berechnete Höhe	= 8° 56′	φ′ — φ = — 10′ 39″ =
ungefähre Refraction — Par.	= + 6′	— 639″ lg = 2,8055 *n*
⊖ locale scheinbare Höhe .	= 9° 2′	161° lg cos = 9,9757 *n*
(φ′ — φ) · cos Azimuth . . .	= + 10′	+ 604″ lg = 2,7812
⊖ loc. scheinb. geoc. Höhe	= 9° 12′	+ 10′ 4″ = (φ′ — φ) cos Az.
m. R. f. 9° 2′ = 5′ 47″ Ber. f. Bar. = + 12″ » » Th. = + 12″ Höhenpar. = — 8″ } Rf.—P.	= — 6′ 3″	
⊖ geocentrische wahre Höhe	= 9° 5′ 57″.	

Beispiel 2. In 55° 42′ NBr., Barometer = 30″,2 Englisch, Thermometer = 54°,5 Fahrenheit, ☾ Aequatoreal-Horizontalparallaxe = 59′ 41″; ☾ berechnete Höhe = 18° 0′; wahres Azimuth Süd; man soll die locale scheinbare geocentrische ☾ Höhe und die wahre geocentrische ☾ Höhe finden.

☾ berechnete Höhe	= 18° 0′	☾ Aeq. Horiztpar. = 59′ 41″
ungef. Höhenpar. — Refr. . .	= — 54′	Ber. für Abpl. . . = — 8″
☾ locale scheinbare Höhe .	= 17° 6′	☾ Loc.-Horiztpar. = 59′ 33″
cos Az. = — 1; (φ′ — φ) = — 10′ 42″ mithin	+ 11′ = (φ′ — φ) · cos Az.	
☾ loc. scheinb. geoc. Höhe .	= 17° 17′	
mittl. Ref. f. 17° 6′ = 3′ 5″ Ber. für Barom. . . = + 4″ » » Therm. . = — 2″ }	= — 3′ 7″	☾ locale Horizontalparallaxe = 59′ 33″ plg. . . = 0,4804
		lg sec = 0,0199
☾ locale wahre geoc. Höhe .	= 17° 13′ 53″	 = 0,5003.
Höhenparallaxe	= + 56′ 53″	
☾ geoc. wahre Höhe	= 18° 10′ 46″.	

Beispiel 3. Die berechnete Höhe eines Sternes sei = 26° 44′; man soll für einen mittleren Barometer- und Thermometerstand die locale scheinbare geocentrische Höhe und die geocentrische wahre Höhe finden, wenn die Breite 45° Süd und der Stern im N. Meridian ist.

✳ berechnete Höhe	= 26° 44′
ungefähre Refraction	= + 2′
✳ locale scheinbare Höhe	= 26° 46′
(φ′ — φ) · cos Azimuth	= + 11′
✳ locale scheinbare geocentrische Höhe	= 26° 57′
Refraction	= — 1′ 53″
✳ geocentrische wahre Höhe	= 26° 55′ 7″.

§. 128.

Aus der mit der geographischen Breite berechneten Mittelpunktshöhe eines Gestirnes, die locale scheinbare, die locale wahre, die locale wahre geocentrische und die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe zu finden.

Finde die locale scheinbare Mittelpunktshöhe auf die nächst volle Minute nach der in §. 127. gegebenen Vorschrift und suche dafür die genaue Refraction nach derselben Regel.

Die Refraction, von der localen scheinbaren Mittelpunktshöhe subtrahirt, giebt die locale wahre Mittelpunktshöhe.

Zur loc. w. Mittelpunktshöhe addire algebraisch (φ′ — φ) · cos Azim. (letzteres vom Meridian des obern Pols gerechnet), so ist die Summe die locale wahre geocentrische Mittelpunktshöhe.

Für die locale wahre geocentrische Mittelpunktshöhe berechne nach §. 127. die Höhenparallaxe des Mondes, entnehme dieselbe aus Tafel X. für die Sonne, oder aus Tafel XV. für einen Planeten. Die locale wahre geocentrische Mittelpunktshöhe + der Höhenparallaxe ist die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe.

Für einen Fixstern ist die locale wahre geocentrische Höhe gleich der geocentrischen wahren Höhe.

Beispiel 1. Die gegebenen Data seien dieselben, wie in §. 127. Beispiel 1.; man soll die locale scheinbare, die locale wahre, die locale wahre geocentrische und die geocent. wahre Mittelpunktshöhe finden.

☉ berechnete Höhe	=	8° 56′
ungefähre Refraction	=	+ 6′
☉ locale scheinbare Höhe	=	9° 2′
mittl. Refraction . . = 5′ 47″ Bericht. für Barom. . = + 12″ » » Therm. . = + 12″ } Refr.	=	— 6′ 11″
☉ locale wahre Höhe	=	8° 55′ 49″
(φ′ — φ) · cos Azimuth	=	+ 10′ 4″
☉ locale wahre geocent. Höhe	=	9° 6′ *)
Höhenparallaxe	=	+ 0′ 8″
☉ geoc. wahre Höhe	=	9° 6′ 8″.

Beispiel 2. Die Aufgabe ist: die locale scheinbare Höhe, die locale wahre Höhe, die locale wahre geocentrische Höhe und die geocentrische wahre Mittelpunktshöhe zu finden, wenn die gegebenen Data dieselben, wie in §. 127. Beispiel 2.

☾ berechnete Höhe	=	18° 0′
ungefähre Parallaxe — Refraction	=	— 54′
☾ locale scheinbare Höhe	=	17° 6′
mittl. Refraction . . = 3′ 5″ Bericht. für Barom. . = + 4″ » » Therm. . = — 2″ } Refr.	=	— 3′ 7″
☾ locale wahre Höhe	=	17° 2′ 53″
(φ′ — φ) · cos Azimuth	=	+ 10′ 42″
☾ locale wahre geocent. Höhe	=	17° 14′
Höhenparallaxe	=	+ 56′ 53″
☾ geocent. wahre Höhe	=	18° 10′ 53″.

§. 129.

Aus zwei in kurzer Zwischenzeit beobachteten Höhen eines Gestirnes, nebst den gleichzeitig notirten Zeiten einer Uhr, für eine zwischenliegende Zeit die entsprechende Höhe zu finden.

Wenn zwei Höhen in einer Zwischenzeit von 5′ bis 10′, oder wenn die erforderliche Genauigkeit geringer ist, von höchstens 15 bis 20 Minuten beobachtet sind, so kann man ohne erheblichen Fehler annehmen, dass die Höhenänderungen den entsprechenden Zeitunterschieden pro-

*) Da auch diese Reduction nur bei Monddistanzen vorkommt, so ist, des schon öfter angeführten Grundes wegen, die locale scheinbare Höhe und die locale wahre geocentrische Höhe auf volle Minuten genommen.

portional sind. Unter dieser Voraussetzung findet man dann die zu einer zwischenliegenden Zeit stattgehabte Höhe nach folgender Vorschrift.

Subtrahire die bei der ersten Höhe von der bei der zweiten Höhe notirten Zeit und nenne den Unterschied ganze Zwischenzeit. Subtrahire ferner die erste Höhe von der zweiten und nenne den Unterschied die ganze Höhenänderung. Endlich subtrahire die zuerst notirte Zeit von der Zeit, für welche man die Höhe finden will, und schliesse dann:

> wie sich ganze Zwischenzeit zur ganzen Höhenänderung verhält, so verhält sich der Zeitunterschied zwischen der ersten Zeit und der Zeit, für welche man die Höhe finden will, zur gesuchten Höhenänderung.

Die algebraische Summe der ersten Höhe und der gefundenen Höhenänderung ist die der gegebenen Zeit entsprechende Höhe. Oder, wenn die erste Höhe die kleinere ist, so addire man die gefundene Höhenänderung; ist aber die erste Höhe die grössere, so subtrahire diese Höhenänderung von derselben, ohne Rücksicht auf die Zeichen. Proportional-Logarithmen erleichtern diese Rechnung.

Beispiel 1. Es ist nachstehende Beobachtung gemacht; wie gross ist demnach die Höhe von ☾ um $4^h\ 9'\ 2''$ nach der Beobachtungsuhr gewesen?

$4^h\ 2'\ 36''$ ☾ $15°\ 55'\ 45''$	$4^h\ 2'\ 36''$			
$4^h\ 15'\ 42''$ ☾ $18°\ 8'\ 10''$	$4^h\ 9'\ 2''$			
$13'\ 6''$: $2°\ 12'\ 15''$	$= 6'\ 26'' : x$			
plg $2°\ 12'\ 25''$	$= 0{,}1333$			
plg $6'\ 26''$	$= 1{,}4468$			
	$1{,}5801$			
plg $13'\ 6''$	$= 1{,}1380$	1ste Höhe	$=$	$15°\ 55'\ 45''$
plg x . . .	$= 4421$,	giebt x . . .	$=$	$1°\ 5'\ 2''$
		Um $4^h\ 9'\ 2''$ ☾	$=$	$17°\ 0'\ 47''$.

Beispiel 2. Es ist nachstehende Beobachtung gemacht; wie gross ist demnach um $2^h\ 51'\ 0''$ die Höhe des Saturn gewesen?

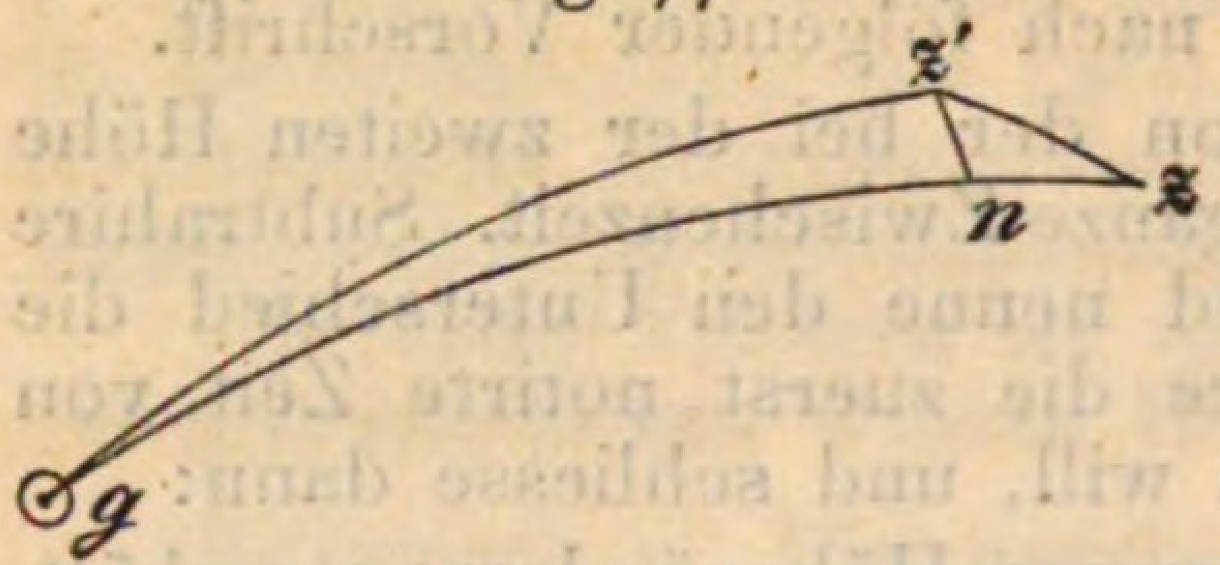
$2^h\ 45'\ 52''$ ♄ $29°\ 14'\ 30''$	$2^h\ 45'\ 52''$			
$2^h\ 55'\ 32''$ ♄ $28°\ 59'\ 0''$	$2^h\ 51'\ 0''$			
$9'\ 40''$: $-\ 15'\ 30''$	$= 5'\ 8'' : x$			
plg $-\ 15'\ 30''$	$= 1{,}0649\,n$			
plg $5'\ 8''$	$= 1{,}5449$			
	$2{,}6098\,n$			
plg $9'\ 40''$	$= 1{,}2700$	1ste Höhe	$=$	$29°\ 14'\ 30''$
plg x	$= 1{,}3398\,n$,	giebt x . . .	$=$	$-\ 8'\ 14''$
		Um $2^h\ 51'\ 0''$ ♄	$=$	$29°\ 6'\ 16''$.

§. 130.

Eine Höhe so zu reduciren, wie dieselbe gleichzeitig an einem nahe gelegenen anderen Orte, dessen Lage gegen den Beobachtungsort der Höhe bekannt ist, gefunden sein würde.

Die Ortsveränderung des Schiffes während der Zwischenzeit zwischen der Beobachtung zweier Höhen eines und desselben oder verschiedener Himmelskörper, welche zu einer Beobachtung gehören, macht es nothwendig, die eine Höhe auf den Beobachtungsort der anderen zu reduciren.

Fig. 77.



Es bezeichne im sphärischen Dreieck gzz' (Fig. 77.) z das Zenith der ersten, z' das der zweiten Beobachtung und g den Ort des beobachteten Gestirnes, so sind gz und gz' zwei Zenithdistanzen, welche gleichzeitig von den Zenithen z und z' (des ersten und zweiten Beobachtungsortes) stattfinden.

Wenn die am ersten Orte beobachtete Höhe mit h bezeichnet wird, so ist $gz = (90^\circ - h)$ bekannt, zz' in Minuten ist gleich der gesegelten Distanz D in Seemeilen, und der Winkel gzz' ist = dem ebenen Winkel auf der Windrose des Compasses, welchen die Curslinie mit der Peilungslinie der Sonne bildet, welcher Winkel Reductionswinkel genannt wird und als bekannt anzusehen ist, wenn man ausser der Bestimmung des Curses nach dem Compasse von dem ersten Orte nach dem zweiten noch die Sonne mit demselben Compasse entweder kurz vor oder nach der ersten Höhenbeobachtung gepeilt hat.

Im sphärischen Dreieck gzz' ist die Seite $z'g = 90^\circ - h'$, wenn h' die am zweiten Beobachtungsorte gleichzeitig mit h am ersten stattfindende Höhe bezeichnet.

Dieses Dreieck liefert die Gleichung

$$\cos gz' = \cos gz \cdot \cos zz' + \sin gz \cdot \sin zz' \cdot \cos \angle gzz',$$

oder

$$\sin h' = \sin h \cdot \cos D + \cos h \cdot \sin D \cdot \cos \text{Red} \angle \quad (1).$$

Setzt man $h' - h = d$, so ist $h' = h + d$,

also

$$\sin h' = \sin (h + d) = \sin h \cdot \cos d + \cos h \cdot \sin d,$$

folglich geht (1) über in

$$\sin h \cdot \cos d + \cos h \cdot \sin d = \sin h \cdot \cos D + \cos h \cdot \sin D \cdot \cos \text{Red} \angle \quad (2),$$

da d und D in der Wirklichkeit kleine Grössen sind, und dann mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\sin d = d \cdot \sin 1'$$

$$\cos d = 1 - \frac{d^2}{2} \cdot \sin^2 1' \text{ ist,}$$

so geht (2) hiernach über in

$$\sin h - \frac{d^2}{2} \cdot \sin^2 1' \cdot \sin h + d \cdot \sin 1' \cdot \cos h$$

$$= \sin h - \frac{D^2}{2} \cdot \sin^2 1' \cdot \sin h + D \cdot \sin 1' \cdot \cos h \cdot \cos \text{Red} \angle.$$

Streicht man in dieser Gleichung $\sin h$ gegen $\sin h$ fort und dividirt sie demnächst mit $\sin 1' \cdot \cos h$, so liefert sie

$$-\frac{d^2}{2} \cdot \sin 1' \cdot \text{tang}\, h + d = -\frac{D^2}{2} \cdot \sin 1' \cdot \text{tang}\, h + D \cdot \cos \text{Red} \angle,$$

oder

$$d = D \cdot \cos \text{Red} \angle - \frac{D^2}{2} \cdot \sin 1' \cdot \text{tg}\, h + \frac{d^2}{2} \cdot \sin 1' \cdot \text{tg}\, h,$$

und wenn man für d^2 dessen Näherungswerth $D^2 \cdot \cos^2 \text{Red} \angle$ setzt,

ergiebt sich

$$d = D \cdot \cos \text{Red} \angle - \frac{D^2}{2} \cdot \sin 1' \cdot \text{tg}\, h (1 - \cos^2 \text{Red} \angle),$$

$$= D \cdot \cos \text{Red} \angle - \frac{D^2}{2} \cdot \sin 1' \cdot \text{tg}\, h \cdot \sin^2 \text{Rd} \angle \quad (3).$$

Wenn $D = 30'$, $h = 75°$ und der Reductionswinkel $90°$ ist, so beträgt $\frac{D^2}{2} \cdot \sin 1' \cdot \text{tang}\, h \cdot \sin^2 \text{Red} \angle$ nahe 0,5 Minuten, woraus sich ergiebt, dass, wenn $D < 30'$ und $h < 75°$ ist, man bei nautisch astronomischen Berechnungen ohne erheblichen Fehler setzen kann

$$d = D \cdot \cos \text{Red} \angle \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).^{*)}$$

d ist positiv, wenn der Red $\angle$ spitz, und negativ, wenn derselbe stumpf ist, und h' ist gleich der algebraischen Summe von h und d.

Ferner ist in den speciellen Fällen

1. wenn der Red $\angle = 0$ ist, $d = D$,
2. » » » $= 90°$ » $d = o$,
3. » » » $= 180°$ » $d = -D$.

Regel. Die an einem Orte gemessene Höhe eines Gestirnes so zu reduciren, als wenn dieselbe gleichzeitig an einem anderen Orte beobachtet wäre, dessen Richtung und Entfernung vom ersten Orte bekannt und übrigens nicht gross ist.

a. Wenn man die erste Höhe auf den Ort der zweiten Beobachtung reduciren will.

1. Man nehme die Differenz zwischen der Peilung des Himmelskörpers bei der ersten Beobachtung und dem von der ersten bis zur zweiten Beobachtung gesegelten missweisenden General-Curs, und nenne diesen Winkel den Reductionswinkel.

2. Mit dem Reductionswinkel und der in der Zwischenzeit gesegelten General-Distanz in Seemeilen ausgedrückt, als Hypotenuse genommen, gehe in die Strich- oder Gradtafel, so ist die dem Complement des Reductionswinkels gegenüberstehende Kathete die auf die erste Höhe anzubringende Berichtigung für Segelung in Minuten.

3. Addire die Höhenänderung wegen Segelung zu der wahren ersten Höhe, wenn der Reductionswinkel spitz ist, und subtrahire jene, wenn der Reductionswinkel stumpf ist.

Ist der Reductionswinkel $= 90°$, so ist die Höhenänderung wegen Segelung $= 0$, ist derselbe aber 0 oder $180°$, so wird sie gleich der gesegelten General-Distanz; im ersten Falle $+$ im andern aber $-$.

b. Die zweite Höhe auf den Ort der ersten Beobachtung zu reduciren.

Man nehme die Differenz zwischen der Peilung des Gestirnes bei der zweiten Beobachtung und dem entgegengesetzten gesegelten missweisenden General-Curse (von dem Orte der ersten Höhe nach dem der zweiten) als Reductionswinkel; finde dafür die Höhenänderung wegen Segelung nach der unter a. 2. gegebenen Vorschrift und wende dieselbe mit $+$ auf die wahre zweite Höhe an, wenn der Reductionswinkel spitz, mit $-$, wenn derselbe stumpf ist.

Anmerkung. Dass man den Reductionswinkel auch ermitteln kann, wenn man das wahre Azimuth des Himmelskörpers durch Rechnung findet und mit dem gesegelten rechtweisenden General-Curse vergleicht, versteht sich von selbst; der Leichtigkeit wegen wird aber gewöhnlich das Azimuth durch Peilen mittelst des Compasses bestimmt.

*) Wenn man in Fig. 77. $gn = gz'$ macht und das dadurch entstehende kleine Dreieck nzz' als ein ebenes, bei n rechtwinkliges Dreieck betrachtet, so ergiebt sich aus demselben $nz = zz' \cdot \cos \angle z$, oder $d = D \cdot \cos \text{Red} \angle$.

Ist der Reductionswinkel stumpf, so geht man mit dem Supplement desselben in die Gradtafel.

Beispiel 1. Mai den 20. abgelesene Höhe = 36° 10', ⴲ SOzS, bis zur zweiten Beobachtung gesegelter missweisender Curs $S\frac{1}{4}O$, Distanz 15 Seemeilen; man soll die erste Höhe auf den Ort der zweiten reduciren. Augeshöhe 10 Fuss Rheinl.; I. C. = + 2'.

⊙			= 36° 10'
I. C.	+ 2'	} — 1',1	
Kimmtiefe	— 3',1		
⊙ scheinbare Höhe . . .			= 36° 8',9
Refr. — P. . =	— 1',2	} + 14',6	
Halbmesser . . .	+ 15',8		
⊖ w. Höhe			= 36° 23',5
Höhenänd. weg. Segl. . .			= + 12',9
⊖ reduc. w. Höhe . . .			= 36° 36',4.

ⴲ SOzS.
$S\frac{1}{4}O$ = mw. Curs.
Red. ∠ = $2\frac{3}{4}$ Strich, giebt mit 15 Seem. als Hypotenuse in der Strichtafel die dem Complement von $2\frac{3}{4}$ Strich gegenüberstehende, also die grösste Kathete = + 12',9.

Beispiel 2. ⊖ wahre Höhe = 40° 20',3, ⴲ S 15° W, gesegelter missweisender Curs N 33° W; Distanz 8,3 Seemeilen; man soll die erste Höhe auf den zweiten Beobachtungsort reduciren.

⊖ wahre Höhe	= 40° 20',3
Höhenänd. weg. Segl. . .	= — 5',6
⊖ reduc. wahre Höhe . .	= 40° 14',7.

ⴲ S 15° W.
S 147° W = mw. Curs.
Red. ∠ = 132°; Supplement des Red. ∠ = 48°, womit man in der Gradtafel für 8,3 Seem. Distanz die dem Complement von 48° gegenüberstehende Kathete, also die kleinste Kathete = — 5',6 findet.

Beispiel 3. Gesteuert von der ersten bis zur zweiten Beobachtung 1^h 36' WzN, Wind SWzS, Abtrift $\frac{1}{4}$ Strich; Fahrt in der ersten Stunde 6,8 Seemeilen, in der zweiten 7,2 Seemeilen; ✻ wahre Höhe = 20° 13'; Stern gepeilt $SWzW\frac{1}{2}W$; man soll die Höhe auf den Ort der ersten Beobachtung reduciren.

Gesteuerter missweisender Curs WzN über Steuerbord.
Abtrift = $\frac{1}{4}$ Strich,
gesegelter missweisender Curs $WNW\frac{1}{4}W$; also entgegengesetzter missweisender Curs $OSO\frac{1}{4}O$ = S $6\frac{3}{4}$ Strich Ost.
Stern gepeilt $SWzW\frac{1}{2}W$ = S $5\frac{1}{2}$ » West.
Reductionswinkel = $12\frac{1}{4}$ Str.; Suppl. d. Red. ∠ = $3\frac{3}{4}$ Str.
Gesegelte Distanz in der ersten Stunde = 6,8 Seem.
» » für 36' in der zweiten Stunde . = 4,3 Seem.
Gesegelte Distanz in 1,6 Stunden = 11,1 Seem.

Auf $3\frac{3}{4}$ Strich und für 11,1 Seem. findet man die grosse Kathete, hier Höhenänderung wegen Segelung = — 8',2.

✻ wahre Höhe	= 20° 13'
Höhenänderung weg. Segelung	= — 8',2
✻ reducirte wahre Höhe . . .	= 20° 4',8.

Beispiel 4. Finde die Höhenänderung wegen Segelung auf die zweite Höhe, wenn das Gestirn bei der zweiten Höhe NzO gepeilt, der gesegelte

missweisende Curs zwischen der ersten und zweiten Beobachtung SO und die Distanz = 2,3 Seemeilen war.

Himmelskörper gepeilt N 1 Strich Ost.
Entgegengesetzter missweisender Curs N 4 » West.
Reductionswinkel = 5 Strich; giebt in der Strichtafel mit 2,3 Seemeilen Distanz die Höhenänderung = + 1',3.

Beispiel 5. Um $10^h\ 50'$ ⊖ wahre Höhe = $30^\circ\ 40'$; ⌽ SSO; gesegelt bis $11^h\ 50'$ missweisend SSO 5,8 Seemeilen; man soll die um $10^h\ 50'$ gefundene wahre Höhe auf den letzten Ort des Schiffes reduciren.

⌽ SSO = S 2 Strich Ost.
Gesegelter missweisender Curs = S 2 » Ost.
Reductionswinkel = 0; folglich die Höhenänderung = + 5',8.

§. 131.

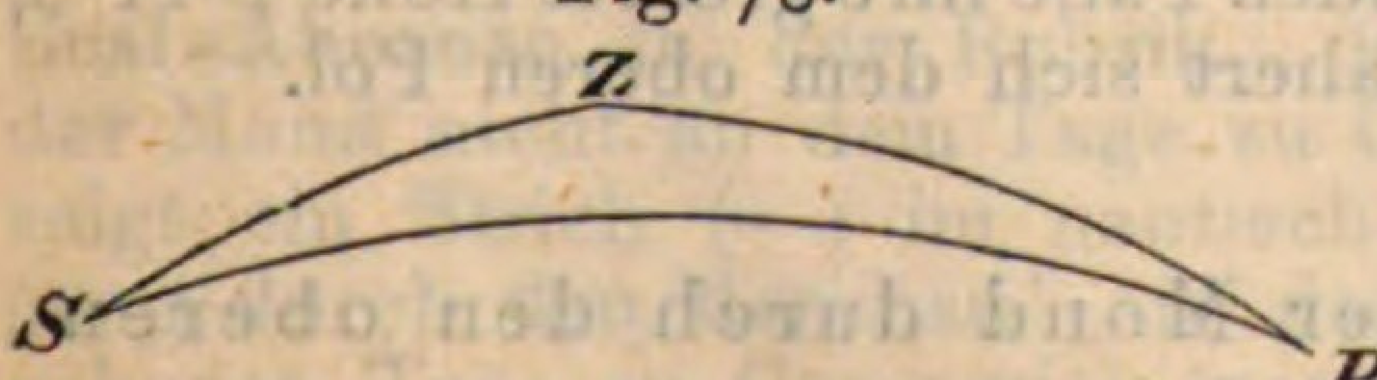
Die Culminationszeit der Gestirne zu finden, wenn das Datum gegeben und die Länge des Ortes bekannt ist.

A. Culminationszeit der Sonne.

Der Mittelpunkt der Sonne geht durch den oberen Meridian eines jeden Ortes auf der Erde um 12 Uhr wahre Zeit Mittags, und durch den unteren um 12 Uhr wahre Zeit Nachts. Im ersten Falle ist sie in ihrer oberen, im letzten in ihrer unteren Culmination. Versteht man aber auch unter Culminiren den höchsten Punkt über dem Horizonte erreichen, so weicht die Culmination von dem Meridiandurchgange mehr oder weniger ab, je nachdem die Declination des Gestirns mehr oder weniger verändert.

Es bezeichne nämlich t die Differenz zwischen dem Zeitpunkte des Meridiandurchgangs und dem Augenblicke, in welchem ein Himmelskörper, dessen Declination veränderlich ist, den höchsten Punkt über dem Horizonte (die grösste Höhe) erreicht, h sei die grösste Höhe; $h' = h''$ kleinere Höhen, wovon erstere kurz vor und letztere kurz nach h stattgehabt hat, p bezeichne die Poldistanz, welche im Augenblicke der grössten Höhe, also zur Zeit des Meridiandurchgangs $\pm t$ statthatte, Δp und Δt kleine Veränderungen in p und t; so ist, wenn im sphärischen Dreieck ZPS (Fig. 78.) Z das Zenith, P den oberen Pol und S den Ort eines Gestirns bei seiner grössten Höhe bezeichnet, $ZS = 90^\circ - h$, $SP = p$ und $ZP = 90^\circ - \varphi$.

Fig. 78.



Zufolge der sphärischen Trigonometrie ist

$$\sin h = \cos p \cdot \sin \varphi + \sin p \cdot \cos \varphi \cdot \cos t,$$

mithin auch, wenn das Gestirn sich dem oberen Pol nähert

$$\sin h' = \cos(p + \Delta p) \cdot \sin \varphi + \sin(p + \Delta p) \cdot \cos \varphi \cdot \cos(t - \Delta t) \text{ und}$$
$$\sin h'' = \cos(p - \Delta p) \cdot \sin \varphi + \sin(p - \Delta p) \cdot \cos \varphi \cdot \cos(t + \Delta t).$$

Subtrahirt man die vorletzte dieser Gleichungen von der letzten und setzt

$\sin p \mp \cos p \cdot \Delta p$ für $\sin (p \mp \Delta p)$
$\cos p \pm \sin p \cdot \Delta p$ für $\cos (p \mp \Delta p)$
$\cos t \pm \sin t \cdot \Delta t$ für $\cos (t \mp \Delta t)$, weil

$\cos \Delta p$ sowie $\cos \Delta t = 1$ und für $\sin \Delta p$ nebst $\sin \Delta t$ auch Δp und Δt gesetzt werden kann, so ergiebt sich:

$$0 = 2 \sin \varphi \sin p \cdot \Delta p - 2 \cos \varphi (\cos p \cdot \Delta p \cdot \cos t + \sin p \sin t \cdot \Delta t)$$

und wenn man, da t eine kleine Grösse ist, $\cos t = 1$ und $\sin t = t$ setzt, dann die Klammer auflöst, demnächst die Gleichung mit $2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin p \cdot \Delta t$ dividirt, so erhält man

$$0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta p}{\Delta t} - \frac{\operatorname{cotg} p \cdot \Delta p}{\Delta t} - t,$$

folglich

$$t = \frac{\Delta p}{\Delta t} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{cotg} p) = \frac{\Delta \delta}{\Delta t} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta) \text{ } (1),$$

worin δ die Declination, welche p entspricht und $\Delta \delta = \Delta p$ ist. Bezeichnet man die Declinationsänderung in der Zeitminute, wenn der Himmelskörper durch den Meridian geht, mit d, so findet man, wenn t in Bogensecunden ausgedrückt ist, $\Delta \delta = \frac{d \cdot \Delta t}{60 \cdot 15}$. Substituirt man ausserdem in (1) $\frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta}$ für $\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta$ und dividirt mit $15 \cdot \sin 1''$, um t in Zeitsecunden zu erhalten, so ergiebt sich:

$$t = \frac{d \cdot \sin (\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta \cdot 13500 \cdot \sin 1''} \text{ } (2).$$

Hiernach kann t gefunden werden, und ist am grössten, wenn die Declination möglichst stark ändert, welches bei der Sonne stattfindet, wenn dieselbe sich nahe den Aequinoctialpunkten befindet; wenn ferner die Breite möglichst gross und die Declination klein ist.

Beispiel 1. Die Breite sei 78° N., die Declination 0° 50′ Süd und abnehmend, die Veränderung derselben in einer Minute = 0″,99; man soll t finden.

lg 0″,99	= 0,99564 — 1
$\varphi - \delta$ = 78° 50′ lg sin	= 9,99170 — 10
lg sec 78°	= 0,68212
lg sec 0° 50′	= 0,00005
c lg 13500	= 5.86967 — 10
c lg sin 1″	= 5,31443
lg *t* .	= 1,85361, giebt t = 1′ 11″,4.

Die Sonne erreicht also im vorstehenden Falle ihre grösste Höhe 1′ 11″,4 nach dem wahren Mittage; denn sie nähert sich dem oberen Pol.

B. Die Zeit zu finden, wenn der Mond durch den oberen Meridian geht.

Erste Lösung. Man nehme aus dem Nautical-Almanac (Seite 4) oder aus dem nautischen Jahrbuche (Seite 2 des gegebenen Monats) die Culminationszeit des Mondes für das gegebene astronomische Datum und für den nächstvorhergehenden oder nächstfolgenden Tag, je nachdem die Länge des Ortes von Greenwich östlich oder westlich ist, und schliesse dann:

Wie 360° sich zur Länge des Ortes oder auch wie 24^h sich zur Länge des Ortes in Zeit verhalten, so verhält sich der Unterschied beider aus der Ephemeride entnommenen Culminationszeiten zu einer Correction, welche von der aus der Ephemeride für den gegebenen Tag entnommenen Culminationszeit abgezogen, oder zu derselben addirt — je nachdem die Länge östlich oder westlich — die gesuchte obere Culminationszeit am Orte in mittlerer astronomischer Zeit giebt.

Anmerkung. Wenn das bürgerliche Datum gegeben ist, ohne dass man weiss, ob die Zeit zwischen Mittag und Mitternacht oder nach Mitternacht fällt, so kann man ohne Weiteres nicht wissen, welcher Tag nach astronomischer Rechnung ist. Man kann sich in diesem Falle zur Regel machen, erst das gegebene bürgerliche Datum als das astronomische Datum anzusehen und dafür die Culminationszeit zu suchen.

Ist die so gefundene Culminationszeit grösser als 12^h, so zeigt dieses an, dass die bürgerliche Zeit nach Mitternacht, mithin das bürgerliche Datum gegen das astronomische um einen Tag voraus war; man muss dann die Rechnung wiederholen, indem man das gegebene bürgerliche Datum um 1 verkleinert. In den meisten Fällen wird man es aber, ohne die Rechnung für das gegebene bürgerliche Datum erst auszuführen, schon aus den in der Ephemeride gegebenen Culminationszeiten sehen können, ob die gesuchte Culminationszeit grösser als 12^h wird. Dieses ist in der Regel immer der Fall, wenn die Culminationszeit für das gegebene bürgerliche Datum in der Ephemeride schon grösser als 12^h ist; es müsste denn sein, dass dieselbe 12^h weniger überstiege, als die davon zu subtrahirende Correction für östliche Länge beträgt.

Auch kann es treffen, dass die in der Ephemeride für das gegebene bürgerliche Datum (als das astronomische genommen) gefundene Culminationszeit kleiner als 12^h ist, und dass man doch das gegebene bürgerliche Datum um 1 verkleinern muss, welches nämlich der Fall sein würde, wenn die für das gegebene Datum in der Ephemeride enthaltene Zeit der Culmination + der für Westlänge zu addirenden Correction mehr als 12^h beträgt.

Es kann endlich auch der Fall eintreten, dass, wenn man das gegebene bürgerliche Datum unverändert als das astronomische Datum nimmt, die dafür gefundene Culminationszeit über 12^h fällt, und wenn man für denselben Fall das gegebene bürgerliche Datum um 1 verkleinert, so dass die dafür gefundene Culmination vor 12^h fällt, also erstere 1 Tag zu spät und leztere 1 Tag zu früh, welches anzeigt, dass an dem Tage nach bürgerlicher Zeitrechnung kein Durchgang des Mondes durch den oberen Meridian stattfindet.

Anmerkung 2. Wenn das Zeichen der Conjunction (☌) im Nautical-Almanac in der Rubrik „☾ Meridianpassage" steht, so culminirt der Mond nicht an dem Tage zu Greenwich im oberen Meridian. Ebenso zeigt ein Strich (—) im nautischen Jahrbuche in der Rubrik „Durchgang durch den Meridian" an, dass keine obere Culmination an dem gegebenen Tage zu Greenwich stattfindet. Wenn aber auch der Mond an einem Tage nicht durch den Meridian des Ortes der Ephemeride geht, so kann er doch an demselben Tage durch den Meridian eines östlicher liegenden Ortes gehen, und man muss, um dieses zu ermitteln, von dem zunächst nach der Conjunction folgenden Tage rückwärts interpoliren. Wenn dann die gefundene Culminationszeit des Mondes innerhalb der Grenzen des gegebenen Tages liegt, so geht der Mond an demselben Tage durch den Meridian des Ortes.

Da der Mond zwischen zwei nächsten Culminationen jedenfalls nur einen Bogen von $360^\circ = 24^h$ durchlaufen hat, so ist das erste Glied der aufzulösenden Proportion immer 24^h.

Beispiel 1. 1848 den 28. August auf 135° 45′ WL. von Greenwich soll die mittlere Zeit der oberen Culmination des Mondes gefunden werden.

Nautical-Alm. den 27. August, ☾ Culmin.. .		$= 23^h\ 44',7$	
» » 29. » »		$= 0^h\ 31',8$	(für den 28sten steht das Zeichen der Conjunction.)
$24^h : 9^h\ 3'$		$= 47',1 : x$	
8^h	3	$15',7$	
1	8	$2',0$	
$3'$	20	$0',1$	
		$x = +\ 17',8$	

☾ Meridiandurchgang den 27sten $= 24^h\ 2',5 = 0^h\ 2',5$ d. 28sten mittl. Zeit Nachmittags.

Beispiel 2. Wann culminirt der Mond 1853 den 11. Januar in 60° 30′ OL. von Greenwich?

N. d. naut. Jahrb. den 11. Jan. ☾ Culmin. .		$= 1^h\ 54',6$
» » » » » 10. » »		$= 0^h\ 58',8$
$24^h : 4^h\ 2'$		$= 55',8 : x$
4^h	6	$9',3$
$2'$	120	$0',1$
		$x = -\ 9',4$

☾ Culmination . $= 1^h\ 45',2$ mittl. Zeit Nachm. d. 11. Jan.

Zweite Lösung, die Zeit der oberen Culmination des Mondes zu finden. Wenn ein Gestirn im oberen Meridian ist, so ist die Rectascension desselben gleich der Sternzeit. Man hat also aus der Sternzeit, welche gleich der Rectascension des Gestirns zur Zeit der Culmination ist, die mittlere Zeit zu suchen (§. 109.); diese ist die gesuchte Zeit der Culmination.

Um die Rectascension des Mondes zur Zeit seiner Culmination finden zu können, muss man diese aber schon kennen, dieselbe daher erst nach der vorigen Regel suchen.

Es ergiebt sich hieraus folgende Regel: Suche die ungefähre Zeit der Culmination des Mondes nach der vorigen Regel, hierzu die entsprechende Greenwicher Zeit (§. 102.) und finde dafür die Rectascension des Mondes (§. 103.); diese setze gleich der Sternzeit des Ortes und finde dafür die entsprechende mittlere Zeit (§. 109.)*).

Beispiel 3. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 1., also die Culminationszeit des Mondes $= 0^h\ 2',5$ mittlere Zeit den 28. August 1848; es soll die genaue Culminationszeit gefunden werden.

*) Die grösste Veränderung der ☾ AR. ist = 2′ 55″ in Zeit in einer Stunde (§. 103.) und wenn man annimmt, dass man durch einfache Interpolation nach der ersten Regel die ungefähre Culminationszeit des Mondes auf 0,3 Minuten genau findet, so würde nach dieser genauern Lösung noch ein Fehler von nahe 0,9 Secunden stattfinden können.

Ungefähre mittlere Zeit = $0^h\,2',5$ den 28sten.
Westlänge in Zeit = $+\,9^h\,3'$
Ungef. mittl. Greenwicher Zeit = $9^h\,5',5$ den 28. August Abends.
N. A. den 28. August um 9^h ☾ AR. = $10^h\,31'\,19'',2$
» » » » » 10^h » = $10^h\,33'\,23'',4$

$$60' : 5',5 = 2'\,4'',2 : x$$

5'	12	10'',4
0,5	10	1'',0

$x = +\,11'',4$

☾ berichtigte AR. = $10^h\,31'\,30'',6$ = ✱ Zeit des Ortes.
N. A. den 28sten ✱ Zt. im mittl. Mittage zu Greenwich = $10^h\,26'\,19'',2$
Acceleration für 9^h = $1'\,28'',7$
» » $3'$ = $0'',5$
✱ Zt. f. d. mittl. Mittag d. Ortes = $10^h\,28'\,48'',4$
Seit d. mittl. Mittage verfloss. ✱ Zt. = $0^h\,2'\,42'',2$
Retardation für . . . $2' = 0'',3$ } $-\,0'',3$
» » . . $42'',4 = 0'',0$ }
Genaue Culminationszt. d. 28. Aug. = $0^h\,2'\,41'',9$ mittl. Zeit Nachm.

Anmerkung. Versteht man unter Culminiren auch das Erreichen der grössten Höhe, so weicht beim Monde die Zeit des Meridiandurchganges von der Zeit der grössten Höhe oft mehrere Minuten ab. Die grösste Veränderung der Declination des Mondes beträgt (§. 103.) 17' in einer Stunde, folglich 17'' in einer Minute. Wenn man annimmt, dass diese Declinationsänderung bei 1° südlicher Declination statthat und man für 78° NBr. jenen Unterschied haben will, so würde man nach Formel (2) nachstehende Rechnung zu machen haben:

log 17''	= 1,23045
» sin (φ — δ)	= 9.99195 — 10
» sec 78°	= 0,68212
» sec 1° 0'	= 0,00007
c log 13500	= 5,86967 — 10
c log sin 1''	= 5.31443
log t	= 3,08869, mithin t = 1226'',6 = 20' 26'',6.

Folglich erreicht der Mond seine grösste Höhe schon 20' 26'',6 vor oder nach seinem Durchgange durch den oberen Meridian.

Auf 60° Breite und bei 0° 0' Declination würde dieser Unterschied bei derselben Veränderung der Declination aber nur ungefähr 7,5 Minuten betragen; auf 50° Breite noch 5,2 und auf 40° Breite nur noch ungefähr 3,6 Minuten, woraus man sieht, dass diese Differenz der Zeit zwischen dem Meridiandurchgange und der grössten Höhe mit der Breite schnell abnimmt.

Im §. 169. wird gezeigt werden, wie man diesen Unterschied leichter vermittelst der Culminationssecunden berechnen kann.

C. Die ungefähre und genaue Zeit zu finden, wenn der Mond durch den unteren Meridian eines Ortes geht, dessen Länge und Datum bekannt ist.

1. Die ungefähre Culminationszeit zu finden.

Finde nach der unter B. gegebenen ersten Regel die Zeit der oberen Culmination und addire dazu den halben Mondtag (die halbe Zeit,

welche der Mond von einer oberen Culmination bis zur andern braucht), wenn die dadurch entstehende Summe nicht die Grenze des gegebenen Tages überschreitet; ist dieses aber der Fall, so subtrahire den halben Mondtag, wenn wieder hierdurch nicht die Grenze des gegebenen Tages überschritten wird; die so gefundene Zeit ist die Zeit der unteren Culmination. Geht beides, die gedachte Summe und die Differenz, über die Grenze des Tages hinaus, so findet an dem Tage keine untere Culmination statt.

Den halben Mondtag findet man, wenn derselbe zu addiren ist, gleich dem halben Unterschiede zwischen der oberen Culminationszeit des Tages und des nächstfolgenden Tages; ist derselbe aber zu subtrahiren, so muss man die halbe Differenz zwischen der oberen Culmination des gegebenen und nächstvorhergehenden Tages nehmen.

2. Die genaue Zeit der unteren Culmination des Mondes zu finden.

Regel. Für die ungefähre Zeit der unteren Culmination suche die Rectascension des Mondes (§. 103.); diese ist gleich der AR. des unteren Meridians zur Zeit der unteren Culmination; hierzu addire 12^h, so ergiebt sich die AR. des oberen Meridians gleich der Sternzeit, welche stattfindet, wenn der Mond durch den unteren Meridian geht; diese verwandle in mittlere Zeit, so hat man die genaue Zeit der gesuchten unteren Culmination.

Beispiel 4. 1851 den 12. Januar (bürgerliche Zeit) auf 30° 45′ OL. von Greenwich soll man die Zeit der unteren Culmination des Mondes finden.

N. A. d. 12. Jan. ☾ Culmin. $= 7^h\,38',6$ } $47',7 : 2 = 23',9$; mithin $12^h\,23',9$
» » 11. » » $= 6^h\,50',9$ } gleich dem halben Mondtage.

$24^h : 2^h\,3'$ $= 47',7 : x$

2^h	12	$4',0$
$3'$	40	$0',1$

$x = -4',1$

☾ obere Culmination den 12. Jan. $= 7^h\,34',5$ mittl. Zt. Ab.
halber Mondtag $= 12^h\,23',9$
☾ ungef. untere Culmination den 11. Jan. . . $= 19^h\,10',6$ mittl. Zeit
OL. in Zeit . $= -\ 2^h\ 3'$
ungef. Greenw. mittl. Zt. d. u. Culm. d. 11. Jan. $= 17^h\ 7',6$
☾ AR. $= 2^h\,34'\,40'',7$ zur Zeit d. unt. Culm. $=$ AR. des unt. Merid.
12^h
$14^h\,34'\,40'',7 =$ M. AR. $=$ ✻ Zeit zur Zeit der unt. Culm.

N. A. den 11. Januar ✻ Zeit im mittl. Mittag zu Greenw. $= 19^h\,21'\,35'',4$
Acceleration für $2^h = 19'',7$ }
» » $3' = 0'',5$ } $-\ 20'',2$

✻ Zeit für den mittl. Mittag des Ortes den 11. Jan. $= 19^h\,21'\,15'',2$
✻ Zeit zur Zeit der unteren Culmination $= 14^h\,34'\,40'',7$
Seit dem mittleren Mittage des 11. verflossene ✻ Zeit . . $= 19^h\,13'\,25'',5$
Retardation für $19^h = 3'\,6'',8$ }
» » $13' = 2'',1$ } $-\ 3'\ 9'',0$
» » $25'',5 = 0'',1$ }

☾ genaue Culmination den 11. Januar nach mittlerer Zeit $= 19^h\,10'\,16'',5$
$=$ dem 12. Januar um $7^h\,10'\,16'',5$ Morgens.

D. Die Zeit der oberen Culmination eines Planeten zu finden, wenn das Datum gegeben und die Länge des Ortes bekannt ist.

Regel. Finde zu dem gegebenen bürgerlichen Datum das entsprechende astronomische Datum (§. 101.), nimm für dieses aus dem N. A. oder dem nautischen Jahrbuche die Culminationszeit des Planeten, sowie auch die in östlicher Länge für den vorhergehenden und bei westlicher Länge für den folgenden Tag, und verfahre ferner nach der zur Ermittelung der Culmination des Mondes unter B. gegebenen Regel.

Hierbei ist zu bemerken, dass man die gefundene Correction bei östlicher Länge und zunehmenden Culminationszeiten von der Culminationszeit des gegebenen Tages subtrahiren, bei westlicher Länge addiren muss.

Nehmen die Culminationszeiten ab, so muss die Correction, welche für die Länge gefunden ist, bei östlicher Länge addirt, bei westlicher Länge subtrahirt werden.

Will man die Zeit der Culmination genau haben, so nehme man die nach der vorstehenden Regel gefundene Culminationszeit als die ungefähre an und suche dafür AR. des Planeten (§. 103.), welche gleich der Sternzeit im Augenblicke der Culmination ist; diese in mittlere Zeit verwandelt (§. 109.), giebt die genaue Zeit der oberen Culmination.

Beispiel 1. Wann ist 1851 den 5. Januar (bürgerliche Zeit) die Venus im oberen Meridian an einem Orte, der auf 90° WL. von Greenwich liegt?

N. A. den 4. Januar ♀ Meridiandurchgang $= 22^h\ 7',2$
den 5. » » $= 22^h\ 3',3$

$24^h : 6^h$ $= 0^h\ 3',9 : x$

$6^h \,|\, 4$ $x = -\ 1'$

♀ ist im oberen Meridian ungefähr um . . $22^h\ 6',2$ mittl. Zeit den 4. Jan.
WL. in Zeit $+\ 6^h$

Ungef. Greenw. m. Zt. d. o. Culm. d. 5. Jan. $= 4^h\ 6'$

N. A. den 5. Januar ♀ AR. $= 17^h\ 4'\ 47'',0$
den 6. » ♀ AR. $= 17^h\ 4'\ 48'',6$

$24^h : 4^h\ 6'$ $= 1'',6 : x$

$4^h \,|\, 6$. $0'',3$
$6' \,|\, 40$. $0'',0$

$x = +\ 0''.3$

♀ AR. zur Zeit der oberen Culmination $= 17^h\ 4'\ 47'',3$
N. A. den 4. Januar ✻ Zeit im mittl. Mittage $= 18^h\ 53'\ 59'',5$
Acceleration für 6^h . . . $= +\ 59'',1$

✻ Zeit im mittl. Mitt. d. 4. Jan. in 90° WL. $= 18^h\ 54'\ 58'',6$
Seit dem mittl. Mitt. d. 4. Jan. verfl. ✻ Zeit $= 22^h\ 9'\ 48''.7$

Retardation für $22^h = 3'\ 36'',25$
» » $9' = 1'',47$
» » $48'',7 = 0'',13$
(zusammen) $-\ 3'\ 37'',9$

♀ genau im oberen Meridian den 4. Januar $22^h\ 6'\ 10''.8$ astr. mittl. Zeit
$=$ dem 5. Januar $10^h\ 6'\ 10'',8$ mittlere Zeit Morgens.

E. Die Zeit zu finden, wenn ein Planet durch den unteren Meridian geht.

Finde nach der (unter D.) zur Ermittelung der oberen Culmination eines Planeten gegebenen Regel die Zeit der ungefähren oberen Culmination, und addire dazu, oder subtrahire davon den halben Planetentag, je nachdem die Summe oder die Differenz nicht die Grenze des gegebenen Tages überschreitet; so ist die gefundene Zeit die Zeit der unteren Culmination. Wird durch das Addiren sowohl wie durch das Subtrahiren, oder weder durch Addiren noch durch Subtrahiren des halben Planetentages die Grenze des gegebenen Tages überschritten, so findet im ersten Falle kein Durchgang, im letzten Falle aber finden zwei Durchgänge durch den unteren Meridian statt.

Der von der Zeit der oberen Culmination zu subtrahirende halbe Planetentag ist gleich $12^h \pm$ der halben Differenz zwischen der Culminationszeit des gegebenen und des nächstvorhergehenden Tages, je nachdem die Zeit der Culmination zu- oder abnimmt. Der zu der oberen Culminationszeit zu addirende halbe Planetentag dagegen ist gleich 12^h $\pm$ der halben Differenz der Culminationen des gegebenen und folgenden Tages, je nachdem die Culminationszeit zu- oder abnimmt.

Will man die genaue untere Culminationszeit finden, so nimmt man die nach vorstehender Regel gefundene als die ungefähre Culminationszeit an, sucht dafür AR. des Planeten (§. 103.) und addirt dazu 12^h, so erhält man AR. des oberen Meridians, welche gleich der Sternzeit zur Zeit der unteren Culmination ist, die in mittlere Zeit verwandelt (§. 109.) die genaue mittlere Zeit der unteren Culmination giebt.

Beispiel 1. 1848 den 4. Nov. (bürgerliche Zeit) auf 82° 30' OL. von Greenwich soll man finden, wann der Planet Jupiter im unteren Meridian ist.

Weil die Culminationszeit über 12^h fällt, so ist das gegebene Datum der 3. November astronomische Zeit.

N. A. d. 3. Novbr. ♃ Culmin. . . = 18^h 38',8 Grw. mittl. Zeit,
» 2. » » » . . . = 18^h 42',3 » » »

24^h : 5^h 30' = 3',5 : x

6^h	4	0',9
— 30'	— 12	— 0',1

x = + 0',8

♃ im oberen Merid. in 82°,5 OL. um 18^h 39',6 ast. mittl. Zt. d. 3. Nov.
♃ Culm. d. 4. Novbr. = 18^h 35',3
» » » 3. » = 18^h 38',8

3',5 : 2 = 1',8
mithin 12^h — 1',8 = 11^h 58',2 = ½ Planetentag.

♃ ungefähre untere Culmin. um 6^h 37',8 m. Zt. Abds. d. 4. Nov.
OL. in Zeit = — 5^h 30'

Ungef. Greenw. mittl. Zt. d. u. Cul. = 1^h 7',8 d. 4. Novbr.

N. A. d. 4. Novbr. ♃ AR. . . = 9^h 33' 25",7
» » 5. » ♃ AR. . . = 9^h 33' 49",6

24^h : 1^h 7',8 = 23",9 : x

1^h	24	1",0
6'	10	0",1
2	3	

x = . . . + 1",1

♃ AR. zur Zt. d. unteren Culm. = 9^h 33' 26",8
12^h

✱ Zeit zur Zt. d. » » = 21^h 33' 26",8

N. A. ✳ Zeit d. 4. Novbr. =	$14^h\ 55'\ 24'',7$
Acceleration für 5^h =	$-\ 49'',3$
» » $30'$ =	$-\ 4'',9$
✳ Zt. im mittl. Mitt. d. 4. Nov. in 82° 30′ OL. =	$14^h\ 54'\ 30'',5$
Seit d. mittl. Mitt. d. 4. Novbr. verfl. ✳ Zt. =	$6^h\ 38'\ 56'',3$
Retardation für $6^h = 59'',0$; » » $38' = 6'',2$; » » $56'' = 0'',1$	$-\ 1'\ 5'',3$
♃ Genaue untere Culmin. d. 4. Novbr. =	$6^h\ 37'\ 51'',0$ astron. mittl. Zt. in 82°,5 OL. v. Gr.

F. Die Culminationszeit eines Fixsterns für den oberen und unteren Meridian eines Ortes zu finden, dessen Datum und Länge bekannt ist.

1. Die obere Culmination zu finden.

Regel. Finde aus einer Ephemeride für den gegebenen Tag die AR. des Sterns (§. 103.); dieselbe ist als die Sternzeit des Ortes für den Augenblick der oberen Culmination des Sterns anzusehen und giebt daher in mittlere Zeit verwandelt (§. 109.) die mittlere Zeit der Culmination des Sterns im oberen Meridian.

2. Die untere Culmination zu finden.

Regel. Wenn nach der vorstehend gegebenen Regel die obere Culminationszeit gefunden ist, so addire zu oder subtrahire von derselben, je nachdem durch das eine oder andere Verfahren nicht die Grenze des gegebenen Tages überschritten wird, den halben Sterntag $= \frac{23^h\ 56'\ 4'',09}{2} = 11^h\ 58'\ 2'',05$ mittlere Zeit, so hat man die gesuchte mittlere Zeit der unteren Culmination.

Werden weder durch das Addiren noch durch das Subtrahiren des halben Sterntages die Grenzen des gegebenen Tages überschritten, so finden an demselben zwei untere Culminationen statt.

Anmerkung. Um zu ermitteln, ob das gegebene bürgerliche Datum zur Zeit der Culmination mit dem astronomischen Datum übereinstimmend ist, ziehe man AR. der mittleren Sonne des gegebenen Tages von AR. des Sterns ab; beträgt der Rest, minus der etwa für OL. in Zeit zu subtrahirenden Acceleration und Retardation mehr als 12^h, so muss man 1 vom bürgerlichen Datum abziehen, um das entsprechende astronomische Datum zu erhalten; ist aber der Rest, plus der etwa für WL. in Zeit zu addirenden Acceleration weniger Retardation für die seit dem Mittage verflossene Sternzeit kleiner als 12^h, so ist das bürgerliche Datum für den Augenblick der Culmination mit dem astronomischen übereinstimmend. Man kann übrigens auch, ohne die gedachte Untersuchung zu machen, stets annehmen, dass das bürgerliche Datum mit dem astronomischen übereinstimmend ist und dafür die Culminationszeit suchen. Wenn die so gefundene Culminationszeit die Grenze des gegebenen bürgerlichen Tages überschreitet, so kann man durch Subtrahiren eines halben Sterntages leicht die nächst vorhergehende Zeit der untern Culmination des Sterns finden.

Beispiel 1. Den 20. October 1848, auf 20° OL. von Greenwich, soll man die Culminationszeit des Sirius für den oberen und unteren Meridian finden.

Da die ✳Zeit für den gegebenen Tag von der AR. des Sternes abgezogen, bedeutend mehr als 12^h giebt, so hat man 1 vom bürgerlichen Datum abzuziehen, um das entsprechende astronomische Datum zu erhalten.

N. A. Sirius AR. d. 17. Octbr. zur Zeit d. oberen Culm. = $6^h\,38'\,29'',35$
Veränder. in 1 Tag $22^h,7$ $+\ 0'',05$
✳AR. = $6^h\,38'\,29'',40$
N. A. ✳Zt. im mittl. Mittg. d. 19. Octbr. = $13^h\,52'\,19'',89$
Acceleration f. $1^h = 9'',86$
» » $20' = 3'',29$ } $-\ 13'',15$
✳Zt. d. 19. Oct. i. mittl. Mittg. d. Ortes = $13^h\,52'\,6'',74$ = $13^h\,52'\,6'',74$
Seit d. mittl. Mittg. d. 19. Octbr. verflossene ✳Zt. . . = $16^h\,46'\,22'',66$
Retardation für $16^h = 2'\,37'',27$
» » $46' = 7'',54$ } . . . $-\ 2'\,44'',87$
» » $22'',66 = 0'',06$
Sirius auf 20° OL. d. 19. Octbr. im ob. Meridian um $16^h\,43'\,37'',79$ m. Zt.
» » » » » 20. » » » » um $4^h\,43'\,37'',79$ m. Zt. Mrg.
½ Sterntag in mittl. Zeit = $11^h\,58'\,2'',05$
Sirius geht auf 20° OL. durch d. unteren Meridian um $4^h\,41'\,39'',84$ m. Zt. Abends d. 20. Octbr.

Beispiel 2. 1848 den 9. December auf 60° 20' WL. von Greenw., soll man finden, wann der Polarstern im oberen und im unteren Meridian ist.

N. A. d. 9. Decbr. ✳AR. = $1^h\,5'\,27'',97$
10. » ✳AR. = $1^h\,5'\,27'',30$
$24^h : 4^h\,1'$ = $0'',67 : x$

4^h	6	$0'',11$
$1'$	240	$x = -\ 0'',11$

✳AR. = $1^h\,5'\,27'',86$

Polarstern AR. zur Zeit der oberen Culmination = $1^h\,5'\,27'',86$
N. A. ✳Zt. d. 9. im mittl. M. in Greenw. = $17^h\,13'\,24'',19$
Acceleration für 4^h = $39'',43$
» » $1'$ = $0'',16$
» » $20''$ = $0'',05$
✳Zeit d. 9. im mittl. Mittg. des Ortes = $17^h\,14'\,3'',83$. . = $17^h\,14'\,3'',83$
Seit dem mittl. Mittage des 9. Decbr. verflossene ✳Zeit. . = $7^h\,51'\,24'',03$
Retardation für $7^h = 1'\,8'',81$
» » $51' = 8'',36$ } $-\ 1'\,17'',24$
» » $24'' = 0'',07$
Der Polarst. geht durch d. ob. Merid. d. 9. Dec. Ab. mittl. Zt. um $7^h\,50'\,6'',79$
½ Sterntag in mittl. Zt. = $11^h\,58'\,2'',05$
Der Polarstern geht durch den Meridian unter dem Pol um $7^h\,52'\,4'',74$ d. 9. Decbr. mittl. Zt. Morgens.

§. 132.

Die obere und untere Meridianhöhe eines Himmelskörpers zu finden, wenn das Datum, wie auch die Länge und Breite des Ortes gegeben ist.

A. Eines Himmelskörpers obere Meridianhöhe zu finden.

Wenn die Declination eines Gestirnes = o ist, so befindet sich dasselbe im Himmels-Aequator und die obere Meridianhöhe ist dann = der Aequatorhöhe = dem Complemente der geographischen Breite des Ortes. Ist die Declination aber gleichnamig oder ungleichnamig mit der Breite des Ortes, so ist im ersten Falle die obere Meridianhöhe gleich dem Complemente der Breite plus der Declination, und im zweiten Falle gleich dem Complemente der Breite minus der Declination (§. 26. und Fig. 7.).

Man hat daher zur Ermittelung der oberen Meridianhöhe folgende

Regel. Finde die obere Culminationszeit des Gestirnes (§. 131.), und für diese die Declination desselben, welche zum Complemente der Breite addirt oder davon subtrahirt, je nachdem Breite und Declination gleichnamig oder ungleichnamig sind, die obere Meridianhöhe giebt.

Beträgt die Summe mehr als 90°, so ist das Supplement derselben die obere Meridianhöhe, und das Gestirn culminirt dann auf NBr. im Nord- und auf SBr. im Süd-Meridian; wogegen das Umgekehrte stattfindet, wenn das Complement der Breite + der Declination weniger als 90° ausmacht.

Ist das Complement der Breite kleiner als die ungleichnamige Declination, so ist die Meridianhöhe negativ, oder die Meridiandepression ist dann gleich der Declination minus dem Complemente der Breite. Das Gestirn geht in diesem Falle nicht auf.

Beispiel. Finde am 30. Juni 1853 die obere Meridianhöhe der Sonne auf 55° 42′ 38″ NBr. und 21° 8¾′ OL. von Greenwich.

Culminationszeit der Sonne	=	0^h 0′ 0″	wahre Zeit,
OL. in Zeit .	=	1^h 24′ 35″	
Greenwicher wahre Zeit vor dem Mittage . .	=	1^h 24′ 35″	d. 30. Juni.
⊙ Declination zur Zeit der Culmination	=	23° 11′ 15″	N.
Complement der Breite	=	34° 17′ 22″	
obere Meridianhöhe der Sonne	=	57° 28′ 37″	im S. M.

B. Die untere Meridianhöhe eines Himmelskörpers zu finden.

Die Breite eines Ortes ist gleich der Polhöhe, gleich dem Bogen des unteren Meridians vom Pol bis zum wahren Horizonte.

Man erhält also die untere Meridianhöhe eines Gestirnes, wenn man die Poldistanz desselben von der Polhöhe abzieht (Fig. 7. und §. 26.).

Regel.

Die untere Meridianhöhe eines Himmelskörpers zu finden.

1. Finde die untere Culminationszeit des Himmelskörpers (§. 131.) und für diese die Declination desselben, welche, wenn letztere mit der Breite gleichnamig ist — in welchem Falle ein Gestirn nur über dem Horizonte unter dem Pol culminiren kann — von 90° subtrahirt, die Poldistanz giebt.

2. Subtrahire die Poldistanz des Gestirnes von der Breite des Ortes, so ist der Rest die untere Meridianhöhe.

Ist die Poldistanz grösser als die Breite, welches immer der Fall ist, wenn die Breite des Ortes und die Declination des Gestirnes ungleichnamig sind, weil dann die Poldistanz $= 90^\circ +$ Declination, so ist das Gestirn nicht über dem Horizonte, wenn es durch den unteren Meridian geht, und es ist dann Poldistanz minus Breite = der Meridiandepression.

Beispiel. Wie hoch steht am 19. Februar 1852 auf 50° NBr. der Polarstern im Meridian unter dem Pol?

Nach dem nautischen Jahrbuche Polarsterns-Declinat.	= 88° 31′ 24″ N.
	90°
N. Poldistanz .	= 1° 28′ 36″ N.
NBr. .	= 50°
Höhe des Polarsternes im unteren Meridian	= 48° 31′ 24″ N.

§. 133.

Diejenigen Sterne zu finden, welche zu einer bestimmten Zeit durch den oberen oder durch den unteren Meridian eines Ortes gehen, dessen Länge bekannt ist.

1. Die AR. eines Himmelskörpers, welcher sich im oberen Meridian befindet, ist gleich der AR. des Meridians, gleich der Sternzeit für den gegebenen Augenblick.

Wenn man daher für die gegebene mittlere oder wahre Zeit nach §. 108. die entsprechende Sternzeit sucht, so ist diese gleich der AR. derjenigen Sterne, welche zu dieser Zeit durch den oberen Meridian des Ortes gehen.

2. Die AR. eines Himmelskörpers, welcher sich im unteren Meridian eines Ortes befindet, ist gleich der AR. des unteren Meridians, gleich der AR. des oberen Meridians $\mp 12^h$, gleich der Sternzeit für den gegebenen Augenblick $\mp 12^h$, je nachdem die AR. des oberen Meridians oder die Sternzeit desselben grösser oder kleiner als 12^h ist.

Wenn man daher für die gegebene mittlere oder wahre Zeit nach §. 108. die entsprechende Sternzeit sucht und hiervon 12^h subtrahirt oder 12^h dazu addirt, je nachdem dieselbe grösser oder kleiner als 12^h ist, so hat man die AR. derjenigen Sterne, welche zu der gegebenen Zeit durch den unteren Meridian des Ortes gehen.

Regel. Die Sterne zu finden, welche zu einer bestimmten Zeit durch den oberen oder unteren Meridian eines Ortes gehen, dessen Länge bekannt ist.

1. Ist die mittlere Zeit gegeben, so finde zu derselben die AR. der mittleren Sonne; ist aber die wahre Zeit gegeben, so finde die AR. der wirklichen Sonne.

Die AR. der mittleren Sonne zur astronomischen mittleren Zeit addirt, sowie die AR. der wahren Sonne zur astronomischen wahren Zeit addirt, giebt die AR. derjenigen Sterne, welche in dem gegebenen Augenblicke durch den oberen Meridian des Ortes gehen.

2. Die AR. der mittleren Sonne zur astronomischen mittleren Zeit addirt $\mp 12^h$, je nachdem die Summe grösser oder kleiner als 12^h ist, sowie die AR. der wahren Sonne zur astronomischen wahren Zeit addirt $\mp 12^h$, je nachdem die Summe grösser oder kleiner als 12^h ist, giebt die AR. derjenigen Sterne, welche in dem gegebenen Augenblicke durch den unteren Meridian gehen.

Im Nautical-Almanac, dem nautischen Jahrbuche oder auch in der nautischen Tafel XXVI. kann man dann die Namen der Sterne finden, welche die entsprechende AR. haben.

Beispiel. Finde die Sterne erster Grösse, deren Höhe nicht unter 2° ist, welche 1853 zwischen 7^h Abends mittl. Zeit am 22. und 5^h Morgens mittl. Zeit am 23. September durch den oberen und unteren Meridian eines Ortes gehen, der auf 30° WL. von Greenwich und auf 60° NBr. liegt.

NBr. des Ortes = 60°, Complement = 30°
kleinste Höhe . = 2°
Grösste S. Decl. d. Sterne, welche im S. M. wenigst. 2° Höhe haben = 28°.
NBr. des Ortes . = 60°
kleinste Höhe . = 2°
Grösste N. Poldist. d. Sterne, welche im M. unt. d. P. und 2° H. haben = 58°,
also kleinste N. Declination = 90° — 58° = 32°.

Mittl. astronomische Zeit den 22sten 7^h und den 22sten 17^h
WL. in Zeit = 2^h 2^h
Greenw. mittl. Zeit d. 22. September = 9^h und den 22sten 19^h.
N. d. n. Jb. m. ⊙ AR. d. 22. Sept. Mittg. = $12^h\,5'\,2'',2$ = $12^h\,5'\,2'',2$
Acceleration für 9^h = + $1'\,28'',7$ Accel. f. 19^h = + $3'\,7'',3$
m. ⊙ AR. = $12^h\,6'\,30'',9$ und = $12^h\,8'\,9'',5$
Gegebene mittl. Zeit = $7^h\,0'\,0''$ und = $17^h\,0'\,0''$
AR. des oberen Meridians um 7^h Abds. = $19^h\,6'\,30'',9$, um 5^h Mrg. = $5^h\,8'\,9'',5$
— 12^h + 12^h
AR. des unteren Meridians um 7^h Abds. = $7^h\,6'\,30'',9$ um 5^h Mrg. = $17^h\,8'\,9'',5$.

Hiernach gehen alle Sterne, deren AR. von $19^h\,6'\,30'',9$ bis 24^h und von 0^h bis $5^h\,8'\,9'',5$ beträgt, in der bestimmten Zeit durch den oberen Meridian, sowie alle Sterne, deren AR. zwischen $7^h\,6'\,30'',9$ und $17^h\,8'\,9'',5$ beträgt, durch den unteren Meridian.

Aus den ermittelten Extremen der Declination und AR. findet man aus Tafel XXVI.

1. diejenigen Sterne erster Grösse, welche durch den oberen Meridian gehen,

Aldebaran AR.	= $4^h\,27'\,31''$	Declination	= 16° 12′ 24″ N.
Capella . . »	= $5^h\,5'\,52''$	»	= 45° 50′ 31″ N.
Rigel . . . »	= $5^h\,7'\,30''$	»	= 8° 22′ 16″ S.
Altair . . . »	= $19^h\,43'\,38''$	»	= 8° 29′ 13″ N.

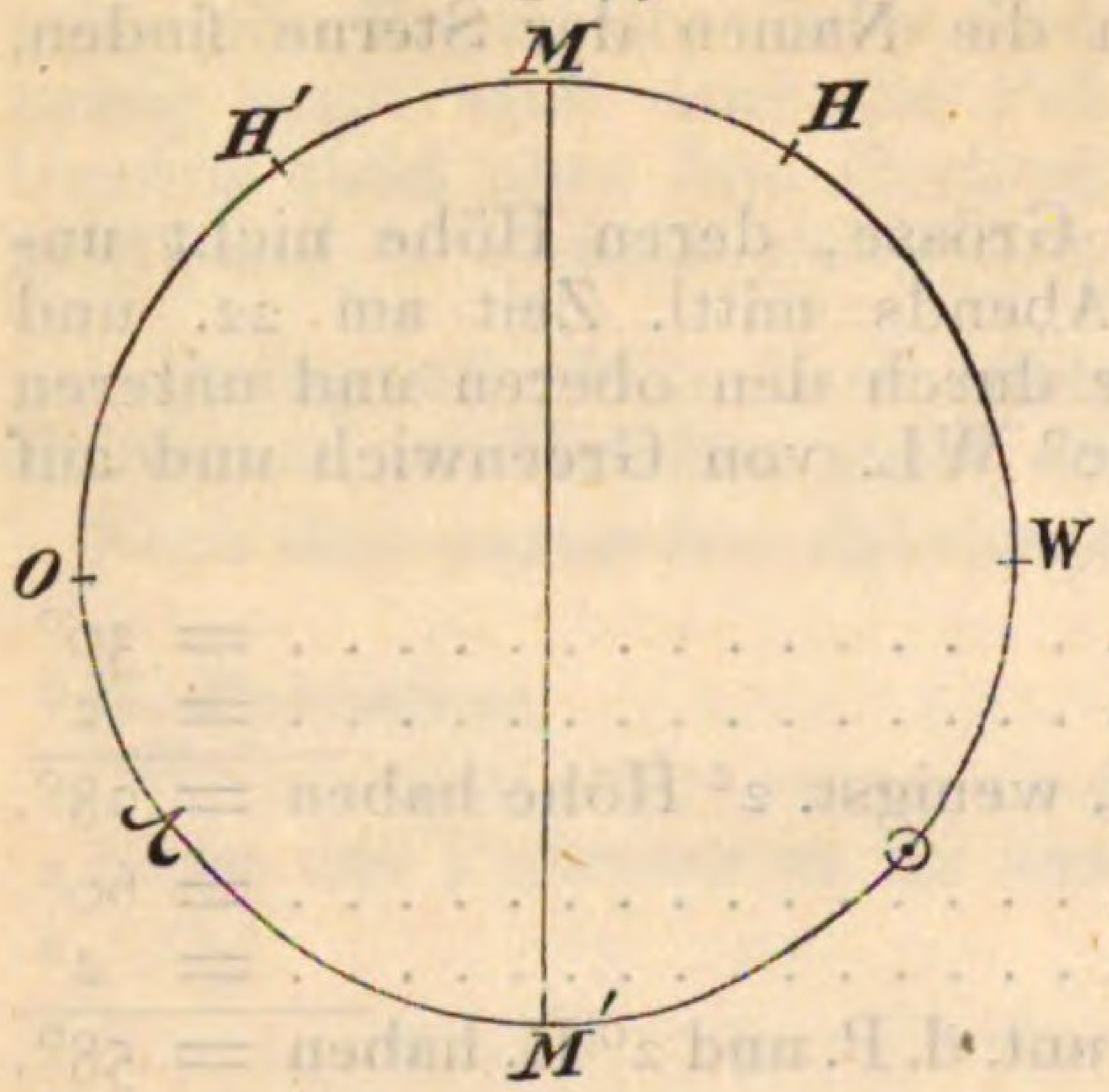
2. Sterne erster Grösse, welche in der bestimmten Zeit durch den unteren Meridian gehen, deren Höhe nicht unter 2° ist, sind nicht.

§. 134.

Wenn man die Länge, das Datum und die mittlere oder wahre Zeit eines Ortes kennt, den Stundenwinkel eines Himmelskörpers zu dem gegebenen Zeitmomente, wie auch aus dem bekannten Stundenwinkel die Sternzeit zu finden.

Der Stundenwinkel eines Himmelskörpers ist hier der sphärische Winkel am Weltpol, zwischen dem oberen Himmelsmeridian des Ortes und dem Stundenkreise, welcher durch den Mittelpunkt des Himmelskörpers geht (§. 18.).

Fig. 79.



Es sei (Fig. 79.) ♈ $M'HH'$ der Himmels-Aequator, welcher von dem oberen Meridian des Ortes in M und von dem unteren Meridian in M' geschnitten wird, ♈ bezeichne den Nullpunkt des Widders, sowie H und H' zwei Punkte, in welchen Stundenkreise, durch die Mittelpunkte zweier Himmelskörper gehend, den Aequator treffen. Man denke sich auf der Nordseite des Aequators nach Süden sehend, so ist Westen (W) zur Rechten und Osten (O) zur Linken, folglich der Bogen ♈ ⊙H = AR. des Himmelskörpers in H, sowie der Bogen ♈ ⊙ H' = AR. des sich in H' befindenden Himmelskörpers.

Der Bogen ♈ ⊙ M ist = der gegebenen Zeit entsprechenden Sternzeit = AR. des Meridians, und die Bögen MH und MH' sind Maasse der ihnen gegenüberstehenden Stundenwinkel, also gleich den Stundenwinkeln der Himmelskörper in H und H' vom oberen Meridian gezählt.

Man hat daher:

Stundenwinkel (MH) = Sternzeit — AR. des Himmelskörpers;

Stundenwinkel (MH') = AR. des Himmelskörpers — Sternzeit;

mithin ist der westliche Stundenwinkel + AR. des Gestirnes, oder AR. des Gestirnes minus dem östlichen Stundenwinkel = AR. des Meridians = ✳Zeit.

Es ergiebt sich demnach, um aus der bekannten mittleren oder wahren Zeit den Stundenwinkel eines Himmelskörpers und umgekehrt aus diesem die mittlere oder wahre Zeit zu finden, folgende Regel.

Suche zu der gegebenen Zeit die entsprechende AR. des Himmelskörpers und finde nach §. 108. aus der gegebenen mittleren oder wahren Zeit die entsprechende Sternzeit, welche gleich der AR. des Meridians ist.

Die Differenz der AR. des Meridians und der AR. des Himmelskörpers ist der Stundenwinkel, der westlich vom oberen Meridian liegt, wenn die AR. des Meridians grösser als die AR. des Gestirnes; hingegen östlich, wenn die AR. des Gestirnes grösser als die AR. des Meridians ist. Kennt man dagegen den Stundenwinkel eines Gestirnes, so ist die AR. desselben ± Stundenwinkel, je nachdem dieser westlich oder östlich vom oberen Meridian liegt, gleich der AR. des Meridians oder der Sternzeit.

Aus der so gefundenen Sternzeit kann ferner die mittlere Zeit nach §. 109. und die wahre Zeit nach §. 110. gefunden werden.

Hierbei ist zu bemerken, dass, wenn die Summe des westlichen Stundenwinkels und der AR. des Gestirnes 24^h übersteigt, diese Grösse davon abgezogen wird; ist aber die AR. des Gestirnes kleiner als der davon zu subtrahirende östliche Stundenwinkel, so muss erstere um 24^h vergrössert werden.

Anmerkung. Die gegebene Regel gilt zwar für alle Himmelskörper; da aber die wahre Zeit Abends gleich dem Stundenwinkel der Sonne westlich vom oberen Meridian, und 12^h minus der wahren Zeit Morgens gleich dem Stundenwinkel der Sonne östlich vom oberen Meridian,

ferner die wahre Zeit gleich der mittleren Zeit ± der Zeitgleichung ist, so gelangt man, um den Stundenwinkel der Sonne vom oberen Meridian zu finden, viel kürzer zum Ziele, wenn man für die gegebene mittlere Zeit die Zeitgleichung sucht und durch Anwendung derselben auf die gegebene mittlere Zeit die wahre Zeit findet, welche, wenn Abendzeit, gleich dem Stundenwinkel der Sonne ist. Die astronomische wahre Zeit ist immer der Stundenwinkel der Sonne westlich vom oberen Meridian, also 24^h minus der astronomischen wahren Zeit gleich dem Stundenwinkel der Sonne östlich vom oberen Meridian. Den Stundenwinkel vom unteren Meridian findet man, wenn man den vom oberen Meridian von 12^h abzieht.

Hieraus ergiebt sich zugleich, wie aus dem bekannten Stundenwinkel der Sonne die wahre oder mittlere Zeit gefunden werden kann.

Beispiel 1. 1853 den 5. Juli, auf 45° 10′ WL. von Greenwich, um $11^h\ 25'\ 16''$ mittlere Zeit Morgens, soll der Stundenwinkel der Sonne gefunden werden.

Mittl. Zeit den 5. Juli . . .	= $11^h\ 25'$ Morgens.
WL. in Zeit	= $3^h\ 1'$
Greenwich. mittl. Zeit . . .	= $2^h\ 26'$ d. 5. Juli Abends.
Zeitgleichung	= — $4'\ 12'',7$ auf mittl. Zeit.
Gegebene mittl. Zeit	= $11^h\ 25'\ 16''$ Morgens,
wahre Zeit	= $11^h\ 21'\ 3''$ Morgens.
	12^h
Stundenwinkel der Sonne .	= $0^h\ 38'\ 57''$ öst. v. ob. Merid.

Beispiel 2. 1852 den 26. Januar auf 18° 55′ WL. von Greenwich, um $7^h\ 16'\ 3''$ mittlere Zeit Abends, soll der Stundenwinkel des Mondes gefunden werden.

Mittl. Zeit den 26. Januar .	= $7^h\ 16'$ Abends.
WL. in Zeit	= $1^h\ 16'$
Greenw. mittl. Zeit den 26ten	= $8^h\ 32'$ Abends.
m. ☉ AR.	= $20^h\ 21'\ 10'',4$
Gegebene mittl. Zeit	= $7^h\ 16'\ 3''$
AR. des Meridians.	= $3^h\ 37'\ 13'',4$
☾ AR.	= $0^h\ 37'\ 22''$
Stundenwinkel des Mondes	= $2^h\ 59'\ 51'',4$ westl. v. ob. Mrd.

Anmerkung. Ist statt der mittleren Zeit die wahre Zeit gegeben, so kann man zwar für diese die AR. der wirklichen Sonne finden, welche zur astronomischen Zeit addirt, die AR. des Meridians giebt; da man aber, um die AR. des Mondes reduciren zu können, die mittlere Zeit kennen muss, so ist es leichter, oder wenigstens ebenso leicht, erst aus der gegebenen wahren Zeit die mittlere Zeit zu suchen und die AR. der mittleren Sonne zu dieser zu addiren, um die AR. des Meridians zu erhalten.

Beispiel 3. 1852 den 5. Januar auf 9° 20′ OL. von Greenwich, um $10^h\ 15'\ 10''$ wahre Zeit Abends, soll man den Stundenwinkel des Planeten Mars finden.

	Wahre Zeit den 5. Januar .	$= 10^h\,15'$ Abends,
	OL. in Zeit	$= 0^h\,37'$
	Greenwicher wahre Zeit . .	$= 9^h\,38'$ den 5ten Abends,
n. d. N. A.	Zeitgleichung	$= + \quad 5'$ auf wahre Zeit,
	Greenwicher mittl. Zeit . . .	$= 9^h\,43'$ den 5. Januar Abends.
	Wahre Zeit des Ortes . . .	$= 10^h\,15'\,10''$ Abends.
	Zeitgleichung	$= + \quad 5'\,39'',1$ auf wahre Zeit.
	Mittl. Zeit des Ortes	$= 10^h\,20'\,49'',1$ d. 5. Jan. Abds.
	m. ⊙ AR.	$= 18^h\,58'\,34'',2$
	Sternzeit	$= 29^h\,19'\,23'',3$
	♂ AR.	$= 8^h\,57'\,58'',5$
	♂ Stundenwinkel	$= 20^h\,21'\,24'',8$ westl. v. ob. Mrd.
		24^h
	♂ Stundenwinkel	$= 3^h\,38'\,35'',2$ östl. v. ob. Mrd.

Beispiel 4. 1852 den 3. Juli um $1^h\,36'\,58''$ mittlere Zeit Morgens, auf $1°\,29'$ OL. von Greenwich, soll man den Stundenwinkel des Sternes Arcturus finden.

Den 3ten um $1^h\,36'\,58''$ mittl. Z. Morg.	$=$ dem 2ten $13^h\,37'$ astron. m. Z.
OL. in Zeit	$= \quad - \quad 6'$
Greenwicher mittl. Zeit . .	$= \quad 13^h\,31'$ den 2. Juli.
m. ⊙ AR.	$= 6^h\,44'\,55'',2$
Gegebene mittl. astron. Zeit	$= 13^h\,36'\,58''$
AR. des Meridians	$= 20^h\,21'\,53'',2$
Arcturus AR.	$= 14^h\,8'\,55'',7$
✱ Stundenwinkel	$= 6^h\,12'\,57'',5$ westl. v. ob. Mrd.

§. 135.

Zeitbestimmungen.

Aus der beobachteten Höhe eines Himmelskörpers, der geographischen Breite des Ortes und der ungefähr bekannten Länge desselben, wie auch der ungefähr bekannten Zeit, die wahre oder mittlere Zeit zu finden.

Entwickelung der Formel, wonach der Stundenwinkel gefunden werden kann. Es bezeichne:

h die wahre Mittelpunktshöhe,
z das Complement derselben,
φ die geographische Breite des Ortes,
b das Complement derselben,
δ die Declination des Gestirnes,
p dessen Poldistanz vom oberen Pol und
t dessen Stundenwinkel vom oberen Meridian

nach Osten oder Westen gezählt, so liefert das sphärische Dreieck zwischen dem Zenith, oberen Weltpol und Gestirn nach §. 29. der sphärischen Trigonometrie die Gleichung

$$\cos t = \frac{\cos z - \cos b \cdot \cos p}{\sin b \cdot \sin p} = \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \cos p}{\cos \varphi \cdot \sin p} \quad . . (\mathrm{I.}).$$

Wenn man diese Gleichung von $1 = 1$ subtrahirt, so ergiebt sich

$$1 - \cos t = 1 - \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \cos p}{\cos \varphi \cdot \sin p},$$

$$= \frac{\cos \varphi \cdot \sin p + \sin \varphi \cdot \cos p - \sin h}{\cos \varphi \cdot \sin p}.$$

Man substituire für $1 - \cos t$ und für $\cos \varphi \cdot \sin p + \sin \varphi \cdot \cos p$ die gleichen Werthe $2 \sin^2 \frac{1}{2} t$ und $\sin (\varphi + p)$ (Ebene Trigonometrie §. 7. No. 1. und 70.), so erhält man

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin (\varphi + p) - \sin h}{\cos \varphi \cdot \sin p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II.)}.$$

Setzt man hierin wieder $2 \cos \frac{\varphi + p + h}{2} \cdot \sin \frac{\varphi + p - h}{2}$ für $\sin (\varphi + p) - \sin h$ (Ebene Trigonometrie §. 7. No. 24.) und S für $\frac{\varphi + p + h}{2}$, so ergiebt sich

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\cos S \cdot \sin (S - h)}{\cos \varphi \cdot \sin p},$$

also $$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin (S - h)}{\cos \varphi \cdot \sin p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III.)}.$$

Es ist $p = 90^\circ \mp \delta$, (das obere Zeichen gilt, wenn φ und δ gleichnamig, das untere, wenn diese Grössen ungleichnamig sind). Man hat also $\varphi + p = \varphi + 90^\circ \mp \delta$, mithin $\sin (\varphi + p) = \cos (\varphi \mp \delta)$, worin wieder das obere Zeichen bei gleichnamiger, das untere bei ungleichnamiger Breite und Declination gilt.

Man setze in (II.) für $\sin (\varphi + p)$ den vorstehend gefundenen gleichen Werth $\cos (\varphi \mp \delta)$ und für $\sin p$ den gleichen Werth $\cos \delta$, so erhält man

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\cos (\varphi \mp \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV.)}.$$

Die nautische Taf. XXXIX. enthält $\log (2 \sin^2 \frac{1}{2} t)$ und in Taf. XXXVI. sind die natürlichen Sinusse und Cosinusse gegeben. In ersterer ist $2 \sin^2 \frac{1}{2} t$ für den Radius $= 1$ berechnet und das mal 100000 genommen. Letztere gilt für den Radius $= 1000000$.

Aus Gleichung (I.) ergeben sich die Formeln für nachstehende Fälle.

1. Wenn die Höhe $= 0$, so ist

$$\cos t = -\frac{\sin \varphi \cdot \cos p}{\cos \varphi \cdot \sin p} = -\tang \varphi \cdot \tang \delta \quad \ldots\ldots \quad \text{(V.)},$$

worin $t >< 6^h$, je nachdem φ und δ gleichnamig oder ungleichnamig.

2. Wenn die Breite $= 0$, so ist

$$\cos t = \frac{\sin h}{\sin p} = \frac{\sin h}{\cos \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI.)},$$

worin $t =$ oder $< 6^h$.

3. Wenn die Declination $= 0$, so ist

$$\cos t = \frac{\sin h}{\cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII.)},$$

worin $t =$ oder $< 6^h$.

4. Wenn φ und auch $h = 0$ ist, so ist

$$\cos t = \frac{0}{\sin p} = 0 \ldots\ldots (\text{VIII.}),$$

also $t = 6^h$.

5. Wenn φ und auch $\delta = 0$, so ist

$$\cos t = \sin h \ldots\ldots (\text{IX.}),$$

folglich die Zenithdistanz dividirt durch $15 = t$ in Zeit, welcher Werth nie grösser als 6^h werden kann, so lange die Höhe nicht negativ wird.

6. Wenn φ, h und $\delta = 0$ sind, so ist

$$\cos t = \frac{0}{1} = 0 \ldots\ldots (\text{X.}),$$

mithin $t = 6^h$.

§. 136.

Vom Einfluss der Fehler in der Höhe, Breite und Declination auf den berechneten Stundenwinkel.

Es bezeichne A das Azimuth vom Meridian des oberen Pols gerechnet, also im sphärischen Dreieck zwischen Pol, Zenith und Gestirn den Winkel am Zenith; $dz = -dh$ seien kleine Fehler in der Zenithdistanz bezw. Höhe, dt der entsprechende im Stundenwinkel, so ist nach der Differentialformel (III.) in (§. 71.)

$$dt = \frac{dz}{\sin A \cdot \sin b} = -\frac{dh}{\sin A \cdot \cos \varphi} \ldots\ldots (\text{XI.}).$$

Wenn in dieser Gleichung A von 0 bis 180° veränderlich angenommen wird, so ist:

1. dt am kleinsten, wenn $A = 90°$, oder falls es diese Grösse nicht erreichen kann, wenn möglichst nahe 90°,

2. dt am grössten, wenn $A = 0$ oder $= 180°$ ist.

Wenn also die Declination $>$ als die Breite und beide gleichnamig sind, in welchem Falle das Azimuth stets kleiner als 90° ist, so findet der vortheilhafteste Augenblick zur Zeitbestimmung dann statt, wenn der Himmelskörper in dem Vertical ist, der den Declinationsparallel berührt. In diesem Augenblicke ist das sphärische Dreieck zwischen Pol, Zenith und Gestirn rechtwinklig am Gestirn, und es ist demnach, wenn die gedachte Berührung stattfindet,

$$\left.\begin{aligned} &\cos t = \operatorname{cotg} b \cdot \operatorname{tang} p = \operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{cotg} \delta \\ \text{und}\quad &\cos z = \frac{\cos b}{\cos p} \text{ oder } \sin h = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta} \end{aligned}\right\} (\text{Sphär. Trigon. §. 44.}).$$

Ist $\delta < \varphi$ und sind beide gleichnamig, so ist der vortheilhafteste Augenblick zur Beobachtung, wenn das Gestirn sich im ersten Vertical befindet, in welchem Falle das in Rede stehende Dreieck am Zenith rechtwinklig ist. Dann hat man

$$\left.\begin{aligned} &\cos t = \operatorname{cotg} p \cdot \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} \delta \cdot \operatorname{cotg} \varphi \\ \text{und}\quad &\cos z = \frac{\cos p}{\cos b}, \text{ giebt } \sin h = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \end{aligned}\right\} (\text{Sphär. Trigon. §. 44.}).$$

In der nautischen Tafel XLIV. ist für jeden Grad der Breite von 0 bis 80° und für jeden Grad der mit der Breite gleichnamigen Decli-

nation eines Gestirnes von 1° bis 24° der Stundenwinkel und die Höhe des Himmelskörpers, wenn derselbe im ersten Vertical oder in dem den Declinationsparallel berührenden Vertical ist, angegeben.

Wenn δ ungleichnamig mit φ, so ist A stets grösser als 90°, jedoch am kleinsten, wenn das Gestirn sich im Horizonte befindet, welches also in diesem Falle der vortheilhafteste Augenblick zur Beobachtung wäre; es müssen aber Höhen unter 5° möglichst vermieden werden, weil bekanntlich bei sehr kleinen Höhen die mittlere Refraction von der wahren bedeutend abweichen kann und man jene anwenden muss, wenn man nicht den Barometer- und Thermometerstand mitbeobachtet hat. Hat man diesen, dann kann man auch kleinere Höhen nehmen, weil man in dem Falle die wahre Refraction anwendet, daher die wahre Höhe genau genug erhält.

Setzt man in (XI.) φ veränderlich, nimmt aber dh und A constant (unveränderlich) an, so ist:

1. dt am kleinsten, wenn $\varphi = 0$,
2. dt am grössten, wenn $\varphi = 90°$ ist.

Je kleiner also die Breite ist, desto weniger Einfluss hat ein Fehler in der Höhe auf den zu berechnenden Stundenwinkel.

Im sphärischen Dreieck zwischen Pol, Zenith und Gestirn findet man auch

$$\sin A = \frac{\sin t \cdot \sin p}{\sin z} = \frac{\sin t \cdot \cos \delta}{\cos h},$$

und wenn man diesen Werth für $\sin A$ in (XI.) setzt, so ergiebt sich

$$dt = -\frac{dh \cdot \cos h}{\sin t \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XII.)}.$$

Wenn in dieser Gleichung die Declination veränderlich, das Uebrige aber unveränderlich angenommen wird, so ergiebt sich, dass

1. dt am kleinsten, wenn $\delta = 0$,
2. dt am grössten, wenn $\delta = 90°$ ist.

Hieraus folgt, dass in Bezug auf die Declination ein Fehler in der Höhe den kleinsten Einfluss auf den zu berechnenden Stundenwinkel hat, wenn die Declination $= 0$ ist, und dass der Fehler im Stundenwinkel mit der Declination wächst.

Wenn $\varphi = 0$, so ist $\cos \varphi = 1$, und $\sin A = 1$, wenn $A = 90°$. Es kann aber nur $\varphi = 0$ und zugleich $A = 90°$ sein, wenn auch $\delta = 0$ ist.

Aus Gleichung (XI.) folgt also, dass dt stets grösser als dh, wenn nicht $\varphi = 0$ und zugleich $A = 90°$ ist; in letzterem Falle ist $dt = -dh$.

Will man ermitteln, unter welchen Umständen ein Fehler in der Breite den kleinsten Einfluss auf den Stundenwinkel hat, so nehme man im sphärischen Dreieck zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn die Zenith- und Poldistanz constant, das Complement der Breite aber veränderlich an, und db bezeichne einen kleinen Fehler in derselben, dt den diesem entsprechenden Fehler im Stundenwinkel, so ist nach der Differentialgleichung (I.) in §. 71.

$$dt = -\frac{db \cdot \operatorname{cotg} A}{\sin b} = \frac{d\varphi \cdot \operatorname{cotg} A}{\cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XIII.)}.$$

Wenn in dieser Gleichung A von 0 bis 180° veränderlich ist, $d\varphi$ und φ constant sind, so ist:

1. $dt = 0$, wenn $A = 90°$,
2. dt am grössten, wenn $A = 0$ oder $= 180°$,
3. $dt < d\varphi$, wenn $\text{cotg}\, A < \cos \varphi$,
4. $dt = d\varphi$, wenn $\text{cotg}\, A = \cos \varphi$,
5. $dt > d\varphi$, wenn $\text{cotg}\, A > \cos \varphi$ ist.

Hieraus folgt, dass in Bezug auf einen Fehler in der Breite die vortheilhafteste Zeit zur Beobachtung ist, wenn das Gestirn sich im ersten Vertical befindet.

Um zu untersuchen, unter welchen Umständen ein Fehler in der Declination den geringsten Einfluss auf den Stundenwinkel hat, nehme man im sphärischen Dreieck zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn die Complemente der Breite und Höhe constant, die Poldistanz aber veränderlich an, dp bezeichne einen Fehler in derselben, sowie dt den entsprechenden Fehler im Stundenwinkel, g den parallactischen Winkel, so hat man nach (XIII.)

$$dt = -\frac{dp \cdot \text{cotg}\, g}{\sin p} = -\frac{dp \cdot \text{cotg}\, g}{\cos \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XIV.)}.$$

Hiernach ist, wenn g von 0 bis 180° veränderlich, dp und δ aber constant angenommen werden:

1. $dt = 0$, wenn $g = 90°$,
2. dt am grössten, wenn $g = 0$ oder $= 180°$,
3. $dt < dp$, wenn $\text{cotg}\, g < \cos \delta$,
4. $dt = dp$, wenn $\text{cotg}\, g = \cos \delta$ und
5. $dt > dp$, wenn $\text{cotg}\, g > \cos \delta$ ist.

Der vortheilhafteste Augenblick, ein Gestirn zur Zeitbestimmung zu beobachten, ist dem Vorhergehenden nach der, wenn dasselbe sich im ersten Vertical befindet.

Nach den Formeln (XI.), (XIII.) und (XIV.) kann man den Fehler im Stundenwinkel berechnen, den ein kleiner Fehler in der Höhe, Breite und Declination darin hervorbringt; man hat hierbei aber auf die algebraischen Zeichen der Grössen Rücksicht zu nehmen.

§. 137.

Allgemeine Regeln Behufs Beobachtung der Höhen eines Gestirnes zur Zeitbestimmung und der Berechnung des Stundenwinkels, nebst der Uhrcorrection, aus den beobachteten Höhen etc.

1. Beobachtung der Höhen.

Wenn das Gestirn, nach welchem man die Zeit bestimmen will, im oder doch möglichst nahe am ersten Vertical ist, beobachte man so viele Höhen desselben, als man in 5 bis 6 Zeitminuten bekommen kann, und notire dieselben, wie auch die entsprechenden Uhrzeiten auf Secunden.

Will man genau verfahren, so notire man auch den Stand des Barometers und Thermometers, als die Beobachtung gemacht wurde.

2. Aus beobachteten Höhen den Stundenwinkel vom oberen Meridian zu finden.

Man nehme das Mittel aus den Uhrzeiten und beobachteten Höhen, betrachte dieses so, als wenn die Uhr das Mittel der Zeiten gezeigt hätte, als das Mittel der Höhen beobachtet wurde.

Ferner finde man für das Mittel der Höhen die wahre Mittelpunktshöhe (§. 119.), und beachte dabei, was in der Anmerkung gesagt ist, wenn die Höhen über dem künstlichen Horizonte u. s. w. beobachtet sind.

Die Breite des Ortes ist zur Zeit der Beobachtung zu ermitteln, die Declination des Gestirnes wird für den Augenblick der Beobachtung gefunden (§. 103.), letztere von 90° subtrahirt, wenn dieselbe mit der Breite des Ortes gleichnamig, dazu addirt, wenn ungleichnamig, giebt die Poldistanz.

Um ferner nach Formel (III.) in §. 135. den Stundenwinkel zu finden, schreibe man untereinander die wahre Höhe, die Breite und die Poldistanz, nehme hiervon die halbe Summe, zwischen dieser und der Höhe die Differenz.

Hierauf schreibe man log sec Breite, log cosec Poldistanz, nachdem von deren Kennziffer 10 subtrahirt, log cos halber Summe und log sin Differenz untereinander, addire diese 4 Logarithmen und dividire deren Summe durch 2, so ist der Quotient log sinus halber Stundenwinkel, der aus Tafel XXXV. auch in Zeit gefunden werden kann.

Dieser halbe Stundenwinkel mal 2 giebt den ganzen Stundenwinkel vom oberen Meridian.

Anmerkung. Es ist zwar auf See genau genug die Höhe, Breite und Poldistanz auf volle Minuten zu nehmen; aber bei der halben Summe und der Differenz muss man, besonders wenn erstere über 80° ist, log Cosinus und Sinus für etwaige halbe Minuten interpoliren.

Regel.

Nach Formel (IV.) in §. 135. den Stundenwinkel zu finden.

Subtrahire Breite und Declination von einander, wenn beide gleichnamig sind, oder addire dieselben, wenn ungleichnamig; zu dem Rest oder der Summe suche natural cosinus und subtrahire hiervon natural sinus wahrer Höhe, beide aus der nautischen Tafel XXXVI., mit Weglassung der letzten (6ten) Stelle, genommen. Zu dem Logarithmen dieses Unterschiedes addire log sec Breite und log sec Declination (beide weniger 10), so hat man log $(2 \sin^2 \frac{1}{2} t)$, welches der sogenannte Logarithme des Stundenwinkels ist, und, in Tafel XXXIX. aufgesucht, den Stundenwinkel giebt.

§. 138.

Die Uhrcorrection vermittelst des berechneten Stundenwinkels der Sonne und der diesem entsprechenden Zeit der Beobachtungsuhr zu bestimmen.

Der nach Formel (III.) oder (IV.) (§. 135.), bezw. nach den hierauf beruhenden Regeln in §. 137. berechnete Stundenwinkel der Sonne ist, je nachdem die Beobachtung Nach- oder Vormittags gemacht wurde, die wahre astronomische Zeit selbst, oder giebt, von 12^h subtrahirt, die wahre Zeit Vormittags.

Aus der wahren Zeit findet man die mittlere Zeit durch Anwendung der Zeitgleichung (§. 107.), und die Uhrcorrection zur Zeit der Beobachtung wird gegen wahre oder mittlere Zeit gefunden, wenn man das Mittel der Uhrzeiten der Beobachtung mit der wahren oder mittleren Zeit vergleicht, d. h. die Differenz nimmt.

Die Uhrcorrection wird mit + bezeichnet, wenn man sie zu der Uhrzeit zulegen muss, um die wahre oder mittlere Zeit zu erhalten; mit —, wenn man sie abziehen muss.

Beispiel 1. 1852 den 2. October n. d. Besteck auf 38° 48',5 SBr. und 2° 39' OL. v. Greenw., Barom. = 30",3 Engl., Therm. = 86° Fahrenheit, I. C. = + 0' 40", ungefähre U. C. = — 30' gegen mittlere Zeit, Augeshöhe 15' Rheinl.; man soll aus nachstehender Beobachtung die Uhrcorrection gegen mittlere Zeit finden.

7^h 16' 57" ⊙ 12° 8' 50"	Uhrzeit = 7^h 18' Morgens d. 2.
17' 17" 12' 20"	Ungef. U. C. . . = — 30' geg. mittl. Zt.
17' 40" 17' 30"	Ungef. mittl. Zt. = 6^h 48' Morgens d. 2.
18' 0" 21' 0"	OL. in Zeit . . = — 11'
18' 14" 23' 30"	Ungef. m. Gr. Zt. = 6^h 37' Mrg. d. 2. Oct.
7^h 17' 37",6 12° 16' 38"	= 5^h 23' v. d. Mitt. » .
I. C. . . = + 0' 40" } — 3' 11"	
Kimmt. . = — 3' 51" }	⊙ Decl. = 3° 39' 9" S.
⊙ scheinb. Höhe 12° 13' 27"	90°
mittl. Refr. = 4' 20" }	⊙ Poldistanz . = 86° 20' 51" S.
Ber. f. Bar. = + 7" }	
» » Thr. = — 18" } — 4' 1"	Zeitgl. = — 10' 41",8 auf w. Zeit.
Parallaxe . = — 8" }	
⊙ w. Höhe 12° 9' 26"	
⊙ Halbm. + 16' 1"	
⊖ w. Höhe 12° 25' 27".	

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin (S - h)}{\cos \varphi \cdot \sin p}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [(\text{III.})\ §.\ 135.]$$

h . . . ⊖ w. Höhe = 12° 25' 27"
φ . . . S. Br. . . . = 38° 48' 30" log sec = 0,10833
p . . . S. P. D. . . = 86° 20' 51" log cosec = 0,00088
S = 68° 47' 24" . . . log cos = 9,55845
$S - h$ = 56° 21' 57" log sin = 9,92043
²) 19,58809
$\tfrac{1}{2}t$ = 2^h 33' 57",3 . . . log sin = 9,79404
2
t = 5^h 7' 54",6
12^h

w. Schiffsz. = 6^h 52' 5",4 Morgens d. 2. Octbr.
Zeitgl. = — 10' 41",8 auf w. Zeit,
mittl. Schiffsz. = 6^h 41' 23",6 Morgens d. 2. Octbr.
Uhrzeit = 7^h 17' 37",6 Morgens d. 2. Octbr.
Uhrcorrect. = — 0^h 36' 14",0 geg. mittl. Zeit,
Uhrcorrect. = — 0^h 25' 32",2 gegen wahre Zeit.

Nach $2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \dfrac{\cos (\varphi \mp \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$ [(IV.) §. 135.] findet man den Stundenwinkel wie folgt:

φ S. Br. = 38° 48' 30" log sec = 0,10833
δ S. D. = 3° 39' 9" log sec = 0,00088
$\varphi - \delta$. Br. — D. = 35° 9' 21" n cos = 81759
h ⊖ w. H. = 12° 25' 27" n sin = 21515
60244 log = 4,77991
$t = 5^h$ 7' 54",6 log ($2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t$) = 4,88912.

Wenn man nach Formel (III.) auf volle Minuten rechnet, findet man den Stundenwinkel wie folgt:

$h = 12^\circ\ 25'$

$\varphi = 38^\circ\ 49'$. . . log sec $= 0{,}10838$

$p = 86^\circ\ 21'$. . . log cosec $= 0{,}00088$

$S = 68^\circ\ 47',5$. . log cos $= 9{,}55842$

$S - h = 56^\circ\ 22',5$. . log sin $= 9{,}92048$

$^{2})\ 19{,}58816$

$\frac{1}{2}t = 2^h\ 33'\ 58'',3$ log sin $= 9{,}79408$

$t = 5^h\ 7'\ 56'',6$ also nur $2''$ grösser, als wenn man auf Secunden rechnet.

Beispiel 2. 1852 den 25. September in Gibraltar unweit der nördlichen Moole in $36^\circ\ 9'\ 20''$ NBr. und $5^\circ\ 19'$ WL. von Greenwich wurden nachstehende Höhen über einem künstlichen Horizonte zur Bestimmung der Uhr-Correction gemessen. (I. C. $= + 0'\ 40''$, ungefähre U. C. $= - 1^h\ 2'$ geg. mittl. Zeit, Barometer $= 30'',05$ Engl., Thermometer $= 80^\circ,7$ Fahrenheit.)

$3^h\ 9'\ 12''$ ⊙ $82^\circ\ 0'\ 0''$	Uhrzeit . . . $= 3^h\ 10'$ d. 25. Sept. A.
$9'\ 44''.5$ $81^\circ\ 50'\ 0''$	ungef. U. C. $= - 1^h\ 2'$ geg. mittl. Zt.
$10'\ 18'',5$ $40'\ 0''$	ung. mittl. Zt. $= 2^h\ 8'$ d. 25. Sept. A.
$3^h\ 9'\ 45''$ $81^\circ\ 50'\ 0''$	L. in Zeit . . $= + 21'$
I. C. $+ 0'\ 40''$	ung. Gr. m. Z. $= 2^h\ 29'$ d. 25. Sept. A.
$^{2})\ 81^\circ\ 50'\ 40''$	
⊙ scheinb. Höhe . . . $40^\circ\ 55'\ 20''$	⊙ Decl. $= 1^\circ\ 3'\ 14''$ S.
mittl. Refr. $1'\ 6''$	90°
Ber. f. Bar. $+ 1''$ — $0'\ 57''$	⊙ Poldist. . . $= 91^\circ\ 3'\ 14''$ N.,
» » Thr. $- 4''$	
Parallaxe. . . $- 6''$	Zeitgl. $= - 8'\ 30'',5$ auf w. Zeit.
⊙ w. Höhe $40^\circ\ 54'\ 23''$	
⊙ Halbm. $+ 15'\ 59''$	
⊖ w. Höhe $41^\circ\ 10'\ 22''$.	

$h = 41^\circ\ 10'\ 22''$

$\varphi = 36^\circ\ 9'\ 20''$ log sec $= 0{,}09290$

$p = 91^\circ\ 3'\ 14''$ log cosec $= 0{,}00007$

$S = 84^\circ\ 11'\ 28''$ log cos $= 9{,}00522$

$S - h = 43^\circ\ 1'\ 6''$ log sin $= 9{,}83393$

$^{2})\ 18{,}93212$

$\frac{1}{2}t = 1^h\ 8'\ 1'',3$ log sin $= 9{,}46606$

2

$t = 2^h\ 16'\ 2'',6$

w. Zeit $= 2^h\ 16'\ 2'',6$

Zeitgl. $= - 8'\ 30'',5$ a. w. Zt.

mittl. Zt. $= 2^h\ 7'\ 32'',1$ d. 25. Ab.

Uhrzeit $= 3^h\ 9'\ 45'',0$ d. 25. Ab.

Uhrcor. $= - 1^h\ 2'\ 12'',9$ geg. mittl. Zeit.

Nach Formel (IV.) findet man den Stundenwinkel:

$\varphi = + 36^\circ\ 9'\ 20''$ log sec $= 0{,}09290$

$\delta = - 1^\circ\ 3'\ 14''$ log sec $= 0{,}00007$

$\varphi - \delta = 37^\circ\ 12'\ 34''\,n$ cos $= 79643$

$h = 41^\circ\ 10'\ 22''\,n$ sin $= 65833$

13810 log. $= 4{,}14019$

$t = 2^h\ 16'\ 2'',5$ log Stundenw. . . $= 4{,}23316$.

§. 139.

Aus der Höhe eines Fixsterns, eines Planeten oder des Mondes die wahre oder mittlere Zeit und die Uhrcorrection zu bestimmen.

Regel.

1. Berechne den Stundenwinkel, wie in §. 138. gezeigt ist.

2. Die AR. des Gestirns addire zu dessen Stundenwinkel, wenn dieser West vom Meridian war; befand jenes sich abér Ost vom Meridian, so subtrahire den Stundenwinkel von der AR. (diese vergrössert um 24^h, wenn erforderlich); das Resultat ist die AR. des Meridians oder die Sternzeit*) (§. 134.).

3. Aus der so gefundenen Sternzeit finde man nach §. 109. oder §. 110. die mittlere oder die wahre Zeit, und aus Vergleichung dieser mit der Uhrzeit der Beobachtung die Uhrcorrection.

Beispiel 1. 1853 den 30. Juni nach dem Besteck auf 36° 22′ NBr. und 3° 37′ WL. von Greenwich, I. C. = + 1′, Augesh. 11′ Rheinl., ungef. U. C. = − 1^h 7′ geg. mittl. Zeit. Man soll aus nachstehender Beobachtung die Uhrcorrection finden.

10^h 57′ 51″	✱ Spica	25° 32′
58′ 35″		25′
59′ 16″		15′
11^h 0′ 1″		8′
0′ 44″		2′
10^h 59′ 17″,4		25° 16′,4
I. C. . . . + 1′		
Kimmt. . − 3′,3		− 4′,3
Refr.. . . − 2′,0		
✱ w. Höhe =		25° 12′,1.

Uhrzeit	=	10^h 59′ d. 30. Juni Ab.
ungef. U. C. . . .	=	− 1^h 7′ geg. mittl. Zt.
ungef. mittl. Zeit .	=	9^h 52′ d. 30. Juni Ab.
WL. in Zeit . . .	=	+ 14′
ungef. Gr. mittl. Zt.	=	10^h 6′ d. 30. Juni Ab.
m. ⊙ AR.	=	6^h 35′ 31″,2
✱ AR.	=	13^h 17′ 28″,0
✱ δ	=	10° 23′,6 S.
		90°
p	=	100° 23′,6.

h =	25° 12′,1		
φ =	36° 22′	 lg sec	= 0,09407
p =	100° 23′,6	 lg cosec	= 0,00718
S =	80° 58′,9	 lg cos	= 9,19520
$S-h$ =	55° 46′,8	 lg sin	= 9,91746
			²) 19,21391
$\frac{1}{2}t$ =	1^h 35′ 26″,8	lg sin	= 9,60695
	2		
t =	3^h 10′ 53″,6		
✱ AR. =	13^h 17′ 28″,0		
✱ Zeit =	16^h 28′ 21″,6		
m. ⊙ AR. =	6^h 35′ 31″,2		
mittl. astron. Zeit =	9^h 52′ 50″,4	d. 30. Juni,	
Uhrzeit =	10^h 59′ 17″,4	d. 30. Juni,	
U. C. =	−1^h 6′ 27″	geg. mittl. Zeit.	

*) Sollte in Schulaufgaben nur eine Höhe gegeben und nicht gesagt sein, ob das Gestirn Ost oder West vom Meridian war, so kann man dieses leicht aus der ungefähr bekannten Zeit der Beobachtung und der oberen Culminationszeit des Gestirns ermitteln; denn man findet die ungefähre obere Culminationszeit, wenn man die AR. der Sonne von der AR.

Beispiel 2. 1852 den 1. September n. d. Besteck auf 34° 33′ NBr. und 17° 53′ OL. von Greenwich, Augesh. 15′ Rheinl., I. C. = + 1′, ungef. U. C. = + 39′ geg. mittl. Zeit. Man soll aus nachstehender Beobachtung die Zeit und die U. C. bestimmen.

0ʰ 9′ 47″	✻ Aldebaran 21° 57′	
10′ 32″	22° 6′	
11′ 9″	14′	
11′ 41″	19′	
12′ 11″	26′	
12′ 44″	33′	
0ʰ 11′ 21″	22° 16′	
I. C. + 1′		
Kimmt. . . — 3′,8	— 5′,1	
Refr. — 2′,3		
✻ w. Höhe	= 22° 10′,9.	

Uhrzeit	= 0ʰ 11′ d. 1. Sept. Mrg.
ungef. U. C.	= + 39′ geg. mittl. Zt.
mittlere Zeit	= 0ʰ 50′
OL. in Zeit	= 1ʰ 12′
ungef. mittl. Gr. Zt.	= 11ʰ 38′ d. 31. Aug. Ab.
m. ⊙ AR.	= 10ʰ 41′ 10″
✻ AR.	= 4ʰ 27′ 27″
✻ δ	= 16° 12′ 31″ N.

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

φ =	+ 34° 33′	 lg sec	= 0,08427
δ =	+ 16° 12′,5	 lg sec	= 0,01761
$\varphi - \delta$ =	18° 20′,5 *n* cos = 94920		
h =	22° 10′,9 *n* sin = 37754		
	57166 lg		= 4,75714
t =	4ʰ 55′ 37″	 lg Stundenw.	= 4,85902
✻ AR. =	4ʰ 27′ 27″		
✻ Zeit =	23ʰ 31′ 50″		
m. ⊙ AR. =	10ʰ 41′ 10″		
mittl. astr. Zeit =	12ʰ 50′ 40″ den 31. Aug.		
Uhrzeit =	12ʰ 11′ 21″ den 31. Aug.		
U. C. =	+ 39′ 19″ geg. mittl. Zeit.		

Beispiel 3. 1852 den 27. Januar Abends auf 0° 0′ Br. und 20° WL. von Greenw., Augesh. 16′ Rheinl., I. C. = — 0′ 35″, ungef. U. C. = + 0ʰ 36′ geg. mittl. Zeit, ist beobachtet zur Zeitbestimmung:

6ʰ 39′ 0″ ♀	13° 7′ 40″
I. C. =	— 0′ 35″
	13° 7′ 5″
Kimmtiefe =	— 3′ 58″
♀ scheinb. Höhe =	13° 3′ 7″
Refr. — Paral. . =	— 3′ 57″
♀ w. Höhe =	12° 59′ 10″.

Uhrzeit	= 6ʰ 39′ d. 27sten Ab.
ungef. U. C.	= + 36′ geg. mittl. Zeit,
ungef. mittl. Zeit . .	= 7ʰ 15′ d. 27sten Ab.
WL. in Zeit	= 1ʰ 20′
ungef. mittl. Gr. Zt.	= 8ʰ 35′ d. 27sten Ab.
m. ⊙ AR.	= 20ʰ 25′ 7″,4
♀ AR.	= 22ʰ 32′ 50″,9
♀ δ	= 10° 45′ 1″ S.

des Gestirns (vergrössert durch 24ʰ, wenn erforderlich) abzieht. Für die Planeten und für den Mond findet man übrigens die Culminationszeiten in den Ephemeriden angegeben.

$$\begin{array}{rll}
\varphi = & +\ 0^\circ\ 0' \ldots\ldots\ldots\ldots & \lg \sec = 0{,}00000 \\
\delta = & -\ 10^\circ\ 45'\ 1'' \ldots\ldots\ldots\ldots & \lg \sec = 0{,}00769 \\
\varphi - \delta = & 10^\circ\ 45'\ 1''\ n\cos = 98245 & \\
h = & 12^\circ\ 59'\ 10''\ n\sin = 22472 & \\
 & 75773\ \lg \ldots\ldots & = 4{,}87951 \\
t = & 5^h\ 7'\ 6'',5 \ldots\ldots\ldots & \lg \text{Stundenw.} = 4{,}88720 \\
♀\ \text{AR} = & 22^h\ 32'\ 50'',9 & \\
\text{Sternzeit} = & 27^h\ 39'\ 57'',4 & \\
\text{m.}\ \odot\ \text{AR.} = & 20^h\ 25'\ 7'',4 & \\
\text{mittl. astr. Zeit} = & 7^h\ 14'\ 50''\ \text{den 27. Januar,} & \\
\text{Uhrzeit} = & 6^h\ 39'\ 0''\ \text{den 27. Januar,} & \\
\text{U. C.} = & +\ 35'\ 50''\ \text{geg. mittl. Zeit.} &
\end{array}$$

Beispiel 4. 1853 den 14. Juli auf 54° 21',3 NBr. und 18° 41',2 OL. von Greenwich, ungef. U. C. = + 22',5 geg. mittl. Zeit; I. C. = — 6' 35'; Barom. 28" 1''',4 Französisch; Therm. + 23°,2 Reaum. ist beobachtet zur Zeitbestimmung, Abends um:

$2^h\ 59'\ 57'',5$	☾ $31^\circ\ 17'\ 0''$
$3^h\ 0'\ 13'',0$	$22'\ 30''$
$0'\ 26'',0$	$25'\ 0''$
$0'\ 40'',5$	$28'\ 10''$
$0'\ 56'',5$	$33'\ 50''$
$3^h\ 0'\ 26'',6$	$31^\circ\ 25'\ 18''$
I. C. =	$-\ 6'\ 35''$
	²) $31^\circ\ 18'\ 43''$
	$15^\circ\ 39'\ 22''$
☾ Halbmesser =	$-\ 16'\ 10''$
	$15^\circ\ 23'\ 12''$
Höhenp. — Refr. =	$+\ 53'\ 37''$
☾ w. H. =	$16^\circ\ 16'\ 49''$.

Uhr-Zeit d. Beob. . =	$3^h\ 0',4$ Ab. d. 14. Juli.
U. C. =	$+22',5$ geg. mittl. Zt.
ungef. mittl. Zeit . . =	$3^h\ 22',9$
OL. in Zeit =	$1^h\ 14',7$
ungef. mittl. Gr. Zeit =	$2^h\ 8',2$ Ab. d. 14. Juli.
m. ⊙ AR. =	$7^h\ 29'\ 24'',5$
☾ AR. . . . =	$13^h\ 59'\ 25'',1$
☾ δ =	$-8^\circ\ 1'\ 7''$
☾ Horizpl. =	$58'\ 59''$
☾ Halbmess. =	$16'\ 10''$.

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2} t = [\cos(\varphi - \delta) - \sin h] \cdot \sec\varphi \cdot \sec\delta$$

$$\begin{array}{rll}
\varphi = & +\ 54^\circ\ 21'\ 18'' \ldots\ldots\ldots\ldots & \lg \sec = 0{,}23451 \\
\delta = & -\ 8^\circ\ 1'\ 7'' \ldots\ldots\ldots\ldots & \lg \sec = 0{,}00427 \\
\varphi - \delta = & 62^\circ\ 22'\ 25''\ n\cos = 46370 & \\
h = & 16^\circ\ 16'\ 49''\ n\sin = 28034 & \\
 & 18336\ \lg \ldots\ldots & = 4{,}26333 \\
t = & 3^h\ 7'\ 55'',5 \ldots\ldots\ldots & \lg \text{Stundenw.} = 4{,}50211 \\
☾\ \text{AR.} = & 13^h\ 59'\ 25'',1 & \\
✱\ \text{Zeit} = & 10^h\ 51'\ 29'',6 & \\
\text{m.}\ \odot\ \text{AR.} = & 7^h\ 29'\ 24'',5 & \\
 & 3^h\ 22'\ 5'',1\ \text{mittl. astr. Zeit der Beob. den 14. Juli.} & \\
 & 3^h\ 0'\ 26'',6\ \text{Uhrzeit der Beob. d. 14. Juli.} & \\
\text{U. C.} = & +\ 21'\ 38'',5\ \text{geg. mittl. Zeit.} &
\end{array}$$

§. 140.

Bei Zeitbestimmungen durch Mondhöhen hat ein Fehler in der ungefähren Greenwicher Zeit einen grösseren Einfluss auf das Resultat, als bei andern Himmelskörpern, weil ein Fehler von einer Minute in der Greenwich. Zeit die Rectascension des Mondes nahe 2" verkehrt giebt;

auch ändert die Declination des Mondes sich fast immer mehr, als die der andern Gestirne, wodurch seine Poldistanz fehlerhaft wird, wenn man die Greenwicher Zeit nicht genau kennt. Wenn der Mond aber seine grösste nördliche oder südliche Abweichung hat, so verändert dessen Declination sich am wenigsten, und die Zeitbestimmungen aus Mondhöhen wären demnach zu dieser Zeit, in Bezug auf den etwaigen Fehler in der Greenwicher Zeit, am zuverlässigsten; der Fehler in der Rectascension des Mondes bleibt aber fast immer derselbe.

Bei Zeitbestimmungen aus Fixsternhöhen hat ein Fehler in der Greenwicher Zeit dagegen nur Einfluss auf die Rectascension der Sonne, und auch dieser kann so weit beseitigt werden, dass nur noch die etwa fehlerhafte Länge des Ortes ihre Wirkung darauf behält (siehe §. 109.).

Man kann die Fehler, welche in dem Resultate der Zeitbestimmung aus Höhen der Gestirne dadurch entstehen, dass Höhe, Breite und Poldistanz fehlerhaft sind, zwar nach den Formeln (XI.), (XIII.) und (XIV.), §. 136. ermitteln, wenn man aber das Azimuth oder den parallactischen Winkel nicht kennt, so wird die Rechnung nach den gedachten Formeln etwas beschwerlich. Leichter ist das folgende Verfahren, welches sich aus der Berechnung des Stundenwinkels nach Formel (III.) §. 135. ergiebt, wonach der Fehler im Stundenwinkel, den eine Minute in dem betreffenden Bestimmungsstücke hervorbringt, leicht gefunden werden kann, und wenn man diesen mit dem Fehler des Bestimmungsstückes, in Minuten ausgedrückt, multiplicirt, so hat man den entsprechenden Fehler des Stundenwinkels.

1. Zu finden, wie viel eine Minute in der Höhe den Stundenwinkel verkehrt giebt.

Regel. Nimm die Differenz für 100″ des log cos der halben Summe und des log sin der Differenz. Bezeichne diese Differenzen für 100″ mit +, wenn die Logarithmen der trigonometrischen Functionen wachsen, mit —, wenn sie abnehmen, und subtrahire das Letztere algebraisch von dem Ersteren; diese algebraische Differenz mit 2 multiplicirt und dieses Product mit der Differenz für 100″ vom log sin des halben Stundenwinkels dividirt, giebt die Anzahl Zeitsecunden des Stundenwinkels, welche dem Fehler von einer Minute in der Höhe entsprechen.

Wenn die Höhe zu gross, so ist der gefundene Stundenwinkel zu klein, und wenn die Höhe zu klein, so ist der gefundene Stundenwinkel zu gross.

2. Zu finden, wie viel ein Fehler von einer Minute in der Breite den Stundenwinkel fehlerhaft macht.

Regel. Nimm die doppelte Differenz für 100″ des log sec der Breite, die Differenz für 100″ des log cos der halben Summe und die Differenz für 100″ des log sin der Differenz. Diese Differenzen der Logarithmen bezeichne mit +, wenn die Logarithmen der trigonometrischen Functionen wachsen, hingegen mit —, wenn die Logarithmen abnehmen; nimm die algebraische Summe, multiplicire dieselbe mit 2 und dividire dieses Product mit der Differenz für 100″ vom log sin des halben Stundenwinkels, so ist der Quotient eine Anzahl Zeitsecunden des Stundenwinkels, welche dem Fehler von einer Minute in der Breite entsprechen.

Ist die algebraische Summe der addirten Differenzen der Logarithmen positiv, so ist der Fehler im Stundenwinkel gleichartig mit dem Fehler in der Breite; wenn aber diese Summe negativ ist, so ist der Fehler im Stundenwinkel ungleichartig mit dem Fehler der Breite.

3. Den Fehler des Stundenwinkels zu finden, der durch einen Fehler von einer Minute in der Poldistanz verursacht wird.

Regel. Nimm die doppelte Differenz für 100″ des log cosec der Poldistanz, die Differenz für 100″ des log cos der halben Summe und die Differenz für 100″ des log sin der Differenz, bezeichne diese Grössen mit + oder —, je nachdem die Logarithmen der trigonometrischen Functionen wachsen oder abnehmen, und addire diese 3 aufgeschriebenen Differenzen mit Rücksicht auf ihre Zeichen.

Diese Summe multiplicire mit 2 und dividire mit der Differenz für 100″ vom log sin des halben Stundenwinkels, so ist der Quotient eine Anzahl Zeitsecunden, welche durch den Fehler von einer Minute in der Poldistanz im Stundenwinkel verursacht werden.

Ist nun die algebraische Summe jener drei Differenzen positiv, so ist der Fehler im Stundenwinkel gleichartig mit dem Fehler in der Poldistanz; wenn aber die Summe negativ ist, so ist der Fehler im Stundenwinkel ungleichartig mit dem Fehler in der Poldistanz.

In Beispiel 1. (§. 138.) ist die wahre Höhe 12° 25′ 27″, SBr. = 38° 48′ 30″ und die S. PD. = 86° 20′ 51″; das Azimuth = S. 95° 24′ Ost und der parallactische Winkel = 51° 1′.

1. Wenn man die Höhe eine Minute zu gross annimmt, so ist nach Regel 1. und Formel (XI.) §. 136.

$h = 12^\circ\ 25'\ 27''$
SBr. $= 38^\circ\ 48'\ 30''$
S. PD. $= 86^\circ\ 20'\ 51''$
$S = 68^\circ\ 47'\ 24''$ Diff. log cos für 100″ = — 543
Diff. $= 56^\circ\ 21'\ 57''$ » log sin » 100″ = + 140
— 683
2

½ Stundenw. = $2^h\ 33'\ 57''$, Diff. d. log sin f. 100″ = 265 in |— 1366| = — 5″,15 in Zeit, welche der Stundenwinkel zu klein gefunden wird, wenn die Höhe eine Minute zu gross ist.

$dt = -\frac{dh}{\sin A \cdot \cos \varphi}$, worin dt und dh stets entgegengesetzte Zeichen haben. (XI.) §. 136.

$dh = +\ 1'$ log = 0,00000
$A = 95^\circ\ 24'$ log cosec = 0,00193
Br. $= 38^\circ\ 48'\frac{1}{2}$ log sec . = 0,10833
0,11026 n
log 4 . . . = 0,60206
log dt . . = 0,71232 n, also $dt = -$ 5,16 Zeitsecunden.

2. Wenn man die Breite eine Minute zu gross annimmt, so ist
Br. $= 38^\circ\ 48'\ 30''$ Diff. log sec von 100″ · 2 = + 338
$S = 68^\circ\ 47'\ 24''$ » log cos » 100″ = — 543
Diff. $= 56^\circ\ 21'\ 57''$ » log sin » 100″ = + 140
— 65
2

$\frac{1}{2}t = 2^h\ 33'\ 57''$, Diff. log sin von 100″ = 265 in |— 130| = — 0″,49 in Zeit, welche der Stundenwinkel also zu klein gefunden wird, wenn die Breite eine Minute zu gross genommen wurde.

Nach Formel (XIII.) §. 136. ist $dt = \frac{d\varphi \cdot \cot g A}{\cos \varphi}$, worin dt und $d\varphi$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem das Azimuth vom Meridian des oberen Weltpols gezählt, spitz oder stumpf ist.

$d\varphi = +\ 1'$ log $= 0{,}00000$
$A = 95^\circ\ 24'$ log cotg $= 8{,}97556 - 10\,n$
$\varphi = 38^\circ\ 48'\tfrac{1}{2}$ log sec $= 0{,}10833$
log dt $= 9{,}08389 - 10\,n$
also dt in Bogenminuten $= -0{,}1213$
4
oder dt in Zeitsecunden $= -0{,}4852$, also $0'',5$
um welche der Stundenwinkel zu klein wird, wenn die Breite $1'$ zu gross ist.

3. Wenn man die Poldistanz eine Minute zu gross nimmt, so ist:

PD. $= 86^\circ\ 20'\ 51''$	Diff. log cosec	von $100'' \cdot 2$	$= -$	26
$S = 68^\circ\ 47'\ 24''$	» log cos	» $100''$	$= -$	543
Diff. $= 56^\circ\ 21'\ 57''$	» log sin	» $100''$	$= +$	140
			$-$	429
				2

$\tfrac{1}{2}t = 2^h\ 33'\ 57''$, die Diff. log sin f. $100'' = 265$ in $|-858| = -3'',24$ in Zeit; der Stundenwinkel wird also 3,2 Zeitsecunden zu klein gefunden, wenn die Poldistanz eine Minute zu gross genommen ist.

Nach Formel (XIV.) §. 136. ist $dt = -\dfrac{dp \cdot \text{cotg}\, g}{\cos \delta}$, worin dt und dp gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem der parallactische Winkel g stumpf oder spitz ist.

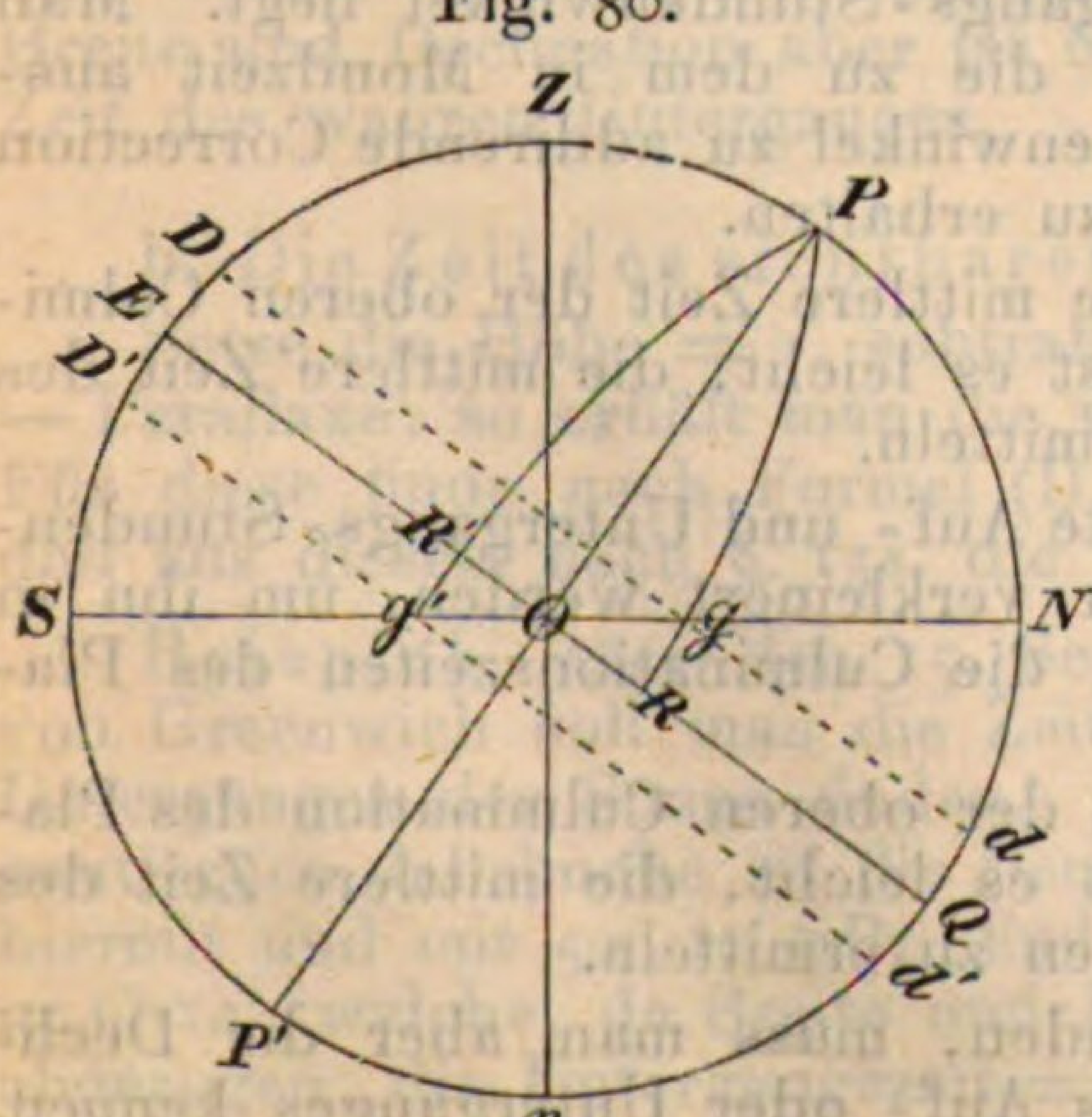
$dp = +\ 1'$ log $= 0{,}00000$
$g = 51^\circ\ \ 1'$ log cotg $= 9{,}90811 - 10$
$\delta = 3^\circ\ 39'$ log sec $= 0{,}00088$
log dt $= 9{,}90899 - 10\,n$
also dt in Bogenminuten $= -0{,}81$
4
$dt = -3{,}24$ Zeitsecunden; der Stundenwinkel ist also 3,2 Zeitsecunden zu klein gefunden.

§. 141.

Die Zeit des wahren und des scheinbaren Auf- und Unterganges eines Himmelskörpers zu finden, wenn die Lage des Ortes und das Datum gegeben ist.

Der wahre Auf- oder Untergang eines Gestirns findet statt, wenn der Mittelpunkt desselben sich im wahren Horizonte befindet; ein Himmelskörper aber geht scheinbar auf oder unter, wenn der Mittelpunkt desselben sich im scheinbaren Horizonte, oder — wenn das Auge über dem Meere erhaben ist — in der Kimmung befindet.

Fig. 80.



Es sei (Fig. 80.) SZN der Himmels-Meridian des Ortes, P der obere Pol, EQ der Aequator und Dd sowie $D'd'$ seien Declinationsparallele.

Ein Gestirn, dessen Declination $= ED$, also mit der Breite gleichnamig ist, wird sich beim wahren Auf- oder Untergange in g, wo der Declinationsparallel den wahren Horizont schneidet, befinden, und zwar beim

Aufgange an der östlichen und beim Untergange an der westlichen Seite des Meridians.

Ebenso wird das Gestirn, dessen Declination $= ED'$ ist, sich in g' beim wahren Auf- oder Untergange an der Ost- oder Westseite des Meridians befinden.

Man denke sich die Stundenkreise PR und PR' durch g und g' gelegt, so ist das sphärische Dreieck $OR'g'$ bei R' und OgR bei R rechtwinklig, $\angle SOR'$ ist die Aequatorhöhe $= \angle NOR$, dem Complemente der Polhöhe und die Katheten gR oder $g'R'$ gleich der Declination des Gestirns.

Die Katheten OR und OR' sind Maasse der Winkel OPR und OPR', welche Ascensionaldifferenz genannt werden und, in Zeit ausgedrückt, angeben, wie viel der Auf- oder Untergangs-Stundenwinkel des Gestirns vom oberen Meridian gezählt, grösser oder kleiner als 6^h ist, je nachdem Breite und Declination gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, wie aus der Figur zu ersehen.

Nach der Napier'schen Regel geben die Dreiecke OgR oder $Og'R'$ die Gleichung

$$\sin RO = \operatorname{cotg} \angle RON \cdot \operatorname{tg} Rg,$$

d. i. $\sin$ Ascensionaldifferenz $= \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$ (I.),
worin φ die Breite und δ die Declination bezeichnet.

Die nautische Tafel XLII. enthält für gleichnamige Breite und Declination den Auf- und Untergangs-Stundenwinkel, also $6^h +$ Ascensionaldifferenz; ist Breite und Declination aber ungleichnamig, so giebt der Werth aus dieser Tafel, von 12^h subtrahirt, den Auf- und Untergangs-Stundenwinkel.

Der Untergangs-Stundenwinkel der Sonne ist zugleich die wahre Zeit des Unterganges, folglich 12^h weniger dieser Zeit gleich der wahren Zeit des Aufganges derselben.

Der Auf- und Untergangs-Stundenwinkel eines Fixsterns muss um die Retardation (nautische Tafel XXV.) verkleinert werden, so erhält man denselben bekanntlich in mittlerer Zeit. Wenn man dann nach §. 131. F. 1. die mittlere Zeit der oberen Culmination des Sterns gefunden hat, so ist diese + dem Untergangs-Stundenwinkel in mittlerer Zeit = der mittleren Zeit des wahren Unterganges, und die mittlere Zeit der oberen Culmination minus Aufgangs-Stundenwinkel in mittlerer Zeit = der mittleren Zeit des wahren Aufganges des Sterns.

Beim Monde muss man die Verspätung für den gegebenen Tag nehmen, das ist der Unterschied der beiden oberen Culminationen, zwischen welchen der gesuchte Auf- oder Untergangs-Stundenwinkel liegt. Man kann dann nach einfacher Proportion die zu dem in Mondzeit ausgedrückten Auf- und Untergangs-Stundenwinkel zu addirende Correction finden, um denselben in mittlerer Zeit zu erhalten.

Wenn man dann nach §. 131. B. die mittlere Zeit der oberen Culmination des Mondes gefunden hat, so ist es leicht, die mittlere Zeit des Auf- oder Unterganges desselben zu ermitteln.

Bei den Planeten muss der berechnete Auf- und Untergangs-Stundenwinkel in Planetenzeit vergrössert oder verkleinert werden, um ihn in mittlerer Zeit zu erhalten, je nachdem die Culminationszeiten des Planeten zu- oder abnehmen.

Hat man demnach die mittlere Zeit der oberen Culmination des Planeten nach §. 131. D. gefunden, so ist es leicht, die mittlere Zeit des wahren Auf- oder Unterganges desselben zu ermitteln.

Um die Ascensionaldifferenz zu finden, muss man aber die Declination des Himmelskörpers zur Zeit des Auf- oder Unterganges kennen.

Hierzu kann man näherungsweise gelangen, wenn man erst die Declination des Gestirns für die Zeit seiner oberen Culmination nimmt, dafür die Ascensionaldifferenz und die Zeit des Auf- oder Unterganges findet, welche man dann als die Zeit des Auf- bezw. Unterganges betrachtet, und die Rechnung wiederholt. In der Praxis hat aber diese genaue Berechnung des wahren Auf- und Unterganges der Gestirne keinen Werth, denn den wahren Horizont kann man nicht sehen, folglich auch den wahren Auf- und Untergang der Gestirne nicht beobachten. Es gehen übrigens, wie Figur 80. zeigt, nur diejenigen Gestirne auf und unter an einem Orte, deren Declination kleiner als das Complement der Breite dieses Ortes ist.

Um die Zeit des Auf- oder Unterganges eines Gestirnes über dem Seehorizonte zu finden, berechne man erst die ungefähre Zeit des wahren Auf- oder Unterganges und verbessere für diese die Declination des Himmelskörpers.

Man setze ferner die Höhe $= 0$, wende darauf die Kimmtiefe, Refraction und Höhenparallaxe an, so hat man die wahre Höhe, woraus man nach §. 135. den Stundenwinkel finden kann. Aus dem so gefundenen Stundenwinkel (vom oberen Meridian) findet man dann entweder nach §. 134. die mittlere Zeit, oder auch wie eben angegeben ist. Will man genauer verfahren, so muss man, besonders beim Monde, die Rechnung wiederholen.

A. Regel. Die Zeit des wahren und sichtbaren Auf- und Unterganges der Sonne zu finden.

a. Die Zeit des wahren Auf- und Unterganges zu finden.

Nimm die Declination für den Mittag des gegebenen Tages aus der Ephemeride, mit dieser und der Breite des Ortes aus der nautischen Tafel XLII. die Stunden und Minuten, welche, je nachdem Breite und Declination gleichnamig oder ungleichnamig sind, die wahre Zeit des wahren Unterganges oder Aufganges der Sonne geben.

Die wahre Zeit des wahren Aufganges ist sehr nahe $= 12^h$ — der wahren Zeit des wahren Unterganges, und die wahre Zeit des wahren Unterganges ist nahe $= 12^h$ — der wahren Zeit des wahren Aufganges.

Will man genauer verfahren, so nehme man die so gefundene Zeit als die ungefähre Zeit des Auf- oder Unterganges an und suche für dieselbe die Declination der Sonne. Mit dieser und der Breite berechne die Ascensionaldifferenz nach Gleichung (I.).

Bei gleichnamiger Breite und Declination ist $6^h +$ Ascensionaldifferenz $=$ der wahren Zeit des wahren Unterganges, bei ungleichnamiger Breite und Declination aber ist 6^h — Ascensionaldifferenz $=$ der wahren Zeit des wahren Unterganges.

b. Die Zeit des sichtbaren Auf- oder Unterganges zu finden.

Setze die Höhe $= 0$, subtrahire davon die Kimmtiefe und Refraction — Parallaxe, so erhält man die wahre Höhe, welche stets negativ wird. Für diese finde nach Formel (III.) oder (IV.) §. 135. den Stundenwinkel und aus diesem nach §. 134. die wahre oder mittlere Zeit.

Beispiel. 1853 den 15. September auf 50° 10′ SBr. und 50° WL. von Greenwich soll man die Zeit des wahren und sichtbaren Auf- und Unterganges der Sonne finden. Augeshöhe 25 Fuss Rheinl. Nach dem nautischen Jahrbuche ist die Declination den 15. September 2° 58′ Nord; hiermit und mit 50° 10′ SBr. findet man in Tafel XLII. die Aufgangszeit $= 6^h\ 14'$, welche, da Breite und Declination ungleichnamig sind, von 12^h abgezogen, die Untergangszeit $= 5^h\ 46'$ geben, also ist

der ungef. wahre ⊙ Aufg. . . . $= 6^h\ 14'$ Morgs.
WL. in Zeit $3^h\ 20'$

ungef. Greenw. w. Zeit d. Aufg. $= 9^h\ 34'$ Morgs.
der ungef. wahre ⊙ Unterg. . . $= 5^h\ 46'$ w. Zt. Ab.
WL. in Zeit $3^h\ 20'$

ungef. Greenw. w. Zt. d. Unterg. $= 9^h\ 6'$ Abends:
folglich ist die Declination für den Aufgang zu verbessern für $2^h\ 26'$ vor dem Mittage, und die für den Untergang für $9^h\ 6'$ nach dem Mittage den 15. September.

Nach dem nautischen Jahrbuche, den 15. September

⊙ $\delta = 2^\circ\ 58'\ 13''$ N. $2^\circ\ 58'\ 13''$ N.

stündl. Diff. $57'',8$		stündl. Diff. $57'',9$
2,4		9,1
2312		521,1
1156		5.8
138.74 + $2'\ 19''$		526.9 — $8'\ 47''$

⊙ δ beim Aufg. $= 3^\circ\ 0'\ 32''$ N; ⊙ δ b. Unterg. $= 2^\circ\ 49'\ 26''$ N.

SBr. $= 50^\circ\ 10'$ log tang $= 0,07875$
⊙ δ (Aufg.) $= 3^\circ\ 1'$ log tang $= 8,72181$
Ascensional-Differ. $= 0^h\ 14'\ 30''$ log sin $= 8,80056$
wahrer ⊙ Aufg. . . $= 6^h\ 14'\ 30''$ w. Zt. Morgens.
SBr. $= 50^\circ\ 10'$ log tang $= 0,07875$
⊙δ(Unterg.) $= 2^\circ\ 49'$ log tang $= 8.69196$
Ascensional-Differ. $= 0^h\ 13'\ 31''$ log sin $= 8,77071$
6^h
wahrer ⊙ Unterg. $= 5^h\ 46'\ 29''$ w. Zt. Abends.

⊙ Höhe $= 0^\circ\ 0'$
Kimmtiefe $= -\ 5'$
⊖ scheinb. Höhe . $= -0^\circ\ 5'$
Refr. — Paral. . . . $= -0^\circ\ 36'$
⊖ w. Höhe $= -0^\circ\ 41'$.

Nach Formel (III.) §. 135. den Stundenwinkel des Aufganges zu finden.

$h = -\ 0^\circ\ 41'$
$\varphi = 50^\circ\ 10'$ log sec $= 0,19344$
$p = 93^\circ\ 0'$ log cosec $= 0,00060$
$S = 71^\circ\ 14',5$. . . log cos $= 9,50728$
$S - h = 71^\circ\ 55',5$. . . log sin $= 9,97802$
$^2)\ 19,67934$
$\frac{1}{2}t = 2^h\ 54'\ 56''$ log sin $= 9,83967$
$t = 5^h\ 49'\ 52''$
also $6^h\ 10'\ 8''$ Morgens w. Zt. des sichtb. Aufganges.

Nach Formel (IV.) §. 135. den Stundenwinkel des Unterganges zu finden.

$\varphi = -50^\circ\ 10'$ log sec $= 0,19344$
$\delta = +\ 2^\circ\ 50'$ log sec $= 0,00060$
$\varphi - \delta = 53^\circ\ 0'$ *n.* cos $= 60182$
$h = -\ 0^\circ\ 41'$ *n.* sin $= -01193$
61375 log $= 4,78799$
$t = 5^h\ 50'\ 42''$ log Stundenw. . . $= 4,98203$,
also w. Zeit des sichtb. Unterganges um $5^h\ 50'\ 42''$ Abends.

Anmerkung. Wenn man bei negativen Höhen den Stundenwinkel nach Formel (III.) findet, so hat man darauf Rücksicht zu nehmen, wenn man die halbe Summe und Differenz sucht.

Nach Formel (IV.) aber muss *n* sinus der negativen Höhe zum *n* cosinus des Complementes der Meridianhöhe addirt werden, während bei positiven Höhen deren *n* sinus stets subtrahirt wird.

B. Regel. Die mittlere Zeit des wahren und sichtbaren Auf- oder Unterganges des Mondes zu finden.

a. Die mittlere Zeit des wahren Auf- und Unterganges zu finden.

Suche die mittlere Zeit der oberen Culmination nach §. 131. B. und für diese $\mp$ 6^h, je nachdem die Zeit des Auf- oder Unterganges gesucht wird, ermittele mit Hülfe der Ephemeride die entsprechende Declination des Mondes und nehme mit dieser und der gegebenen Breite des Ortes aus der nautischen Tafel XLII. den entsprechenden Auf-, bezw. Untergangs-Stundenwinkel, vergrössere diesen für jede Stunde um 2 Minuten, so ist derselbe dadurch in mittlere Sonnenstunden und Minuten verwandelt.

Die mittlere Zeit des wahren Aufganges ist nun gleich der oberen Culminationszeit minus dem Aufgangs-Stundenwinkel in mittlerer Zeit; die mittlere Zeit des wahren Unterganges aber ist gleich der oberen Culminationszeit + dem Untergangs-Stundenwinkel in mittlerer Zeit.*)

Will man genauere Resultate haben, so verbessere man die Declination des Mondes für die gefundene Zeit des Auf- und Unterganges, und wiederhole die Rechnung wie bei der Sonne gezeigt ist.

Auch ist es etwas genauer, wenn man die Verspätung des Mondes zwischen den beiden oberen Culminationen, zwischen welche der gesuchte Auf- oder Untergang fällt, nimmt und schliesst:

$$24^h : \text{Verspätung} = \text{der Stundenwinkel} : x,$$

die so gefundene Grösse x zum Stundenwinkel addirt, giebt denselben in mittlerer Zeit. Diese genaue Rechnung ist aber nicht nöthig, denn der Mond steht bei seinem wahren Auf- und Untergange unter dem Seehorizonte, weshalb er nicht zu sehen ist, somit sein Auf- und Untergang auch nicht beobachtet werden kann.

b. Die mittlere Zeit des sichtbaren Auf- oder Unterganges zu finden.

Suche die mittlere Zeit des wahren Auf- oder Unterganges nach vorstehender, unter a. gegebener Regel; nimm diesen Zeiten entsprechend die Declination des Mondes und finde für die beobachtete Höhe = 0 die wahre Höhe, indem die Kimmtiefe und Refraction subtrahirt, die Höhenparallaxe aber addirt wird.

Berechne ferner den Stundenwinkel nach §. 135. und finde dafür die mittlere Zeit; der Leichtigkeit wegen kann man auch die mittlere Zeit durch die schon gefundene obere Culminationszeit finden, wie bereits erklärt ist.

Man muss auch hier, wenn man genau verfahren will, die Rechnung wiederholen.

*) Fällt die obere Culminationszeit des Mondes so nahe an die Grenzen des bürgerlichen Tages, dass dieselbe — oder + des Auf- oder Untergangs-Stundenwinkels über diese Grenzen hinausgeht, so muss man, wenn der Aufgang gesucht wird, die Culminationszeit für den folgenden, wird dagegen der Untergang gesucht, für den vorhergehenden Tag finden.

Beispiel. 1853 den 22. Juli bei Memel am Leuchtthurm soll die mittlere Zeit des wahren und sichtbaren Aufganges des Mondes gefunden werden.

(Memel Leuchtthurm liegt auf 55° 43.'7 NB. und 21° 6' OL. v. Greenw.)

Nach dem nautischen Jahrb. den 22sten ☾ Culm. um 14^h 25',4
den 21sten » » 13^h 32',4

$24^h : 1^h\ 24'$ = 53' : x

4^h	6	8',8
1	4	2',2
20'	3	0',7
4	5	0',1

$x = -$ 3',0

☾ Culm. in Memel den 22sten um 14^h 22',4 m. Zt.

Den Aufgangs-Stundenwinkel zu 6^h angenommen und die OL. in Zeit = 1^h 24', von 14^h 22' abgezogen, giebt die ungefähre mittlere Greenwicher Zeit für den Aufgang = 7^h Abends den 22sten. wofür man im nautischen Jahrbuch die Declination des Mondes = 16° 22' S. und für diese und die Breite des Ortes in Tafel XLII. den

Aufgangs-Stundenwinkel	=	4^h 19' findet.
Verspätung	=	+ 9',5
Aufgangs-Stundenwinkel in mittl. Zeit	=	4^h 28',5
Mittlere Zeit der ☾ Culmination	=	14^h 22',4
Ungefähre mittl. Zeit d. w. Aufganges	=	9^h 53',9 Abends.

☾ Declination = 16° 5' S.
p = 106° 5'.

☾ beob. Höhe .	=	0° 0'			
Refraction	=	— 35'			
☾ loc. w. H. . .	=	— 0° 35'			
☾ Parallaxe . .	=	+ 58'			
h = ☾ wahre Höhe .	=	0° 23'			
φ	=	55° 44' . . .	log sec	=	0,24946
p	=	106° 5' . . .	» cosec	=	0,01734
S	=	81° 6' . . .	» cos	=	9,18952
$S-h$	=	80° 43' . . .	» sin	=	9,99545
					[2]) 19,45177
$\frac{1}{2}t$	=	2^h 8' 34"	» sin	=	9,72588
		2			
t	=	4^h 17' 8"			
Verspätung		+ 9' 30"			
☾ Aufg.-Stdw. .	=	4^h 26' 38" in mittl. Zeit,			
m. Zt. d. ☾ Culm.	=	14^h 22' 24",			

mittlere Zeit des sichtbaren Aufganges um 9^h 55' 46" Abends den 22. Juli.

Anmerkung. Die Rechnung hier zu wiederholen ist nöthig, da bei grosser Declination des Gestirnes dasselbe weit vom ersten Vertical auf- und untergeht, in welchem Falle ein Fehler in der Declination einen merklichen Einfluss auf den Stundenwinkel hat.

Wollte man am 22. Juli in diesem Beispiel die Zeit des Unterganges finden, so müsste man die obere Culminationszeit für den 21. Juli gesucht haben.

C. Regel. Die mittlere Zeit des wahren und sichtbaren Auf- oder Unterganges eines Planeten zu finden.

Man verfährt ganz so wie beim Monde, nur muss man, um den Auf- oder Untergangs-Stundenwinkel in mittlere Zeit zu verwandeln, stets den Unterschied der beiden oberen Culminationszeiten des Planeten nehmen, zwischen welche der gesuchte Auf- oder Untergang fällt, woraus man die auf den betreffenden Stundenwinkel anzuwendende Correction nach einfacher Proportion findet. Diese Correction ist + auf den Stundenwinkel, wenn die Culminationszeit am folgenden Tage grösser als am vorhergehenden, hingegen —, wenn die frühere Culminationszeit die grössere war.

Eine Wiederholung der Rechnung ist hier nicht nöthig, weil die Declination nicht stark ändert. Der sichtbare Auf- und Untergang der 4 hellen Planeten wird wegen des Wasserdunstes im Seehorizonte meistens nicht beobachtet werden können. Ein Beispiel darüber kann hier deshalb unterbleiben.

Beispiel. 1853 den 13. Juli in Memel soll man die mittlere Zeit des wahren Unterganges vom Jupiter finden.

(Memel liegt auf $55^\circ\ 42',7$ NBr. und $21^\circ\ 9'$ OL. von Greenwich.)

N. A. ♃ Culmin. den 12ten um $9^h\ 36'.4$
» den 11ten » $9^h\ 40',7$

$24^h : 1^h\ 25' = 4'.3 : x$

4^h	6	 0',7
1	4	 0',2
20'	3	 0',1
5	4	$x = 0',3$

den 12ten ♃ Culmin. in Memel um $9^h\ 36',7$ astr. mittl. Zeit.

Die Declination ist nahe 22° Süd, giebt Tafel XLII. den Untergangs-Stundenwinkel ungefähr = 4^h
♃ Culmination . = $9^h\ 36'.7$
OL. in Zeit . = — $1^h\ 25'$
Ungef. Greenw. mittlere Zeit des Unterg. . = $12^h\ 11',7$ d. 12. Abends.
♃ δ . = $22^\circ\ 16'$ S.

NBr. = $55^\circ\ 43'$ log tang = 0,16649
♃ δ = $22^\circ\ 16'$ » tang = 9,61220
Asc.-Differenz = $2^h\ 27'\ 42''$. » sin = 9,77869
6^h
♃ Untergangs-Stundenw. . = $3^h\ 32'\ 18''$ in Planetenzeit.
$24^h : 3^h\ 32' = 4',3 : x$, giebt x = — $30''$
♃ Unterg.-Stdw. in mittl. Zeit = $3^h\ 31'\ 48''$
♃ Culmination den 12ten um $9^h\ 36'\ 42''$
♃ w. Untergang d. 12ten um $13^h\ 8'\ 30''$ ast. m. Zt. = d. 13ten um $1^h\ 8'\ 30''$ mittl. Zeit Morgens.

D. Regel. Die mittlere Zeit des wahren und sichtbaren Auf- oder Unterganges eines Fixsternes zu finden.

Suche die Culminationszeit nach §. 131. F. (1.)*) und nimm den Auf- oder Untergangs-Stundenwinkel aus der nautischen Tafel XLII., oder

*) Was in der Anmerkung beim Monde von der Culminationszeit gesagt ist, wenn dieselbe einer der Grenzen des gegebenen Tages so nahe fällt, dass diese durch Addition oder Subtraction des Auf- oder Untergangs-Stundenwinkels überschritten wird, gilt auch hier. Uebrigens ist es nicht nothwendig, beim Fixstern deshalb die Culminationszeit für einen anderen Tag zu finden, denn man kann hier durch Addiren oder Subtrahiren eines Sterntages ($23^h\ 56'\ 4''$) zu oder von der Zeit des Auf- oder Unterganges die Zeit des Auf- oder Unterganges für den folgenden oder vorhergehenden Tag erhalten.

ermittele denselben durch Rechnung nach der Regel, welche unter A. in diesem Paragraphen für die Sonne gegeben ist.

Von dem so gefundenen Stundenwinkel subtrahire die Retardation (nautische Tafel XXV.), der Rest ist der Auf- oder Untergangs-Stundenwinkel des Sternes in mittlerer Zeit, welcher zur oberen Culminationszeit addirt die mittlere Zeit des wahren Unterganges, und von dieser Culminationszeit subtrahirt, die mittlere Zeit des wahren Aufganges giebt.

Da die Declination der Fixsterne so wenig verändert, so ist hier nie eine Wiederholung der Rechnung nöthig.

Um die mittlere Zeit des sichtbaren Auf- oder Unterganges zu finden, verfahre nach derselben Regel, welche für den Mond oder die Sonne gegeben ist. Beispiele für den sichtbaren Auf- und Untergang der Fixsterne sind deshalb nicht berechnet, weil derselbe nicht zu beobachten sein wird, denn man sieht die Sterne nicht, wenn sie im Seehorizonte verschwinden beim Untergange und aus demselben hervorkommen beim Aufgange. In der Aequatoreal-Gegend finden Ausnahmen statt.

Beispiel. 1853 den 20. November auf 40° 10′ NBr. und 30° WL. von Greenwich soll die mittlere Zeit des wahren Aufganges des ✳ Sirius gefunden werden.

N. A. den 20. November, ✳ Sirius AR. . . = $6^h\ 38'\ 43''$
Sternzeit im mittl. Mittag d. 20sten = $15^h\ 57'\ 59''$
Seit dem mittl. Mittage verflossene ✳ Zeit. . = $14^h\ 40'\ 44''$ — $2'\ 24''$ Ret.
giebt mittl. Zt. der ob. Culm. des ✳ d. 20sten = $14^h\ 38'\ 20''$.

NBr. = + 40° 10′ log tang = 9,92638
✳ δ = — 16° 31′ » tang = 9,47207
Asc.-Differenz = $0^h\ 57'\ 59''$. . » sin = 9,39845
✳ Aufgangs-Stundenw.. = $5^h\ 2'\ 1''$ in ✳ Zeit.
Retardation = — $50''$
✳ Aufgangs-Stundenw.. = $5^h\ 1'\ 11''$ in mittl. Zeit.
✳ obere Culminationszeit = $14^h\ 38'\ 20''$ astr. mittl. Zt. den 20. November.
✳ wahrer Aufgang . . . = $9^h\ 37'\ 9''$ mittl. Zeit Abends den 20. Novbr.

§. 142.

Die Uhrcorrection vermittelst correspondirender Vormittags- und darauf folgender Nachmittagshöhen der Sonne zu finden.

Correspondirende Höhen eines Himmelskörpers sind gleiche Höhen, wovon die eine auf der östlichen und die andere auf der westlichen Seite des Meridians liegt.

A. Aus correspondirenden (gleichen) Vormittags- und darauf folgenden Nachmittagshöhen der Sonne die sogenannte Mittagsverbesserung zu finden.

Wenn man an einem Orte Vormittags und Nachmittags gleiche Höhen der Sonne beobachtet, und die diesen Höhen entsprechenden Zeiten einer Uhr notirt, deren Gang man in der Zwischenzeit als gleichmässig annehmen kann, so findet, unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Declination der Sonne und Gleichheit der verflossenen wahren Sonnenstunden unter sich, der wahre Mittag des Ortes im Augenblicke des Mittels der Uhrzeiten statt.

Letzteres, nämlich die Gleichheit der verflossenen wahren Sonnenstunden, kann man, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, annehmen;

wogegen durch die Veränderung der Declination in der Zwischenzeit stets mehr oder weniger der eine Stundenwinkel der gleichen Höhen grösser wird als der andere.

Ist der westliche Stundenwinkel der grössere, so fällt das Mittel der Uhrzeiten später, und wenn der östliche Stundenwinkel der grössere ist, früher als der wahre Mittag. Um daher zu ermitteln, wieviel die Uhr im Augenblicke des wahren Mittags gezeigt hat, muss man im ersten Falle den halben Unterschied der Stundenwinkel vom Mittel der Uhrzeiten abziehen, im letzten addiren.

Es bezeichne:

t die halbe Zwischenzeit in wahrer Zeit,
δ die Declination und
p die Poldistanz der Sonne vom oberen Pol gezählt, im wahren Mittage des Ortes,
$d\delta$ die Veränderung derselben in der halben Zwischenzeit der gleichen Höhen, und
dt die entsprechende Veränderung im Stundenwinkel.

Aus den sphärischen Dreiecken zwischen dem oberen Weltpol, dem Zenith und der Sonne an der östlichen und westlichen Seite des Meridians ergeben sich, wenn man annimmt, dass die Sonne sich dem oberen Pol nähert und der parallactische Winkel spitz ist, folgende zwei Gleichungen nach §. 19. der sphärischen Trigonometrie:

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \cos(p + d\delta) + \cos\varphi \cdot \sin(p + d\delta) \cdot \cos(t - dt) \qquad \text{(I.)},$$
$$\sin h = \sin\varphi \cdot \cos(p - d\delta) + \cos\varphi \cdot \sin(p - d\delta) \cdot \cos(t + dt) \qquad \text{(II.)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen nach §. 7. der ebenen Trigonometrie:

$$\sin(p \mp d\delta) = \sin p \cdot \cos d\delta \mp \cos p \cdot \sin d\delta,$$
$$\cos(p \mp d\delta) = \cos p \cdot \cos d\delta \pm \sin p \cdot \sin d\delta,$$
$$\cos(t \mp dt) = \cos t \cdot \cos dt \pm \sin t \cdot \sin dt,$$

und subtrahirt (I.) von (II.), so ergiebt sich:

$$0 = 2\sin\varphi \cdot \sin p \cdot \sin d\delta - 2\cos\varphi\,[\cos p \cdot \sin d\delta \cdot \cos t \cdot \cos dt + \sin p \cdot \cos d\delta \cdot \sin t \cdot \sin dt].$$

Man setze in dieser Gleichung $\cos d\delta$ und $\cos dt = 1$ und dividire mit $2\cos\varphi \cdot \sin p$, so findet man

$$0 = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin d\delta - \operatorname{cotg} p \cdot \sin d\delta \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin dt,$$

also

$$\sin t \cdot \sin dt = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin d\delta - \operatorname{cotg} p \cdot \sin d\delta \cdot \cos t,$$

folglich auch

$$dt = d\delta \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - d\delta \cdot \operatorname{cotg} p \cdot \operatorname{cotg} t,$$
$$= d\delta \left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III.)},^{*})$$

weil $\sin dt$ und $\sin d\delta$ als sehr kleine Grössen dem Bogen proportional gesetzt werden können.

*) Zu Gleichung (III.) gelangt man auch, wenn

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$$

in Bezug auf δ und t differentiirt wird, welches giebt:

$$0 = \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot d\delta - \cos\varphi \cdot \sin\delta \cdot d\delta \cdot \cos t - \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \sin t \cdot dt.$$

Bringt man das letzte Glied dieser Gleichung auf die linke Seite und dividirt dann mit $\cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \sin t$, so erhält man

$$dt = d\delta \left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}\right].$$

Wenn $\delta > \varphi$ und beide gleichnamig sind, so kann zwar bei Annäherung der Sonne an den oberen Pol der westliche Stundenwinkel kleiner als der östliche werden, und wenn man diesemnach in den Gleichungen (I.) und (II.) die erforderlichen Veränderungen macht, nämlich in (I.) $t + dt$ und in (II.) $t - dt$ setzt, so ergiebt sich, wenn man ganz wie vorher verfährt,

$$dt = d\delta \left[\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV.)}.$$

Weil aber in diesem Falle der Nachmittags-Stundenwinkel der kleinere ist, so muss auch dt, nach der Gleichung (IV.) gefunden, zum Mittel der Uhrzeiten addirt werden, während dt, nach (III.) gefunden (wenn der Nachmittags-Stundenwinkel der grössere ist), subtrahirt werden muss. Man kann daher, da es einerlei ist, ob man

$$dt = d\delta \left[\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t}\right]$$

addirt, oder

$$dt = d\delta \left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}\right]$$

subtrahirt, der Einfachheit wegen, stets die auf das Mittel der Uhrzeiten anzuwendende Correction dt nach Formel (III.) berechnen und so anwenden, als wenn bei Annäherung der Sonne an den oberen Pol immer der westliche Stundenwinkel der grössere wäre.

Bei Anwendung und Berechnung der Mittagsverbesserung dt nach Formel (III.) ist zu beachten, dass $d\delta$, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert, als negativ zu betrachten ist; wenn die Sonne sich aber vom oberen Pol entfernt, so ist $d\delta$ positiv.

Da in der Formel nur der Leichtigkeit wegen $\operatorname{tg}\delta$ statt $\operatorname{cotg} p$ steht, so muss $\operatorname{tg}\delta$, wenn φ und δ ungleichnamig sind, negativ, wenn gleichnamig, positiv genommen werden.

Es ist $\operatorname{tg} t$ stets positiv, wenn t (die halbe Zwischenzeit) kleiner als 6^h, aber negativ, wenn t grösser als 6^h ist.

Will man dt in Zeitsecunden haben, so ist $d\delta$ in Bogensecunden noch mit 15 zu dividiren.

Da $d\delta$ die halbe Differenz der vormittägigen und nachmittägigen Declination sein soll, so nimmt man, um $d\delta$ zu berechnen, die 48stündliche Aenderung der Declination, nämlich die Aenderung zwischen dem nächst vorhergehenden und nächst folgenden wahren Mittage, wobei man jedoch, der Leichtigkeit wegen, den wahren Mittag der Ephemeride als den des Ortes betrachten kann, wenn die Länge des Beobachtungsortes von dem Meridian der Ephemeride gezählt, nicht sehr bedeutend ist. Die in der Formel vorkommende Declination ist für den wahren Mittag des Ortes zu nehmen.

Die halbe Zwischenzeit t erhält man, wenn man die vormittägige Uhrzeit von der nachmittägigen abzieht und den Rest durch 2 dividirt. Gewinnt aber die Uhr gegen wahre Zeit, so muss, da t wahre Zeit sein soll, die halbe Zwischenzeit um den Gang der Uhr während dieser Zeit verkleinert, wenn dagegen die Uhr gegen wahre Zeit zu langsam geht, um denselben vergrössert werden. Kleine Abweichungen des Ganges der Uhr von der wahren Zeit, z. B. wenn der Gang der Uhr nach mittlerer Zeit nahe richtig wäre, braucht man hierbei nicht zu beachten.

Zur Erleichterung der Berechnung der Mittagsverbesserung ist die nautische Tafel XLI. berechnet.

Es bezeichne nämlich μ die doppelte tägliche Aenderung der Declination in Bogensecunden, und werde positiv oder negativ genommen,

je nachdem die Sonne sich vom oberen Pol entfernt oder demselben nähert, so ist, wenn man dt in Zeitsecunden haben will,

$$d\delta = \mp \mu \frac{t^h}{48^h \cdot 15} = \mp \mu \frac{t \text{ in Minuten}}{2880' \cdot 15} = \mp \mu \frac{t \text{ in Minuten}}{43200'}.$$

Man setze:

$\log A = \log t$ in Minut. + Compl. $\log 43200 + \log \operatorname{cosec} t$ und

$\log B = \log t$ in Minut. + Compl. $\log 43200 + \log \operatorname{cotg} t$,

so ist nach Formel (III.) die Mittagsverbesserung

$$dt = \mp \mu [A \cdot \operatorname{tg} \varphi - B \cdot \operatorname{tg} \delta] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V.).$$

In der gedachten Tafel ist $\lg A$ und $\lg B$ mit dem Argument t für jede Zeitminute von 0^h bis $11^h\ 59'$ enthalten.

Es ist dem Vorstehenden nach klar, dass A stets positiv ist; B wird aber nur positiv, wenn t kleiner als 6^h, und negativ, wenn t grösser als 6^h ist.

Aus Formel (V.) ergiebt sich:

1. dass die Mittagsverbesserung $= \mp \mu [-B \cdot \operatorname{tg} \delta] = \pm \mu \cdot B \cdot \operatorname{tg} \delta$, wenn die Breite $= 0$ ist,
2. dass die Mittagsverbesserung $= \mp \mu \cdot A \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ist, wenn die Declination $= 0$ ist,
3. dass der zweite Theil, nämlich $\mu \cdot B \cdot \operatorname{tg} \delta$ grösser werden kann als der erste Theil, wenn $\delta > \varphi$ ist.

Bei der — nach alleiniger Anwendung der Mittagsverbesserung — berechneten Uhrzeit des wahren Mittags ist die Refraction bei den vormittägigen und nachmittägigen Höhen als gleich angenommen worden. Findet in dem Stande des Barometers und Thermometers Vor- und Nachmittags ein Unterschied statt, so berechne man die Refraction, sowohl für die vormittägigen als nachmittägigen Höhen, und nehme die Differenz zwischen beiden.

Ist die vormittägige Refraction die kleinere, so ist die Höhe um ebenso viel zu gross und der Stundenwinkel folglich zu klein, und umgekehrt.

Nach §. 136. (XI.) ist der Fehler, welcher im Stundenwinkel durch einen kleinen Fehler in der Höhe entsteht $= -\dfrac{dh}{\sin A \cdot \cos \varphi}$, oder wenn für dh der Unterschied in der Refraction $= dr$ gesetzt wird, $= \dfrac{dr}{\sin A \cdot \cos \varphi}$.

Es ist aber $\sin A = \dfrac{\sin t \cdot \cos \delta}{\cos h}$, also der halbe gedachte Fehler $= \dfrac{dr \cdot \cos h}{2 \cos \varphi \cdot \sin t \cdot \cos \delta}$; wenn man denselben in Zeitsecunden haben will und dr in Bogensecunden ausgedrückt ist, $= \dfrac{dr \cdot \cos h}{30 \cdot \cos \varphi \cdot \sin t \cdot \cos \delta}$, welche Correction (für Veränderung der Refraction) zu addiren oder zu subtrahiren ist, je nachdem die Refraction bei der östlichen Höhe die grössere oder kleinere war.

Man wird sich aber nie mit einer Höhe begnügen, hat daher schon aus den beobachteten Höhen, wenn dieselben, wie gewöhnlich, über dem künstlichen Horizonte beobachtet sind, die doppelte Höhenänderung in einer bestimmten Zwischenzeit und findet daraus durch einfache Proportion den halben Fehler, welchen ein Unterschied in der Refraction auf den Stundenwinkel macht, leichter wie folgt. Es sei nach der Beobachtung die doppelte Höhenänderung in $1'\ 11''$ Zeit $= 20'$ und die

Refraction bei den vormittägigen Höhen 8″,5 kleiner als bei den nachmittägigen, so setze man:

$$20' : 71'' \text{ Zt.} = -8''.5 : x,$$

wonach $x = -\frac{8{,}5 \cdot 71}{20 \cdot 60} = -0'',5$ in Zeit = der Correction, welche für Ungleichheit der Refraction noch von der schon gefundenen Uhrzeit des wahren Mittags zu subtrahiren ist.

Es fand diese Annahme in 55° 43′ NBr. statt, als $\delta = 21^\circ\ 16'$ Nord, $h = 27^\circ\ 13'$ und der Stundenwinkel $= 4^h\ 50'\ 3''$ war. Nach der oben gegebenen Formel wird also nachstehende Rechnung zu machen sein, um die Correction zu finden:

$dr = -8''.5$	log	$= 0{,}9294\ n$
$h = 27^\circ\ 13'$	log cos	$= 9.9490 - 10$
$\varphi = 55^\circ\ 43'$	log sec	$= 0{,}2492$
$\delta = 21^\circ\ 16'$	log sec	$= 0{,}0306$
$t = 4^h\ 50'\ 3''$	log cosec	$= 0{,}0205$
	c log 30	$= 8{,}5229 - 10$
	log Corr.	$= 9{,}7016 - 10\ n,$
	also Corr.	$= -0'',5$ in Zeit.

Die vortheilhafteste Zeit, gleiche Höhen zu nehmen, ist, wenn die Höhenänderung am stärksten, also wenn sich die Sonne im oder so nahe als möglich am ersten Vertical befindet (§. 136.). Man vermeidet jedoch, der Veränderlichkeit der Refraction wegen, sehr kleine Höhen. Auch ist es besser, wenn der Gang der Uhr nicht gleichmässig sein sollte, wenn die Höhen möglichst nahe am Mittage genommen sind; jedoch wird hauptsächlich auf eine möglichst starke Höhenänderung zu sehen sein.

Beobachtung gleicher Höhen.

Wenn man am Lande auch den Seehorizont frei hat, so ist es doch der Veränderlichkeit der irdischen Refraction wegen und auch, weil die Höhenänderung, wenn man über dem künstlichen Horizonte beobachtet, die doppelte ist, stets besser, die Höhen über dem künstlichen Horizonte zu messen; man verfährt dabei wie folgt.

Des Vormittags, wenn die Sonne möglichst nahe am ersten Vertical, die Höhe jedoch nicht sehr klein ist, beobachtet man mehrere Höhen des Unter- oder Oberrandes, indem man, je nachdem die Höhenänderung stark oder schwach ist, die Alhidade von 20 zu 20 oder von 10 zu 10 Minuten einstellt, und notirt die Zeiten nach einem Chronometer oder einer Beobachtungsuhr so genau wie möglich.

Die nahe bekannte wahre Zeit der letzten Höhe von 12^h abgezogen, giebt den Stundenwinkel, der doppelt genommen und zu der Uhrzeit der letzten Vormittagshöhe addirt, die Zeit der Uhr nahe angiebt, um welche die erste Höhe Nachmittags (= der letzten Höhe Vormittags) stattfindet.

Man stellt die Alhidade zuerst auf die letzte vormittägige Höhe ein, und muss nun früh genug, oder einige Minuten früher aufpassen, als die Uhrzeit angiebt, damit man die Höhe nicht versäumt.

Wenn eine Höhe genommen und die Zeit aufgeschrieben ist, schiebt man mittelst der Feinschraube die Alhidade um ebenso viele Minuten zurück, als man dieselbe Vormittags vorwärts geschoben hat, passt auf, wenn die Berührung der Bilder stattfindet und notirt die Zeit so genau wie möglich. Auf ähnliche Weise verfährt man, bis man alle Höhen bekommen hat, welche Vormittags beobachtet sind.

Um auf die Veränderung der Refraction Rücksicht nehmen zu können, muss man sowohl Vormittags als Nachmittags den Barometer- und Thermometerstand notiren, jedoch wird die hierdurch entstehende Correction nur selten so gross sein, dass es nothwendig ist, dieselbe zu berücksichtigen.

Da, wenn man den Unterrand der Sonne beobachtet hat, die Bilder Vormittags auseinander und Nachmittags ineinander gehen, und es möglich ist, dass ein Beobachter vielleicht immer die Berührung bei auseinandergehenden Bildern etwas früher oder später als bei ineinandergehenden Bildern angiebt, so kann man, um den dadurch möglichen Falles entstehenden Fehler zu heben, noch ebenso viele Unterrands- wie Oberrandshöhen messen.

Hat man mehrere Sextanten, so ist es vortheilhafter, mit jedem derselben erst die Ober- und dann die Unterrandshöhe zu beobachten. Man lässt dann die Alhidade unverrückt stehen und hat nur aufzupassen, dass man Nachmittags die gleichen Höhen bekommt.

Durch dieses Verfahren wird der Fehler des Einstellens und der etwaigen Rückwirkung der Schraube umgangen.

Jedenfalls muss man aber die zu den vormittägigen Höhen benutzten Instrumente, bis man auch die nachmittägigen Höhen damit beobachtet hat, an einen Ort legen, wo sie nicht Stössen oder sonstigen nachtheiligen Berührungen, oder einem starken Wechsel in der Temperatur ausgesetzt sind. Auch wird man von jedem Sextanten die Indexcorrection untersuchen müssen, sowohl Vormittags als Nachmittags, um sich zu überzeugen, ob dieselbe sich verändert hat. Wäre letzteres der Fall, dann würde wegen dieser Aenderung eine Correction, ähnlich der für Refractions-Aenderung, zu ermitteln und anzuwenden sein.

Die Vortheile, welche Zeitbestimmungen durch gleiche Höhen gewähren, bestehen besonders darin, dass der Fehler des Instrumentes nicht in Betracht kommt, weil es nur auf die Gleichheit, aber nicht auf die Grösse der Höhen ankommt. Auch hat ein kleiner Fehler in der Breite des Ortes und der Declination der Sonne nur einen unbedeutenden Einfluss auf das Resultat, weshalb man bei Berechnung der Mittagsverbesserung φ und δ nur auf volle Minuten zu nehmen braucht.

Regel

zur Berechnung der Mittagsverbesserung und Anwendung derselben auf das Mittel der Uhrzeiten (den unverbesserten Mittag), um daraus die Uhrzeit des wahren Mittags zu finden.

1. Finde die halbe Zwischenzeit der vormittägigen und nachmittägigen Uhrzeiten aus den Mitteln derselben und bezeichne dieselbe mit t. Es gewähren zu diesem Behuf die Mittel aus der ersten und letzten Vormittags- und ersten und letzten Nachmittags-Uhrzeit ausreichende Genauigkeit. Nimm ferner das Mittel aus den bez. vormittägigen und nachmittägigen Uhrzeiten, so sind diese Mittel die einzelnen unverbesserten Mittage, aus welchen das Mittel der eigentliche unverbesserte Mittag ist.

2. Finde die Veränderung der Declination der Sonne in 48 Stunden, und zwar zwischen dem nächstvorhergehenden und nächstfolgenden wahren Mittage des gegebenen Tages in Secunden ausgedrückt und bezeichne dieselbe $\mp\mu$, je nachdem die Sonne sich dem oberen Pol nähert oder davon entfernt. Suche ferner die Declination der Sonne für den wahren Mittag des Ortes und bezeichne dieselbe mit $\pm\delta$, je nachdem φ und δ gleichnamig oder ungleichnamig sind.

3. Für die halbe Zwischenzeit entnimm aus der nautischen Tafel XLI. $\log A$ und $\log B$.

4. Addire log μ, log A und log tang φ; die Summe ist der Logarithme des ersten Theils der Mittagsverbesserung in Zeitsecunden und wird mit — oder + bezeichnet, je nachdem die Sonne sich dem oberen Pol nähert oder davon entfernt, d. h. derselbe erhält dasselbe Zeichen wie μ.

5. Addire log μ, log B und log tang δ; die Summe ist der Logarithme des zweiten Theils der Mittagsverbesserung in Zeitsecunden. Dieser zweite Theil erhält ebenfalls das ihm zukommende algebraische Zeichen, oder, welches dasselbe ist, wird mit $\pm$ bezeichnet, wenn die halbe Zwischenzeit kleiner als 6^h ist, je nachdem δ und μ gleiche oder ungleiche Zeichen haben; ist aber die halbe Zwischenzeit grösser als 6^h, so wird dieser Theil mit $\mp$ bezeichnet, je nachdem δ und μ gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

6. Die algebraische Differenz des ersten minus zweiten Theils ist die Mittagsverbesserung, welche nach ihrem Zeichen auf die Uhrzeit des unverbesserten Mittags (Mittel der Zeiten) angewandt, die Uhrzeit des wahren Mittags giebt.

Regel

zur Anwendung der beiden Correctionen auf die Uhrzeit des unverbesserten Mittags, ohne Rücksicht auf die algebraischen Zeichen zu nehmen, um die Uhrzeit des wahren Mittags zu finden.

Addire oder subtrahire die erste Correction zu oder von dem unverbesserten Mittage (Mittel der Zeiten), je nachdem die Sonne sich vom oberen Pol entfernt oder demselben nähert.

Wenn die halbe Zwischenzeit kleiner als 6^h ist, addire oder subtrahire die zweite Correction zu oder vom unverbesserten Mittage, je nachdem die Declination der Sonne zu- oder abnimmt; ist dagegen die halbe Zwischenzeit grösser als 6^h, so wird diese Correction entgegengesetzt angewandt, also bei zunehmender Declination subtrahirt und bei abnehmender Declination addirt.

Regel

aus der Uhrzeit des wahren Mittags die Uhrcorrection zu finden.

Finde die Zeitgleichung für den wahren Mittag des Beobachtungsortes (§. 103.) und wende diese so auf 12^h an, wie sie der Ephemeride nach auf wahre Zeit anzuwenden ist, um mittlere Zeit zu erhalten, so ist das Gefundene die mittlere Zeit dieses Ortes im wahren Mittage. Hiermit vergleiche die Uhrzeit im wahren Mittage, so ergiebt sich die Uhrcorrection zur Zeit des wahren Mittags des Ortes gegen mittlere Zeit, welche mit + oder — bezeichnet wird, je nachdem die Uhrzeit im wahren Mittage kleiner oder grösser als die mittlere Zeit im wahren Mittage ist. Diese Uhrcorrection gilt streng genommen nur für den Augenblick des unverbesserten Mittags; will man sie für den wahren Mittag haben, so muss man die Mittagsverbesserung in Zeit der Uhr ausdrücken und diese dann auf den unverbesserten Mittag anwenden. Geht z. B. die Uhr in einer Stunde gegen wahre Zeit x'' vor oder bleibt sie so viel zurück, so wäre die nach obiger Anweisung berechnete Mittagsverbesserung im ersten Falle mit $(1^h + x'')$ und im zweiten mit $(1^h — x'')$ zu multipliciren.

Beispiel 1. 1852 den 19. August, in Bejukdere, auf 41° 10′ NBr. und 29° 2′ OL. von Greenwich, sind nachstehende gleiche Sonnenhöhen nach einem Chronometer genommen; man soll die Correction desselben gegen mittlere Zeit finden.

☉	Vormitt.	Nachmitt.	unverb. Mitt.
76° 30'	7^h 33' 16",5	2^h 8' 28",5	10^h 50' 52",50
40	33 44,0	8 0,5	52,25
50	34 11,0	7 33,5	52,25
77 0	34 38,5	7 4,5	51,50
10	35 7,0	6 35,5	51,25

7^h 34' 11",8	unverbessert. Mittag = 10^h 50' 51",95
14^h 7' 32",0	Mittagsverbesserung = + 10",34
6^h 33' 20",2	Chr. zeigt im w. Mitt. = 10^h 51' 2",29
halbe Zwischenzt. = t = 3^h 16' 40",1	mittl. Zeit im w. Mitt. = 12^h 3' 20",81

Chronometer-Correction gegen Bejukderer mittlere Zeit = + 1^h 12' 18",52.

Nautic.-Alm. ☉Decl. den 19. Aug. = 12° 39' 45" N.
stündl. Diff. = + 49",46
OL. in Zeit = 2^h
98",92 . . . + 1' 39"
☉Decl. = 12° 41' 24" N.

Den 19. Aug. Zeitgleichung = + 3' 19",65 auf wahre Zeit,
stündl. Diff. = + 0",582
OL. in Zeit = 2^h
1",164 + 1",16
Zeitgleichung = + 3' 20",81 auf wahre Zeit.
Mittlere Zeit im wahren Mittag . . . = 12^h 3' 20",81.
Den 18. Aug. ☉Decl. = 12° 59' 19",6 N.
» 20. » » = 12° 19' 57",4 N.
39' 22",2
60
μ = + 2362",2.

Die logarithmische Rechnung nach Formel (V.).

Mittagsverbesserung = $dt = \mu\,[A \cdot \mathrm{tg}\,\varphi - B \cdot \mathrm{tg}\,\delta]$

μ = 2362",2	log = 3,3733		log μ = 3,3733
t = 3^h 16' 40"	log A = 7.7794—10		log B = 7.5948—10
φ = + 41° 10'	log tg = 9,9417—10.	δ = + 12° 41'.4	log tg = 9.3524—10
1st. Theil = + 12".43	log = 1,0944	2ter Theil log	= 0,3205
2tr. Theil = + 2",09		2ter Theil	= + 2",09

Differenz = + 10",34 = der Mittagsverbesserung.

Beispiel 2. 1852 den 25. September in Gibraltar unweit der nördlichen Moole auf 36° 9' NBr. und 5° 19' WL. von Greenw. sind nachstehende gleiche Sonnenhöhen nach einem Chronometer beobachtet; man soll die Chronometer-Corr. geg. mittl. Zeit finden.

☉	Vormitt.	Nachmitt.	Mittel der Zeiten.
79° 0'	10^h 27' 47",5	3^h 19' 1",0	12^h 53' 24",25
10	28 19,0	18 29,0	24,00
20	28 50,0	17 57,0	23,50
30	29 21,5	17 24,5	23,00
40	29 53,5	16 53,0	23,25
50	30 26,0	16 20,0	23,00

10^h 29' 6",8	unverbessert. Mittag = 12^h 53' 23",50
15^h 17' 40",5	Mittagsverbesserung = + 11",87
4^h 48' 33",7	Chr. zeigt im w. Mitt. = 12^h 53' 35",37
t = 2^h 24' 16",8	mittl. Zeit im w. Mitt. = 11^h 51' 31",43

Chronometer-Correction gegen mittlere Zeit = — 1^h 2' 3",94.

Nautic.-Alm. den 25. Sept. ⊙Decl. = 1° 0′ 41″ S.
stündl. Diff. = + 58″,5
WL. in Zeit = 0^h,35
20″ + 20″
⊙ Decl. 1° 1′ 1″ S.

Den 25. Sept. Zeitgleichung . . . = 8′ 28″,27 — auf wahre Zeit.
stündl. Diff. = + 0″,848
0.35^h
0.297 + 0″.30
Zeitgleichung = 8′ 28″.57 — auf wahre Zeit.
Mittlere Zeit im wahren Mittag . = 11^h 51′ 31″,43.

⊙Decl. den 24. Sept. = 0° 37′ 16″.0 S.
» » 26. » = 1° 24′ 5″,6 S.
46′ 49″,6
60
μ = + 2809″,6.

Mittagsverbesserung = $dt = \mu\,[A \cdot \mathrm{tg}\,\varphi - B \cdot \mathrm{tg}.\,\delta]$

μ = 2809″,6 log = 3,4486 log μ = 3,4486
t = 2^h 24′ 17″ log A = 7,7538—10 log B = 7,6614—10
φ = + 36° 9′ log tg = 9,8637—10. δ = — 1° 1′ log tg = 8.2491—10n

1st. Theil = + 11″,64 log = 1,0661 2tr. T. = —0″,23 log = 9,3591—10n
2ter » = — 0″.23
Differenz = + 11″,87 = der Mittagsverbesserung.

Beispiel 3. 1852 den 21. Mai auf 55° 43′ NBr. und 1^h 24′ 34″ OL. in Zeit von Greenw. sind, ohne die Alhidade zu verschieben, nachstehende gleiche Ober- und Unterrandshöhen der Sonne beobachtet; man soll die Correction des Chronometers, nach welchem die Zeiten notirt sind, gegen mittlere Zeit finden.

Barom. Vormitt. = 339‴,3 Franz.; Therm. Vormitt. = + 12°,0 R.
» Nachmitt. = 339‴,3 » » Nachmitt. = + 12°,4 R.

	Vormitt.	Nachmitt.	Mittel d. Zeiten.
⊙̄ 68° 30′ 0″	6^h 19′ 8″	2^h 29′ 41″	10^h 24′ 24″,5
⊙̲ 68° 30′ 0″	6^h 22′ 58″	2^h 25′ 51″	24″,5

	6^h 21′ 3″	unverbessert. Mittag = 10^h 24′ 24″,50
	14^h 27′ 46″	Mittagsverbesserung = — 12″,00
	8^h 6′ 43″	Chr. zeigt im w. Mitt. = 10^h 24′ 12″,50
halbe Zwischenzeit = t =	4^h 3′ 21″,5	mittl. Zeit im w. Mitt. = 11^h 56′ 19″,62

Chronometer-Correction gegen mittlere Zeit = + 1^h 32′ 7″,12.

Nautic.-Alm. den 21. Mai ⊙Decl. = 20° 16′ 33″ N.
stündl. Diff. 29″,7
OL. in Zeit. 1,4^h
41.6 — 42″
⊙Decl. = 20° 15′ 51″ N.
Den 21. Mai Zeitgleichung = 3′ 40″,13 — auf wahre Zeit.
stündl. Diff. + 0″.175
1,4^h
0,245 + 0″,25
Zeitgleichung = 3′ 40″,38 — auf wahre Zeit.
Mittlere Zeit im wahren Mittag . = 11^h 56′ 19″,62.

⊙ Decl. den 20. Mai $= 20^\circ\ 4'\ 20'',0$ N.
» » 22. » $= 20^\circ\ 28'\ 25'',4$ N.

$24'\ 5'',4$
60

$\mu = -1445'',4.$

Mittagsverbesserung $= dt = \mu\,[A \cdot \operatorname{tg} \varphi - B \cdot \operatorname{tg} \delta]$

$\mu = 1445'',4$ log $= 3{,}1600n$ log $\mu = 3{,}1600n$
$t = 4^h\ 3'\ 22''$ log $A = 7{,}8096-10$ log $B = 7{,}4974-10$
$\varphi = +55^\circ 43'$ log tg $= 0.1664$, $\delta = +20^\circ\ 15',9$ log tg $= 9{,}5673-10$

1. Thl. $= -13'',68$ log $= 1{,}1360n$, 2tr. Th. $= -1'',68$ log $= 0{,}2247n$
2. » $= -1'',68$

Diff. $= -12'',00 =$ der Mittagsverbesserung.

Anmerkung. Die geringe Verschiedenheit im Thermometerstande Vor- und Nachmittags ist hier von keinem Einflusse.

§. 143.

Die Uhrcorrection aus Nachmittags- und darauf folgenden gleichen Vormittagshöhen der Sonne zu finden.

Von der Mitternachtsverbesserung.

Wenn an einem Orte Nachmittags und dem darauf folgenden Tage Vormittags gleiche Höhen der Sonne beobachtet und die mit diesen zugleich stattfindenden Zeiten eines Chronometers oder einer Uhr, deren Gang man in der Zwischenzeit als gleichmässig annehmen kann, notirt sind, so findet, unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Declination der Sonne in der Zwischenzeit, die wahre Mitternacht des Ortes im Augenblicke des Mittels der Uhrzeiten statt.

Da indessen die Declination der Sonne sich verändert, so ist das Mittel der Zeiten nur die ungefähre Uhrzeit der wahren Mitternacht, weshalb man es die unverbesserte Mitternacht nennt.

Es sei p die Poldistanz, vom oberen Pol gezählt, δ die Declination der Sonne zur Zeit der wahren Mitternacht des Ortes, $d\delta$ die Veränderung der Declination während der halben Zwischenzeit der gleichen Höhen, dt' die entsprechende Veränderung im Stundenwinkel t', welcher vom unteren Meridian gerechnet wird und gleich der zwischen den gleichen Höhen verflossenen halben Zwischenzeit ist, t bezeichne den Stundenwinkel vom oberen Meridian gerechnet, also $t =$ dem Supplement von t', φ sei die Breite des Ortes, h die wahre Höhe; so ergiebt sich aus den sphärischen Dreiecken zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn, wenn man annimmt, dass die Sonne sich dem oberen Pol nähert und der parallactische Winkel spitz ist,

des Nachmittags:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \cos (p + d\delta) + \cos \varphi \cdot \sin (p + d\delta) \cdot \cos (t - dt') \quad \ldots \quad \text{(I.)},$$

des Vormittags:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \cos (p - d\delta) + \cos \varphi \cdot \sin (p - d\delta) \cdot \cos (t + dt') \quad \ldots \quad \text{(II.)},$$

oder

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \cos (p + d\delta) - \cos \varphi \cdot \sin (p + d\delta) \cdot \cos (t' + dt') \quad \ldots \quad \text{(III.)}$$

und

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \cos (p - d\delta) - \cos \varphi \cdot \sin (p - d\delta) \cdot \cos (t' - dt') \quad \ldots \quad \text{(IV).}$$

Subtrahirt man (III.) von (IV.), so ergiebt sich:

$$0 = \sin \varphi\,[\cos (p - d\delta) - \cos (p + d\delta)]$$
$$+ \cos \varphi\,[\sin (p + d\delta) \cdot \cos (t' + dt') - \sin (p - d\delta) \cdot \cos (t' - dt')] \quad \text{(V.).}$$

Setzt man in Gleichung (V.):

$$\left.\begin{array}{l} \cos (p \pm d\delta) = \cos p \cdot \cos d\delta \mp \sin p \cdot \sin d\delta \\ \sin (p \pm d\delta) = \sin p \cdot \cos d\delta \pm \cos p \cdot \sin d\delta \end{array}\right\} \text{(Ebene Trig. §. 7.)}$$

$\cos(t' \mp dt') = \cos t' \cdot \cos dt' \pm \sin t' \cdot \sin dt'$; so ergiebt sich

$$0 = 2 \sin \varphi \cdot \sin p \cdot \sin d\delta - 2 \cos \varphi \left[\sin p \cdot \cos d\delta \cdot \sin t' \cdot \sin dt' - \cos p \cdot \sin d\delta \cdot \cos t' \cdot \cos dt'\right].$$

Man setze in dieser Gleichung $\cos d\delta$, sowie $\cos dt' = 1$, und dividire mit $2 \cos \varphi \cdot \sin p$, so findet man

$$0 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin d\delta - \sin t' \cdot \sin dt' + \operatorname{cotg} p \cdot \sin d\delta \cdot \cos t',$$

oder

$$0 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin d\delta - \sin t' \cdot \sin dt' + \operatorname{tg} \delta \cdot \sin d\delta \cdot \cos t',$$

hieraus

$$\sin t' \cdot \sin dt' = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin d\delta + \operatorname{tg} \delta \cdot \sin d\delta \cdot \cos t'$$

und so auch

$$dt' = d\delta \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t'} + \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{cotg} t'\right],$$

$$= d\delta \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t'} + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} t'}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI.)},$$

worin für $\sin dt'$ und $\sin d\delta$ als sehr kleine Grössen, deren Bögen gesetzt sind.

Es ist in (VI.) $d\delta$ positiv zu nehmen, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert, und negativ, wenn sie sich davon entfernt; folglich ist die Verbesserung der Mitternacht

$$dt' = \pm d\delta \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t'} + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} t'}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII.)},^{*)}$$

worin also das obere Zeichen gilt, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert, das untere, wenn sie sich davon entfernt.

Die halbe Zwischenzeit t' erhält man, wenn man die nachmittägige Uhrzeit von der vormittägigen, letztere vergrössert um 12^h, abzieht und den Rest durch 2 dividirt. Man muss aber, wenn die Uhr oder das Chronometer gegen wahre Zeit gewinnt oder verliert, da dt' in wahrer Zeit angegeben sein soll, die halbe Zwischenzeit um das Erforderliche verkleinern oder vergrössern. Wenn der Gang der Uhr aber ungefähr nach mittlerer Zeit richtig ist, so braucht man darauf keine Rücksicht zu nehmen, indem es nicht so sehr auf t' ankommt.

Die Declination der Sonne (δ) muss zur Zeit der wahren Mitternacht des Ortes gesucht werden, und zur Berechnung von $d\delta$ nimmt man die 24stündige Aenderung, und zwar zwischen den beiden Mittagen, zwischen welchen die Höhen beobachtet sind, oder weil es in der nautischen Tafel XLI. so eingeführt ist, diese doppelte Aenderung.

Wenn demnach μ diese doppelte Aenderung der Declination vom vorhergehenden bis zum nächstfolgenden Mittage in Secunden bezeichnet, so ist

$$d\delta \text{ in Secunden} = \pm \frac{\mu \cdot t' \text{ in Minuten}}{2 \cdot 24^h \cdot 60},$$

und weil man dt' in Zeitsecunden haben will, so muss noch mit 15 dividirt werden, also wird

$$d\delta = \pm \mu \frac{t' \text{ in Minuten}}{43200'}.$$

*) Zu dieser Formel gelangt man auch, wenn

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta - \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t'$$

in Bezug auf δ und t' differentiirt wird, welches giebt:

$$0 = \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot d\delta + \cos \varphi \cdot \sin \delta \cdot d\delta \cdot \cos t' - \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin t' \cdot dt',$$

und woraus nach einer leichten Umformung folgt:

$$dt' = \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t'} + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} t'}\right] d\delta.$$

In der gedachten Tafel XLI. ist diesemnach gesetzt:

$\log A = \log t'$ in Minuten $+ c \log 43200 + \log \operatorname{cosec} t'$

und $\log B = \log t'$ in Minuten $+ c \log 43200 + \log \operatorname{cotg} t'$.

Zum Argumente von $\log A$ und $\log B$ hat diese Tafel t', oder die halbe Zwischenzeit.

Es ist demnach die Mitternachtsverbesserung, wenn A und B gebraucht werden,

$$dt' = \pm \mu [A \cdot \operatorname{tg} \varphi + B \cdot \operatorname{tg} \delta] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VIII.)},$$

worin das obere oder untere Zeichen für μ gilt, je nachdem die Sonne sich dem oberen Pol nähert oder davon entfernt.

A und $\operatorname{tg} \varphi$ sind stets positiv; dagegen ist B positiv oder negativ, je nachdem $t' <> $ als 6^h ist, und $\operatorname{tg} \delta$ ist positiv oder negativ, je nachdem φ und δ gleichnamig oder ungleichnamig sind.

$\pm \mu \cdot A \cdot \operatorname{tg} \varphi$ giebt den ersten und $\pm \mu \cdot B \cdot \operatorname{tg} \delta$ den zweiten Theil der Mitternachtsverbesserung dt', welche, nach ihren Zeichen auf die Uhrzeit der unverbesserten Mitternacht angewandt, die Zeit der wahren Mitternacht geben.

Was die Anwendung der Correction für Veränderung der Refraction auf die Zeit der unverbesserten Mitternacht betrifft, so kann man dieselbe, ähnlich wie (§. 142. A.) bei gleichen Vor- und Nachmittagshöhen gezeigt ist, finden.

Es ist demnach nur nöthig zu bemerken, dass die Correction für Veränderung der Refraction zur Zeit der verbesserten Mitternacht zu addiren oder davon zu subtrahiren ist, je nachdem die Refraction bei der nachmittägigen Höhe die kleinere oder grössere war.

Regel

zur Berechnung der Mitternachtsverbesserung und Anwendung derselben auf das Mittel der Uhrzeiten, um daraus die Uhrzeit der wahren Mitternacht zu finden.

1. Ermittele die halbe Zwischenzeit zwischen den Mitteln der nachmittägigen und vormittägigen Uhrzeiten der gleichen Höhen und bezeichne dieselbe mit t'. Hierzu sind die Mittel aus der ersten und letzten Nach- bezw. Vormittags-Uhrzeit ausreichend. Nimm ferner die Mittel aus den resp. nachmittägigen und vormittägigen Uhrzeiten, so ergeben sich die einzelnen unverbesserten Mitternächte, aus welchen letzteren das Mittel die eigentliche unverbesserte Mitternacht ist.

2. Finde die Veränderung der Declination in 24^h, d. h. die Differenz zwischen den Declinationen der Sonne für die wahren Mittage der beiden Beobachtungstage, drücke dieselbe in Secunden aus, nimm sie doppelt und bezeichne die Anzahl Secunden mit $\pm \mu$, je nachdem die Sonne sich dem oberen Pol nähert oder davon entfernt. Ferner suche die Declination der Sonne für die Zeit der wahren Mitternacht des Ortes und bezeichne dieselbe mit $\pm \delta$, je nachdem φ und δ gleichnamig oder ungleichnamig sind.

3. Für die halbe Zwischenzeit t' entnimm aus der nautischen Tafel XLI. $\log A$ und $\log B$.

4. Addire $\log \mu$, $\log A$ und $\log \operatorname{tg} \varphi$; die Summe ist der Logarithme des ersten Theils der Mitternachtsverbesserung in Zeitsecunden und wird dem algebraischen Zeichen zufolge mit $\pm$ bezeichnet, je nachdem die Sonne sich dem oberen Pol nähert oder davon entfernt.

5. Addire $\log \mu$, $\log B$ und $\log \operatorname{tg} \delta$; die Summe ist der Logarithme des zweiten Theils der Mitternachtsverbesserung in Zeitsecunden. Dieser zweite Theil erhält ebenfalls das ihm zukommende algebraische Zeichen oder wird mit $\pm$ bezeichnet, wenn $t' < 6^h$ ist, je nachdem μ und δ

gleiche oder ungleiche Zeichen haben; ist dagegen $t' > 6^h$, so wird dieser Theil mit $\mp$ bezeichnet, je nachdem die algebraischen Zeichen von μ und δ gleich oder ungleich sind.

6. Die algebraische Summe des ersten und zweiten Theils ist die Mitternachtsverbesserung, welche, nach ihrem algebraischen Zeichen auf die Uhrzeit der unverbesserten Mitternacht angewandt, die Uhrzeit der wahren Mitternacht giebt.

Regel

zur Anwendung der beiden Correctionen auf die Uhrzeit der unverbesserten Mitternacht, ohne Rücksicht auf die algebraischen Zeichen zu nehmen.

Die erste Correction wird zur Uhrzeit der unverbesserten Mitternacht addirt, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert; hingegen subtrahirt, wenn dieselbe sich von dem oberen Pol entfernt.

Wenn die halbe Zwischenzeit kleiner als 6^h ist, so wird die zweite Correction zu der Uhrzeit der unverbesserten Mitternacht addirt, wenn die Declination der Sonne zunimmt; wenn dieselbe dagegen abnimmt, so wird diese Correction subtrahirt. Ist aber die halbe Zwischenzeit grösser als 6^h, so wird die zweite Correction entgegengesetzt angewandt, also bei zunehmender Declination subtrahirt und bei abnehmender Declination addirt.

Regel,

die Uhrcorrection gegen mittlere Zeit zu finden.

Für die Zeit der wahren Mitternacht des Ortes, die zwischen beiden Beobachtungen liegt, interpolire die Zeitgleichung (§. 103.) und wende dieselbe so auf 12^h an, wie sie der Ephemeride nach auf wahre Zeit anzuwenden ist, um mittlere Zeit zu erhalten, so ist das Gefundene die mittlere Zeit der wahren Mitternacht.

Nimm ferner die Differenz zwischen der mittleren Zeit der wahren Mitternacht und der Uhrzeit der wahren Mitternacht und bezeichne dieselbe mit + oder —, je nachdem erstere grösser oder kleiner als letztere ist, so wird die Uhrcorrection zur Zeit der wahren Mitternacht des Ortes erhalten. Streng genommen gilt diese Uhrcorrection für die unverbesserte Mitternacht.

Beispiel 1. 1852 den 21. und 22. August in Bejukdere, auf 41° 10′ NBr. und 29° 2′ OL. von Greenwich sind nachstehende Nachmittags- und darauf folgende gleiche Vormittagshöhen beobachtet und die Zeiten eines Chronometers notirt, man soll die Uhrzeit der wahren Mitternacht und die Chronometer-Correction gegen mittlere Zeit bestimmen.

Barom. d. 21. Aug. Nachm. = 29″,93 Engl.; Therm. 78°,0 Fahrenheit.
» » 22. » Vorm. = 29″,97 Engl.; » 74°,9 »

	Nachmittag, den 21. August.	Vormittag, den 22. August.	Mittel der Zeiten.
$\underset{\smile}{\odot}$ 67° 50′ . . .	2^h 40′ 21″ . . .	7^h 0′ 53″,0 . . .	10^h 50′ 37″,0
40 . . .	40 47 . . .	0 26,0 . . .	36 ,5
30 . . .	41 15 . . .	6 59 58,5 . . .	36 ,75
20 . . .	41 42 . . .	59 31,5 . . .	36 ,75
10 . . .	42 9,5 . . .	59 4,5 . . .	37 ,0
	2^h 41′ 15″,3		10^h 50′ 36″,80
	18^h 59′ 58″,7		
	16^h 18′ 43″,4		
t' = halbe Zwischenzt. =	8^h 9′ 21″,7		

unverbesserte Mitternacht = 10^h 50′ 36″,80
Correction für Veränderung d. Refr. . . = + 0″,03
10^h 50′ 36″,83
Nachstehend gefundene Mitternachtsverb. = — 24″,72
Chron. zeigte zur Zt. d. wahr. Mitternacht = 10^h 50′ 12″,11
mittl. Zeit d. wahr. Mitternacht = 12^h 2′ 44″,96
d. 21. Aug. um 12^h w. Zt. Ab. zu Bejukdere Chron.-Correc. = + 1^h 12′ 32″,85 gegen mittl. Zeit.

Wahre Zt. Ab. d. 21. August = 12^h 0′
OL. in Zeit = — 1^h 56′
Ungef. w. Grw. Zt. Ab. d. 21. Aug. = 10^h 4′.

N. A. d. 21. August ⊙Decl. = 11° 59′ 59″ N.
stündl. Diff. = — 50″,4 · 10^h = — 8′ 24″
⊙Decl. = 11° 51′ 35″ N.
Ztgl. den 21. August = 2′ 51″,24 + auf w. Zt.
stündl. Diff. = — 0″,622
Grw. Zt. = $10,1^h$
— 6″,28 — 6″,28
Zeitgl. = 2′ 44″,96 + auf w. Zt.
Mittl. Zeit der wahren Mitternacht = 12^h 2′ 44″,96.

Den 21. August ⊙Decl. = 11° 59′ 58″,6 N.
» 22. » » = 11° 39′ 48″,5 N.
20′ 10″,1
60
1210,1
2
μ = — 2420″,2.

Nach Gleichung (VIII.) ist die logarithmische Rechnung wie folgt durchzuführen.

μ = 2420″,2 log = 3,3839n log μ = 3,3839n
t' = 8^h 9′ 22″ log A = 8,1273 — 10 log B = 7,8555 — 10n
φ = + 41° 10′ log tg = 9,9417 — 10, δ = + 11° 51′,6 log tg = 9,3225 — 10

log d. 1sten Theils = 1,4529n log d. 2ten Theils = 0,5619
1ster Theil = — 28″,37
2ter Theil = + 3″,65
Summe = — 24″,72 = der Mitternachtsverbesserung.

Mittl. Refr. f. 33° 45′ = 1′ 26″
Corr. f. Bar. 29″,93 Engl. . . = + 0″,6
» » Ther. 78° Fahr. . . = — 4″,6
Refr. Nachmittags den 21. August = 1′ 22″
mittl. Refr. f. 33° 45′ = 1′ 26″
Corr. f. Bar. 29″,97 Engl. . . = + 0″,7
» » Ther. 74°,9 Fahr. . = — 4″,0
Refr. Vormittags den 22. August . = 1′ 22″,7
Vormittags Refraction grösser . . . = 0′ 0″,7.

Nach der Beobachtung ist die doppelte Höhenänderung in 27″ = 10′; mithin verhalten sich 600″ : + 0″,7 = 27″ : x, wonach

$$x = \frac{0,7 \cdot 27}{600} = + 0'',03 \text{ Zeit} = \text{der Corr. für Refraction.}$$

Beispiel 2. 1852 den 20. und 21. Mai in Memel, auf 55° 43′ NBr. und 1^h 24′ 35″ OL. in Zeit von Greenwich, sind, ohne die Alhidade zu verschieben, nachstehende nachmittägige und darauf folgende vormittägige $\overline{\odot}$ und $\underline{\odot}$ gemessen und die Zeiten nach einem Chronometer notirt; man soll die Mitternachtsverbesserung und die Chronometer-Correction gegen mittlere Zeit finden.

Barom. Nachm. d. 20. Mai = 339‴,3 Frz.; Therm. = + 11°,6 Reaum.
» Vorm. » 21. » = 339‴,3 Frz.; » = + 12°,0 »

		Nachmittags den 20. Mai.	Vormittags den 21. Mai.	Mittel der Zeiten.
$\overline{\odot}$	66° 30′ . .	2^h 24′ 47″,5 . .	6^h 22′ 58″,0 . .	10^h 23′ 52″,75
$\underline{\odot}$	66° 30′ . .	28′ 38″.0 . .	19′ 8″,0 . .	53″,00

2^h 26′ 42″,8 unverb. Mittern. = 10^h 23′ 52″,88.
18^h 21′ 3″,0
15^h 54′ 20″,2

t' = halbe Zwischenzt. = 7^h 57′ 10″,1.

W. Zt. den 20. Mai = 12^h 0′ 0″ Ab.
OL. in Zeit = − 1^h 24′ 35″
Ungef. w. Greenw. Zt. . . . = 10^h 35′ 25″ Ab. den 20. Mai.

N. A. den 20. Mai ⊙Decl. . = 20° 4′ 20″ N.
stündl. Diff. = + 30″.55
Grw. Zt. = 10,6^h
+ 323″,83 . . + 5′ 24″
⊙ Decl. = 20° 9′ 44″ N.

Zeitgl. den 20. Mai = 3′ 43″,80 — auf w. Zt.
stündl. Diff. = − 0″,153
10,6^h
− 1″,62 . . . − 1″,62
Zeitgl. = 3′ 42″,18 — auf w. Zt.
Mittlere Zeit der wahren Mitternacht = 11^h 56′ 17″,82.

Den 20. Mai ⊙Decl. = 20° 4′ 20″,0 N.
» 21. » » = 20° 16′ 33″,1 N.
12′ 13″,1
60
733″,1
2
μ = + 1466″,2.

Mitternachtsverbesserung $(dt') = \mu\,[A \cdot \operatorname{tg}\varphi + B \cdot \operatorname{tg}\delta]$

μ = 1466″,2 log = 3,1662 log μ = 3,1662
t' = 7^h 57′ 10″ log A = 8,1026 − 10 log B = 7,7922 − 10n
φ = + 55° 43′ log tg = 0,1664, δ = + 20° 9′,7 log tg = 9,5650 − 10

1. Theil = + 27″,24 log = 1,4352; 2. Theil = − 3″,34 log = 0,5234n
2. Theil = − 3″,34
Summe = + 23″,90 = der Mitternachtsverbesserung.

Unverbesserte Mitternacht = 10^h 23′ 52″,88
Mitternachtsverbesserung = + 23″,90
Chronom. zeigte zur Zeit der wahren Mitternacht = 10^h 24′ 16″,78
mittl. Zt. der wahren Mitternacht = 11^h 56′ 17″,82
den 20. Mai um 12^h Abends w. Zt. in Memel, Chron.-Correc. = + 1^h 32′ 1″,04 gegen mittl. Zeit.

Anmerkung. Die Correction für veränderte Refraction ist, da dieselbe sehr unbedeutend wird, vernachlässigt.

§. 144.

Aus gleichen Fixsternhöhen, wovon die eine vor und die andere nach der oberen oder unteren Culmination des Sternes beobachtet ist, die Uhr- oder Chronometer-Correction gegen mittlere Zeit zu finden.

Die Declination eines Fixsternes verändert so wenig, dass man dieselbe in Zeiträumen von einigen Stunden als constant betrachten kann; es fällt daher, wenn man eine Höhe östlich und die nächstfolgende gleiche Höhe desselben Sternes westlich vom Meridian oder umgekehrt beobachtet hat, die Correction für Veränderung der Declination in der Zwischenzeit weg.

1. Wenn die ersten Höhen östlich, die zweiten westlich vom Meridian beobachtet und zugleich die entsprechenden Zeiten nach einer Uhr oder einem Chronometer notirt sind, ist — unter Voraussetzung des gleichmässigen Ganges der Uhr, und dass die Refraction bei den beobachteten Höhen gleich — die halbe Summe von den Mitteln der notirten Uhrzeiten der Augenblick der oberen Culmination des Sternes.*)

Hat man ferner die mittlere Zeit der oberen Culmination des Fixsternes nach §. 131. F. gefunden, so giebt die Vergleichung der Uhrzeit für den Augenblick der oberen Culminationszeit mit dieser die Uhrcorrection gegen mittlere Zeit des Ortes im Augenblicke der oberen Culmination des Sternes.

In Hinsicht der Refractionsveränderung gilt hier dieselbe Regel, welche in dieser Beziehung bei Bestimmung der Zeit aus gleichen Sonnenhöhen (§. 142.) gegeben ist.

2. Wenn die ersten Höhen westlich, und die zunächst darauf folgenden gleichen Höhen an der östlichen Seite des Meridians beobachtet sind, so ist unter den in 1. gemachten Voraussetzungen die halbe Summe der Mittel von den Uhrzeiten die Uhrzeit der unteren Culmination des Sternes.

Die mittlere Zeit der unteren Culmination kann man nach §. 131. F. 2. finden, und die Vergleichung dieser mit der durch die Beobachtung gefundenen Uhrzeit der unteren Culmination giebt die Uhrcorrection gegen mittlere Zeit des Ortes zur Zeit der unteren Culmination.

Diese Methode ist nicht allein einfach, sondern hat noch an kurzen Wintertagen einen erhöhten Werth, weil dann die Höhenänderung der Sonne so geringe ist, dass Zeitbestimmungen mittelst gemessener Höhen derselben keine grosse Genauigkeit gewähren. Das Beobachten der gleichen Sternhöhen hat nur seine Schwierigkeiten und so werden Seeleute selten davon Gebrauch machen.

Beispiel. 1853 den 15. und 16. Januar in Memel ($1^h\ 24'\ 35''$ OL. in Z.) sind nachstehende gleiche Höhen des Fixsternes Pollux gemessen; es soll die Uhrcorrection gegen mittlere Zeit bestimmt werden.

*) Wenn man die halbe Summe der Mittel der Uhrzeiten nimmt, so müssen beide Mittel von einem und demselben Zeitpunkte an gezählt sein. Ist dagegen der Mittag oder die Mitternacht der Uhr während der Zwischenzeit überschritten, so müssen zu dem letzten Mittel 12^h addirt werden.

Abds. d. 15. Jan.		✱		Mrgs. d. 16. Jan.
$7^h\,22'\,56''$	. .	✱ $68°\,30'$		$4^h\,39'\,14''$
24 7	. .	50		38 4
25 18	. .	69 10		36 53
26 28	. .	30		35 41
27 39	. .	50		34 31
$7^h\,25'\,17''.6$				$4^h\,36'\,52'',6$
$16^h\,36'\,52''.6$				

✱Culminat. d. 15. Jan. = $12^h\ 1'\ 5'',1$ nach der Uhr.

Nautic.-Almanac ✱Zeit den 15. Jan. .	=	$19^h\,39'\,23''.39$	
Bericht. für 1^h	=	$9'',86$	} $13'',9$
» » $24'$	=	$3'',94$	
» » $35''$	=	$0'',10$	
✱Zeit den 15. Jan. im Mittage zu Memel	=	$19^h\,39'\,9'',49$	
✱AR. .	=	$7^h\,36'\,19''.31$	
Seit dem 15. Jan. im Mitt. verfl. Sternzeit	=	$11^h\,57'\,9'',82$	
11^h ✱Zeit . . .	=	$10^h\,58'\,11'',87$	mittlere Zeit,
$57'$ » . . .	=	$56'\,50'',66$	» »
$9''$ » . . .	=	$8'',98$	» »
$0'',82$ » . . .	=	$0'',82$	» »
✱Cul.-Zeit den 15. Jan. um		$11^h\,55'\,12''.33$	mittlere Zeit.
✱Culmin. den 15. Jan. um		$12^h\,1'\,5'',10$	nach der Uhr.
U. C.	= —	$5'\,52'',77$	g. mittl. Zeit.

§. 145.

Beschreibung eines Chronometers.

Ein Chronometer wird ähnlich wie eine Taschenuhr durch eine Feder getrieben und vermittelst einer Unruhe regulirt.

Wenn ein Chronometer für den Seemann Werth haben soll, darf es seinen Gang nur sehr wenig ändern. Um dieses zu erreichen, muss jeder Theil desselben so genau wie möglich gearbeitet sein, und manche Theile müssen eine Construction haben, die wesentlich von der, ähnlicher Theile einer Taschenuhr, verschieden ist.

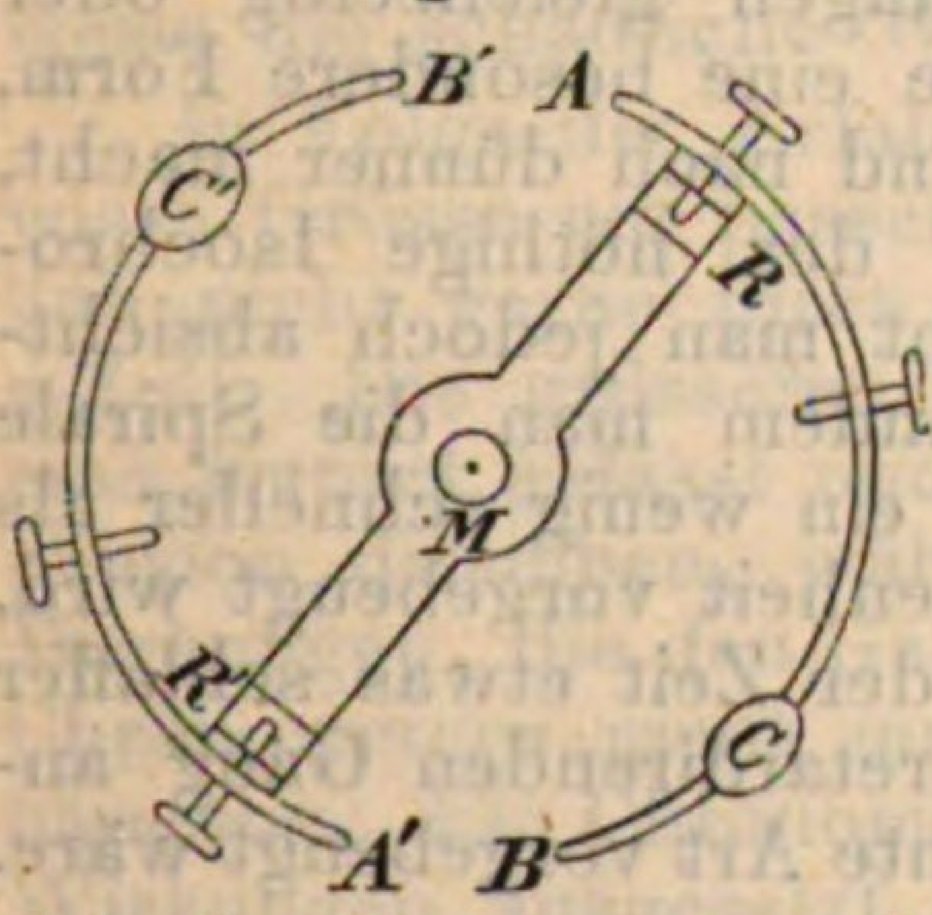
Die treibende Kraft eines Chronometers ist eine in einem Federhause eingeschlossene Feder, welche durch die Aufziehung um den Federstift gespannt wird. Indem die so gespannte Feder vermöge der Spannkraft sich abzuwickeln strebt, dreht sie das Federhaus um und erzeugt dadurch die Bewegung, welche die Uhr im Gange hält. Die Kraft dieser Feder ist im Anfange, wenn die Uhr aufgezogen ist, am stärksten und nimmt ab, je mehr die Uhr abläuft. Um diese Kraft gleichmässig zu machen, ist das Federhaus der meisten Chronometer, ebenso wie das der gewöhnlichen Spindeluhren, mit einer in einem Ende daran befestigten Kette umgeben, welche durch die Aufziehung das Federhaus dreht und auf einen kegelartigen Körper, der mit einem Schneckengange umgeben ist, an dessen, den grössten Durchmesser habenden Theil, das andere Ende der Kette befestigt ist, dergestalt aufgewunden wird, dass die letzte als die stärkste Spannkraft der Feder auf das dünnste Ende dieser Schnecke wirkt. Ganz an der untersten Grundfläche des kegelartigen Körpers, auf welchem der Schneckengang ist, ist ein ausgezahntes Rad angebracht, vermittelst dessen die übrigen Räder des Chronometers in Bewegung gesetzt werden. Die Federkraft wirkt also, wenn dieselbe am stärksten ist, mit dem kürzesten Hebel,

der aber in demselben Verhältnisse wie die Kraft abnimmt, länger wird, wodurch eine gleichmässige Wirkung der Kraft entsteht. Wenn man indessen eine sehr lange Feder anwendet und davon nur die beiden letzten Umdrehungen braucht, um das Gewerk der Uhr zu treiben, so ist die Kraft nicht in dem Grade veränderlich, dass dieselbe auf den regelmässigen Gang der Uhr Einfluss haben kann. In den sogenannten Cylinderuhren ist daher keine Kette und auch keine Schnecke, sondern das erste Rad ist unmittelbar am Federhause angebracht. Bei Chronometern haben Brèguet, Urban Jürgensen und Held diesen einfachen Mechanismus ebenfalls angewandt.

Durch einen eigenthümlichen kleinen Mechanismus, der, wenn sich eine Schnecke im Gewerke befindet, in dieser angebracht ist, wird das Chronometer während des Aufziehens im Gange gehalten.

Die bewegende Kraft des Chronometers wird, wie die der Taschenuhr, durch die sogenannte Unruhe regulirt. Diese ist mit dem Gewerke und zwar zunächst mit dem Theile desselben, welches man Echappement nennt, verbunden durch eine lange dünne Feder, Spiralfeder genannt, und hat eine ganz andere Form als die Unruhe in einer gewöhnlichen Taschenuhr. Die Wärme wirkt nämlich theils auf die Unruhe so, dass dieselbe grösser wird, theils auf die Spiralfeder, welche sie ebenfalls verlängert, wodurch hauptsächlich in der Wärme der Gang der Uhr langsamer wird. Eine gewöhnliche Taschenuhr, welche in einem gemässigten Klima nach einer mittleren Temperatur regulirt ist, wird in einem tropischen Klima täglich mehrere Minuten zu langsam gehen; dagegen würde der Gang derselben voreilend sein, wenn sie in den Polargegenden gebraucht würde. Das Chronometer erhält daher eine sogenannte compensirende Unruhe, deren Veränderungen in Wärme und Kälte eine Ausgleichung des langsameren und schnelleren Ganges bewirken, den die Uhr durch die Ausdehnung und Zusammenziehung der Spiralfeder sonst erhalten würde. Diese Unruhe, welche um das Centrum *M* (Fig. 81.) schwingt, trägt an den Enden der Stange *RR'* zwei Bögen *AB* und *A'B'*, welche von zwei Metallen zusammengesetzt sind, denen eine verschiedene Dehnbarkeit eigen ist. Solche zwei Metalle sind Messing und Stahl, jenes ist auswendig und der Stahl inwendig angebracht. Bei der stärkeren Ausdehnung des Messings in der Wärme werden die Bögen *AB* und *A'B'* nach innen gebogen oder mehr gekrümmt, wodurch die auf denselben angebrachten Massen *C* und *C'* dem Centrum näher kommen, mithin die Unruhe verringern und einen schnelleren Gang bewirken, der den langsameren Gang compensirt, welchen die Uhr sonst durch die Ausdehnung der Spiralfeder erhalten würde. Das Entgegengesetzte geschieht in der Kälte; denn das auswendige Metall wird stärker zusammengezogen als das inwendige, wodurch die Bögen *AB* und *A'B'* gerader und die compensirenden Massen *C* und *C'* weiter vom Centrum *M* entfernt werden. Die hierdurch veränderte Unruhe compensirt daher durch ihre langsamen Schwingungen die schnellere Bewegung, welche die Spiralfeder durch Verkürzung derselben von der Kälte sonst gemacht haben würde. Die compensirenden Massen *C* und *C'* können näher nach *B* und *B'* hingeschoben und ihre Wirkung dadurch dergestalt vermehrt oder vermindert werden, dass die Spirale dadurch genau compensirt wird.

Fig. 81.



An den Enden der Stange *RR'* sind ferner zwei Massen *R* und *R'* angebracht, welche aus- und eingeschoben werden können und bei solchen

Veränderungen die Unruhe vergrössern oder verkleinern, folglich einen langsameren oder schnelleren Gang bewirken müssen, ohne zu compensiren. Diese beiden Massen bewirken daher auch unabhängig von Wärme und Kälte langsamere oder schnellere Schwingungen der Unruhe und dienen nur dazu, die Uhr zu reguliren, weshalb sie auch die regulirenden Massen genannt werden. Der Gang eines Chronometers wird nämlich nicht, wie der Gang einer gewöhnlichen Taschenuhr, durch Verkürzung oder Verlängerung der Spiralfeder regulirt, sondern dies geschieht, wie schon gesagt, durch die beiden gedachten Massen R und R'.

Die Schwingungen der Unruhe werden immer grösser gemacht als sie eigentlich zu sein brauchen, damit ihre grosse Bewegung zu einer möglichst vollständigen Regulirung dienen und ausserdem äusseren Rüttelungen widerstehen kann. Die Schwingungen betragen gewöhnlich über 360°, ja erstrecken sich sogar über 450°; wenn aber das Chronometer eine zeitlang gegangen hat, wird das Oel bei den Zapfen dicker, es sammelt sich etwas Unreinlichkeit, die Reibung wird daher grösser, und die Kraft, welche früher die grosse Schwingung hervorbrachte, vermag nicht mehr eine so grosse Bewegung zu bewirken, da die Reibung auch überwunden werden muss. Der Schwung der Unruhe wird mithin kleiner; damit dieses aber keinen Einfluss auf den regelmässigen Gang der Uhr hat, muss der grössere und kleinere Schwung der Unruhe in gleichen Zeiten vollführt werden. Dieser Isochronismus oder die gleiche Zeitdauer, wie man diese Eigenschaft nennt, wird durch die Spiralfeder auf zwei verschiedene Arten erreicht. Wählt man nämlich eine überall gleich dicke sehr kurze Spirale, so wird diese vom Schwunge der Unruhe verhältnissmässig viel stärker gespannt als die längere, und die grossen Schwingungsbögen werden daher schneller als die kurzen gemacht werden. Eine sehr lange Spirale wird dagegen bei der Schwingung bedeutend weniger gespannt und die grossen Schwingungsbögen werden bei dieser mithin langsamer gemacht werden als die kleinen. Es giebt daher eine gewisse mittlere Grösse der Spirale, die oft erst durch mühsame Versuche gefunden wird, welche die Schwingungen gleichzeitig oder isochronisch macht. Man giebt auch der Spirale eine besondere Form, indem man dieselbe vom Spiralhalter an nach und nach dünner macht, wodurch, und zwar auf künstlicherem Wege, der nöthige Isochronismus erzeugt wird. In der Wirklichkeit weicht man jedoch absichtlich von dem vollständigen Isochronismus ab, indem man die Spirale dergestalt wählt, dass die kleinen Schwingungen ein wenig schneller als die grösseren werden, wodurch der Unvollkommenheit vorgebeugt wird, welche dadurch entsteht, dass die Spirale mit der Zeit etwas schlaffer und das Oel dicker wird, die Uhr somit einen retardirenden Gang annehmen würde, wenn diesem nicht auf die gedachte Art vorgebeugt wäre.

Die grossen Chronometer (Box-Chronometer) sind bestimmt in horizontaler Stellung zu bleiben, und es wird daher während der Regulirung auch auf keine andere Lage Rücksicht genommen. Die kleineren Chronometer (Taschen-Chronometer) will man dagegen oft in der Tasche tragen, wodurch dem Uhrmacher neue Schwierigkeiten entstehen, die er theils dadurch, dass er die Unruhe und den übrigen Mechanismus der Uhr möglichst vollkommen macht, wie auch durch die Spiralfeder zu beseitigen suchen muss, indem er dahin strebt, einen gleichmässigen Gang der Uhr bei jeder Lage derselben zu erzeugen.

Der Gang ist derjenige Theil, wovon die Unruhe für jede Schwingung einen Stoss, mithin auch eine erneute Kraft, erhält, welche den Verlust der Bewegung ersetzt, den die Unruhe durch die Reibung der Zapfen und durch den Widerstand der Luft erleidet. Dieser Gang muss

in einem Chronometer ganz frei, d. h. so sein, dass er, nachdem die Unruhe vom Triebrade ihren Stoss empfangen hat, ungehindert von diesem den Schwung ganz frei macht. Man hat mehrere Arten von freien Gängen; am gebräuchlichsten sind: Arnold's und Earnshaw's und in einzelnen Chronometern auch Urban Jürgensen's freier Doppelradgang. Von diesen wird jedoch Earnshaw's Gang, der am leichtesten auszuführen ist und sich auch als zweckmässig bewährt hat, am meisten angewandt. Jürgensen's Gang hat weniger Reibung, wodurch der Schwingungsbogen der Unruhe an Länge gewinnt.

Der übrige Mechanismus eines Chronometers ist zum Theil von dem einer Taschenuhr verschieden. Das Gewerk besteht aus verschiedenen Rädern und Trieben, wodurch die Bewegung von der Feder gehörig fortgepflanzt wird. Die Berechnung der Räder- und Triebzähne ist dergestalt, dass die Unruhe in grossen Chronometern vier Schwingungen in einer Secunde oder 14400 in einer Stunde macht; der Secundenzeiger macht dann zwei Sprünge in einer Secunde. Bei kleineren Chronometern ist eine raschere Bewegung passender, weil Taschenchronometer mehr einer heftigen und wiederholten äusseren Bewegung als Boxchronometer ausgesetzt sind. Man giebt daher der Unruhe derselben 18000 oder auch 21600 Schwingungen in einer Stunde und der Secundenzeiger macht 5 Sprünge in 2 Secunden, oder 3 Sprünge in jeder Secunde.

Es ist nicht zweckmässig, ein Chronometer so einzurichten, dass es eine ganze Woche zwischen zwei nächsten Aufziehungen geht, welches einen zusammengesetzteren Mechanismus und eine längere stärkere Feder erfordert. Besser ist es, ein Chronometer so zu construiren, dass es nur 40 bis 50 Stunden geht und man zieht dasselbe auch im letzteren Falle am besten täglich auf.

Dass die Reibung theils dadurch, dass den Zähnen die richtige Form gegeben wird, theils durch genaue und feine Ausarbeitung der Zapfen, die man in wohl ausgeschliffenen Steinlöchern gehen lässt, möglichst verringert werden muss, ist einleuchtend. Man beseitigt dadurch theilweise die schädliche Wirkung des mit der Zeit dick werdenden Oeles.

In Folge der Erfahrung, welche man gemacht hat, scheint eine gewisse Grösse am passendsten für Chronometer zu sein; man macht nämlich nicht gerne ihren Durchmesser kleiner als 2 Zoll oder grösser als 3 Zoll. Die grösseren, welche gewöhnlich auch dicker sind, werden in eine Kapsel gefasst und in Balanceringen aufgehängt, durch welche Suspension dieselben, während das Schiff segelt, am besten gegen äussere Wirkungen, die den Gang stören können, bewahrt werden. Den kleineren Chronometern giebt man eine gewöhnliche Taschenuhrkapsel mit Aufhängung. Ein Chronometer, das in der Tasche getragen wird, ist jedoch Wirkungen ausgesetzt, die schädlichen Einfluss auf seinen Gang haben können, selbst wenn dasselbe so regulirt ist, dass sein Gang in verticaler und horizontaler Lage gleich sein soll.

Dass man nur Chronometer, von geschickten Künstlern verfertigt, wählen, den Gang derselben sowohl am Lande wie an Bord genau untersuchen sollte und dieselben reinmachen lassen muss, wenn der Gang, nachdem er längere Zeit regelmässig gewesen ist, plötzlich ändert, ist ohne Weiteres einleuchtend.

§. 146.

Vom Zwecke, von der Aufbewahrung und Behandlung eines Chronometers.

Der Zweck, den ein Chronometer für den Seemann hat, ist hauptsächlich der, mit Hülfe desselben die geogr. Länge des Schiffsortes zu

bestimmen. Um diesem Zwecke entsprechen zu können, ist es erforderlich, dass das Chronometer einen regelmässigen Gang hat, welches bei einer von Menschenhänden gemachten Maschine aber nie ganz der Fall sein wird, und man nimmt daher an, dass ein Chronometer noch brauchbar ist, dessen täglicher Gang nicht mehr als eine, höchstens 2 Secunden verändert.

Damit ein Chronometer seinen Gang möglichst wenig verändert, hat man in Hinsicht der Behandlung und Aufbewahrung desselben besonders Nachstehendes zu beachten.

1. Man muss ein Chronometer vor Stössen und besonders schnellen, drehenden Bewegungen in horizontaler Richtung in Acht nehmen; denn letztere bewirken leicht eine augenblickliche Veränderung in der Schwingung der horizontal liegenden Spiralfeder, und verändern dadurch den Gang.

2. Wenn ein Chronometer von einer Stelle zur andern transportirt werden muss, welches jedoch möglichst zu vermeiden ist, so muss man die Balanceringe (Suspension), worin dasselbe hängt, vorher durch einen dazu angebrachten Schieber feststellen, und nach beendigtem Transporte wieder lösen.

3. An Bord muss ein Chronometer an einer Stelle aufbewahrt werden, wo die Bewegungen des Schiffes am wenigsten fühlbar sind und wo es bei heissem Wetter möglichst kalt und bei kaltem Wetter möglichst warm steht, damit die Temperatur, worin das Chronometer sich befindet, so viel wie möglich dieselbe bleibt; denn eine Veränderung derselben muss, da auch die Compensation nie ganz vollkommen sein wird, stets mehr oder weniger auf den Gang des Chronometers wirken.

Auch muss ein Chronometer möglichst weit von grossen Eisenmassen und nicht in der Nähe eines Compasses oder Magnets placirt werden, denn diese könnten, vermöge ihrer Anziehungskraft auf die Spiralfeder, möglichen Falles eine Veränderung im Gange des Chronometers bewirken.

4. Aufgezogen muss ein Chronometer immer nahe zu einer und derselben Tageszeit werden, und um dasselbe nicht zu stark vorzuwinden, muss man bemerken, wie oft man umzudrehen hat, also die Drehungen zählen, und bei der letzten langsam drehen.

Bei einem Taschenchronometer, das man beim Aufziehen ganz in der Hand hält, muss die drehende Bewegung nur mit dem Schlüssel gemacht, das Chronometer aber still gehalten werden; denn wollte man auch mit diesem drehen, so würde letztere Bewegung auf die Schwingungen der Spiralfeder Einfluss haben.

5. Wenn ein Chronometer gestanden hat, also abgelaufen ist, wird es erst aufgezogen und dann durch eine rotirende (drehende) Bewegung um die Axe des Zifferblattes in Gang gesetzt. Da man aber nie die Zeiger drehen darf, so muss die rotirende Schwingung, wodurch das Chronometer in Gang gebracht werden soll, erst dann gemacht werden, wenn dasselbe so viel zeigt, als die Zeit ist, die es angeben soll.

Die Correction (der Stand) wie auch der Gang (das Voreilen oder Zurückbleiben gegen mittlere Zeit eines Ortes) des Chronometers müssen, wenn es gestanden hat, wieder von Neuem bestimmt werden und zwar, wenn dasselbe erst 8 bis 14 Tage wieder im Gange gewesen ist; denn man darf nicht darauf rechnen, dass vor dieser Zeit der Gang wieder derselbe gewesen ist, als er vorher war, oder wie er später sein wird.

6. Ein Chronometer muss alle 2 bis 3 Jahre einmal von einem geschickten Chronometermacher, am besten von demjenigen, der dasselbe verfertigt hat, nachgesehen und reingemacht werden, sonst wird das Oel zähe und dadurch der Gang des Chronometers verändert.

Man muss das Chronometer dann gleich, wenn man an einen Ort kommt, von einem geschickten Uhrmacher reinmachen lassen, damit man nachher Zeit genug hat, den Gang desselben von Neuem zu untersuchen, denn das Chronometer muss nach der Reinmachung wenigstens schon 8 bis 14 Tage gegangen haben, ehe man auf Gleichmässigkeit seines Ganges rechnen darf.

7. So oft sich Gelegenheit darbietet, muss der Gang des Chronometers untersucht werden, denn nur aus Vergleichungen von Gängen, welche man für längere Zwischenzeiten ermittelt hat, kann man sich überzeugen, in wieweit man sich auf den gleichmässigen Gang des Chronometers, mithin auf die nach demselben berechnete Länge, verlassen kann.

8. Es ist schon vorher bemerkt, dass man ein Chronometer so wenig wie möglich bewegen darf, und es ist daher am allerwenigsten gestattet, dasselbe auf Deck zu nehmen, wenn man beobachtet, weil es dadurch, abgesehen von der Bewegung, einer anderen Temperatur, sowie Wind und Zugluft ausgesetzt wird. Man muss daher zum Beobachten eine besondere Uhr haben (Beobachtungsuhr), die vor und nach der Beobachtung mit dem Chronometer verglichen wird, woraus sich dann die Zeit, welche das Chronometer bei der Beobachtung gezeigt haben würde, wenn unmittelbar nach demselben beobachtet worden wäre, leicht finden lässt.

9. Bleibt ein Chronometer stehen, ohne dass es abgelaufen ist, so sollte man, wenn zu grosse Kälte die Ursache davon war, dasselbe erst wieder in Gang setzen, wenn es wärmer geworden ist. Bleibt es aber in einem wärmeren Klima stehen, besonders wenn es seinen Gang in der letzten Zeit verändert hat, indem die Acceleration abnehmend, oder die Retardation zunehmend war, so wird das Chronometer unrein sein, und man sollte es stehen lassen, bis es reingemacht ist. Bleibt dagegen ein Chronometer in einem mässigen Klima stehen und zwar kurz nachdem es reingemacht ist, und ohne vorher seinen Gang merklich verändert zu haben, so sollte man dasselbe gleich wieder in Gang setzen, jedoch dieses Verfahren nicht oft wiederholen.

10. Wenn die Vergleichung, welche täglich mit mehreren sich an Bord befindenden Chronometern zu machen ist, ergiebt, dass eines derselben unregelmässig geht, so muss man dieses nicht stehen lassen; denn ein solches Chronometer kann vielleicht in einem wärmeren Klima, wo das Oel flüssiger wird, wieder einen gleichmässigen Gang annehmen.

§. 147.

Von der Untersuchung der Correction (des Standes) und des Ganges eines Chronometers gegen mittlere Zeit.

Bevor ein Chronometer zu seinem eigentlichen Zwecke, nämlich die Länge nach demselben zu bestimmen, brauchbar ist, muss man die Correction desselben gegen mittlere Zeit irgend eines, am besten des Greenwicher Meridians, weil von demselben die Länge in den meisten Seekarten angegeben oder gerechnet ist, zu einer bestimmten Zeit, sowie die tägliche Veränderung dieser Correction, oder den Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit kennen, um darnach die Correction für jede beliebige Zeit bestimmen zu können.

Die Correction eines Chronometers wird wie die Uhrcorrection mit + bezeichnet, wenn dieselbe zu der Zeit, die das Chronometer zeigt, zu addiren ist, mit —, wenn sie von der Chronometerzeit subtrahirt werden muss, um die Greenwicher mittlere Zeit, oder vielmehr die Zeit, für welche die Correction gilt, zu erhalten.

Der tägliche Gang eines Chronometers gegen mittlere Zeit ist die Differenz seiner Correctionen gegen mittlere Zeit desselben Ortes in Zwischenzeiten von 24 mittleren Sonnenstunden, oder was es während 24 mittlerer Sonnenstunden mehr oder weniger als 24 Stunden zeigte.

Wenn ein Chronometer accelerirt (zu schnell geht), so bezeichnet man den Gang desselben mit —, mit + aber, wenn dasselbe retardirt (zu langsam geht).

Die Correction und den Gang eines Chronometers bestimmt man mit nautisch-astronomischen Instrumenten am genauesten durch gleiche Höhen der Sonne, über dem künstlichen Horizonte beobachtet (§. 142. und §. 143.), denn die Höhe der Sonne lässt sich genauer als die eines anderen Himmelskörpers messen, und die Beobachtungen über dem künstlichen Horizonte haben durch die doppelte Höhenänderung, wie auch dadurch, dass die irdische Refraction die Kimmtiefe unsicher macht, vor den Beobachtungen über dem Seehorizonte unstreitig den Vorzug. Auf hohen Breiten ist aber an kurzen Wintertagen selbst die grösste Höhenänderung der Sonne so gering, dass gleiche Höhen von Fixsternen nahe am ersten Vertical beobachtet, denen der Sonne vorzuziehen sind.

Auch kann man die Correction und den Gang eines Chronometers durch nicht gleiche Sonnen-, Fixstern- oder Planetenhöhen ermitteln; man muss aber diese Beobachtungen zu der möglichst vortheilhaftesten Zeit anstellen, auf den Stand des Barometers und Thermometers Rücksicht nehmen, zur Berechnung des Stundenwinkels (§§. 135. 137.) Logarithmen mit 6 Decimalstellen brauchen, überhaupt so genau als möglich verfahren und bei Ermittelung des Ganges nur die Resultate aus nahe gleichen Höhen desselben Gestirnes, an derselben Seite des Meridians beobachtet, mit einander vergleichen.

Die Correction eines Chronometers wird aus einer der gedachten Zeitbestimmungen gefunden; um aber den Gang zu ermitteln, müssen wenigstens zwei Zeitbestimmungen in Zwischenzeiten von 3 bis 14 Tagen, entweder an demselben Orte, oder an verschiedenen Orten, deren Längenunterschied man genau kennt, gemacht sein.

Anmerkung. Während der Gang eines Chronometers untersucht wird, sollte man wenigstens täglich die Temperatur, worin dasselbe sich befindet, notiren, zu welchem Zwecke im Kasten einiger Chronometer ein Thermometer angebracht ist. Wenn sich dann bei Untersuchungen in verschiedenen Temperaturen eine Veränderung des Ganges ergiebt, welche mit der Temperatur in irgend einem Verhältnisse steht, so kann man darnach vielleicht bei Veränderung der Temperatur auf die Veränderung des Ganges schliessen. Am besten ist es, wenn ein Chronometer immer in derselben Temperatur bleibt, worin sein Gang untersucht ist, welches auf Winterreisen durch Erwärmung eines kleinen eisernen viereckigen Behälters mittelst einer Lampe, auf den das Chronometer in einem Kasten zu befestigen ist, geschehen kann.

§. 148.

Den Gang und die Correction (den Stand) eines Chronometers gegen mittlere Zeit aus Beobachtungen, die an demselben Orte gemacht sind, zu finden.

Man beobachte gleiche Sonnenhöhen nach dem Chronometer oder, wenn dieses sich nicht bequem thun lässt, nach einer Beobachtungsuhr, welche kurz vor und nach der Beobachtung auf's Genaueste mit dem Chronometer verglichen wird, und finde demnächst die mittlere Zeit der Beobachtung und die Correction des Chronometers gegen mittlere Zeit des Ortes (§. 142. und 143.).

Wenn aber an kurzen Wintertagen die Höhenänderung der Sonne sehr geringe ist, beobachte man gleiche Fixsternhöhen in oder nahe am ersten Vertical und bestimme darnach die mittlere Zeit und die Correction des Chronometers gegen diese (§. 144.).

Wenn die Umstände es aber nicht gestatten sollten, gleiche Sonnen- oder Fixsternhöhen zu beobachten, so beobachte man Sonnen-, Fixstern- oder Planetenhöhen, und zwar, wenn das Gestirn sich so nahe wie möglich am ersten Vertical befindet, notire gleichzeitig mit der Beobachtung den Stand des Barometers und Thermometers, und finde nach §. 137. die mittlere Zeit des Ortes und die Correction des Chronometers gegen diese, indem man die Rechnung mit Logarithmen ausführt, welche 6 Decimalstellen haben, die Bogengrössen auf Secunden und die Zeitgrössen auf Zehntelsecunden genau nimmt.

Nach Verlauf von 3 bis 14 Tagen oder auch jeden Tag, wenn sich Gelegenheit darbietet, so lange die Zeit es erlaubt, mache man ähnliche Beobachtungen, wie vorher gemacht sind, und finde wieder darnach die mittlere Zeit und die Correction gegen mittlere Zeit.

Jede früher gefundene Chronometer-Correction von einer später gefundenen algebraisch subtrahirt, und den Rest durch die Anzahl der zwischen den Beobachtungen, wonach die in Rede stehenden Correctionen bestimmt sind, verflossenen mittleren Tage dividirt, giebt den täglichen Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit mit dem ihm zukommenden algebraischen Zeichen.

Will man bei Ermittelung des Ganges nicht auf die Zeichen Rücksicht nehmen, so kann dieses nach folgenden Regeln geschehen.

1. Wenn das Chronometer der mittleren Zeit eines Ortes voraus ist und dieser Fehler zunimmt, so accelerirt; nimmt der Fehler aber ab, so retardirt das Chronometer gegen mittlere Zeit.

2. Ist das Chronometer zurück gegen mittlere Zeit und die Correction nimmt zu, so retardirt; nimmt der Fehler aber ab, so accelerirt das Chronometer.

3. Ist das Chronometer voraus und bei der nächsten Beobachtung zurück gegen mittlere Zeit, so verliert das Chronometer; ist dasselbe aber zurück gegen mittlere Zeit und bei der folgenden Beobachtung voraus, so accelerirt es.

In den Fällen 1 und 2 ist die Differenz, im Falle 3 aber die Summe der Chronometer-Correctionen ohne Rücksicht auf die Zeichen, dividirt durch die Anzahl der nach mittlerer Zeit verflossenen Tage, gleich dem täglichen Gange des Chronometers gegen mittlere Zeit.

Die bisher gegebenen Regeln gelten für alle Fälle; hat man aber gleiche Fixsternhöhen beobachtet, so gelangt man leichter zum Ziel, wenn man, um die Correction des Chronometers gegen mittlere Zeit zu erhalten, nur die mittlere Zeit von den zuletzt beobachteten gleichen Fixsternhöhen berechnet (§. 144.). Den Gang zu finden, ziehe man die Zeiten, welche den Beobachtungen nach, das Chronometer bei der später stattgehabten Culmination des Sternes zeigte, von den Chronometerzeiten der früheren Culmination ab und dividire mit der Anzahl der verflossenen Sterntage, so erhält man nahe genug den Gang des Chronometers mit seinem algebraischen Zeichen gegen Sternzeit in einem Sterntage. Hierzu addire man algebraisch — $3' \; 55'',91$ (denn so viele Minuten und Secunden mittlere Zeit ist ein mittlerer Sonnentag länger als ein Sterntag, und ein Chronometer, welches nach Sternzeit einen richtigen Gang hat, muss gegen mittlere Zeit in einem Sterntage schon so viel voreilen), so erhält man den Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit in einem Sterntage, also in $23^h \; 56' \; 4'',09$ mittlerer Zeit. Zu diesem Gange des

Chronometers addire die Acceleration nach der nautischen Tafel XXIV. für die Secunden oder allenfalls Minuten und Secunden des Ganges, so ist die Summe der Gang des Chronometers in 24 mittleren Sonnenstunden gegen mittlere Zeit.

Hat man gleiche Höhen eines Fixsternes an derselben Seite des Meridians beobachtet, so braucht man ebenfalls nur, um die Correction des Chronometers gegen mittlere Zeit zu erhalten, aus der letzten Beobachtung den Stundenwinkel vom oberen Meridian zu berechnen und darnach die mittlere Zeit zu finden (§. 139.); den täglichen Gang erhält man dann ganz durch dasselbe Verfahren, wie vorstehend bei gleichen Fixsternhöhen angegeben ist, denn die Wirkung der Präcession, Nutation und Aberration ist in einem Zeitraum von einigen Tagen so unbedeutend, dass man ohne merklichen Fehler annehmen kann, der Fixstern habe stets an einem Orte zu derselben Sternzeit dieselbe Höhe über dem Horizonte.

Nur die Veränderung der Refraction könnte hier noch eine kleine Correction verursachen.

Es bezeichne r die bei der früher und r' die bei der einige Tage später beobachteten Höhe stattgehabte Refraction; ist nun $r' > r$, so sind die letzten Höhen um $r' - r$ zu klein gewesen. Es bezeichne noch k die Zeitsecunden, in welchen die Höhe des beobachteten Sternes sich um $r' - r$ verändert, so hat man, wenn die Höhen an der östlichen Seite des Meridians gemessen, die um $r' - r$ zu kleine Höhe um k Secunden zu früh; wenn die Höhen aber an der westlichen Seite gemessen sind, um k Secunden zu spät beobachtet.

Es ergiebt sich daher, wenn man k dasselbe Zeichen giebt als $r' - r$, dass man k zu der Zeit des Chronometers bei der späteren Beobachtung addiren muss, wenn die Höhen östlich, subtrahiren, wenn dieselben westlich vom Meridian beobachtet sind, um die Zeit zu finden, welche das Chronometer gezeigt haben würde, wenn die Refraction dieselbe wie bei der früheren Höhe gewesen wäre.

Um k zu finden, muss man r und r' berechnen, und weil man stets mehr als eine Höhe misst, so findet man dadurch leicht die Höhenänderung in der zwischen den einzelnen Höhen verflossenen Zeit, und hat dann die Proportion

$$dH : (r' - r) = dT : k,$$

worin dH die Höhenänderung in dT Zeitsecunden bezeichnet. Also ist

$$k = (r' - r)\,\frac{dT}{dH}.\text{*)}$$

Um die zwischen zwei Beobachtungen verflossenen mittleren Tage zu erhalten, zieht man das Datum und die mittlere Zeit der früheren Beobachtung von dem Datum und der mittleren Zeit der späteren Beobachtung ab, und drückt die Stunden, Minuten und Secunden in Decimaltheilen von Tagen und zwar auf Tausendtheile genau aus. Hat man aber Zeitbestimmungen nach gleichen Sonnenhöhen gemacht, so erhält man immer die Chronometer-Correction für den unverbesserten Mittag oder die unverbesserte Mitternacht, also sehr nahe für den wahren Mittag oder die wahre Mitternacht. Man kann, da die Zeitgleichung in 24 Stunden nahe 30 Secunden verändert, die mittlere Zeit mit der wahren Zeit verwechseln.

Bei Ermittelung des Ganges aus nicht gleichen Höhen ist zu bemerken, dass man immer nur zwei, aus nahe gleichen Höhen desselben

*) Sind die Höhen über dem künstlichen Horizonte beobachtet, so ist der halbe Unterschied derselben $= dH$ zu nehmen.

Himmelskörpers an derselben Seite des Meridians beobachtet, abgeleitete Chronometer-Correctionen mit einander vergleichen darf, um den Gang zu finden. Der Grund hiervon ist, dass ein etwaiger Fehler in der Breite des Ortes unter den gedachten Umständen nahe einen gleichen Fehler in den Chronometer-Correctionen, welche an verschiedenen Tagen gefunden sind, macht, wie auch, dass der etwaige Fehler des Instrumentes, womit die Höhen gemessen sind, bei denselben Höhen auch derselbe sein wird und dass es oft einem Beobachter eigen ist, alle Höhen entweder etwas zu gross oder etwas zu klein zu messen.

Die Gleichheit mehrer nach verschiedenen Beobachtungen ermittelten Gänge eines Chronometers lässt auf einen gleichmässigen Gang desselben schliessen. Zeigen sich hierbei aber nicht ganz unbedeutende oder vielmehr grössere Differenzen, als von den Beobachtungsfehlern herrühren können, so muss man es zu ermitteln suchen, ob vielleicht einige der Beobachtungen fehlerhaft sind und diese ausschliessen. Ist aber keine der Beobachtungen fehlerhaft zu halten, so muss man annehmen, dass das Chronometer unregelmässig geht, und dasselbe ist dann, je nachdem die Differenzen der Gänge kleiner oder grösser sind, weniger oder gar nicht brauchbar zur Längenbestimmung.

Ist jeder Gang des Chronometers aus Beobachtungen, deren Zwischenzeit weniger als 3 Tage beträgt, ermittelt und sind die Zwischenzeiten nahe gleich gewesen, so kann man die Gänge alle gleich zuverlässig halten und das arithmetische Mittel aus allen als den richtigen Gang annehmen.

Hat man aber aus den gefundenen Chronometer-Correctionen so viele Gänge wie möglich ermittelt, indem damit so viele Combinationen (Verbindungen) wie möglich gemacht sind, oder sind die verschiedenen Gänge doch aus Zeitbestimmungen gefunden, deren Zwischenzeiten ungleich, so muss der wahrscheinliche Gang gefunden werden, welches nach der im folgenden Paragraphen gegebenen Vorschrift geschehen kann.

§. 149.

Aus mehren mit einander differirenden Gängen eines Chronometers den wahrscheinlichen Gang desselben zu finden.

Man multiplicire jeden der gefundenen Gänge mit der Anzahl Tage, welche zwischen den Beobachtungen, wonach der Gang gefunden ist, verflossen sind; die Summe der hierdurch erhaltenen Producte dividire man durch die Summe der gebrauchten Multiplicatoren, so ist der Quotient der wahrscheinliche Gang des Chronometers; oder was leichter ist:

dividire die Summe aller Differenzen der Correctionen, woraus die Gänge ermittelt werden sollen, durch die Summe aller Tage, womit die einzelnen Differenzen dividirt werden sollten, so ist der Quotient der wahrscheinliche Gang des Chronometers.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen; denn wenn man annimmt, dass jede der Beobachtungen, wonach die Correctionen des Chronometers bestimmt wurden, gleich zuverlässig war, so muss z. B. ein Gang, der aus zwei Beobachtungen, zwischen welchen zwei Tage verflossen sind, gefunden wurde, auch doppelt so zuverlässig sein oder kann wahrscheinlich nur mit einem halb so grossen Fehler behaftet sein, als ein Gang, der aus Beobachtungen gefunden wurde, zwischen welchen nur ein Tag verflossen ist. Nach der gegebenen Regel erhält daher auch jeder Gang gleichsam so viele Stimmen bei Ermittelung des wahrscheinlichen Ganges, als Tage zwischen den Beobachtungen verflossen

sind, woraus derselbe gefunden ist. Der Gang, welcher aus Beobachtungen gefunden wurde, zwischen welchen zwei Tage verflossen sind, erhält also auch doppelt so viel Einfluss auf den wahrscheinlichen Gang, als derjenige, welcher aus Beobachtungen gefunden wurde, zwischen welchen nur ein Tag verflossen ist.

Glaubt man sich berechtigt, irgend welche der Beobachtungen oder vielmehr der Chronometer-Correctionen, die aus jenen ermittelt sind, weniger zuverlässig zu halten als die übrigen, so kann, wenn dieselben nicht etwa ganz ausgeschlossen werden, jedem Gange, der aus einer solchen weniger zuverlässigen Correction, in Verbindung mit einer anderen ermittelt ist, je nachdem diese Correction $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. zuverlässig angenommen wird als die übrigen, d. h. je nachdem der Fehler, womit eine solche Correction behaftet ist, das Doppelte, Drei- oder Vierfache u. s. w. betragen kann, als der Fehler der anderen Correction, auch bei Berechnung des wahrscheinlichen Ganges, nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. so viel Stimmrecht zugestanden werden, als derselbe nach Anzahl der verflossenen Tage zwischen den Beobachtungen erhalten sollte. Man muss also unter den gedachten Umständen die Anzahl der verflossenen Tage zwischen den Beobachtungen, wie auch die zugehörige Differenz der Correctionen mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ multipliciren und diese Producte bei Addition der Tage und Gänge in Rechnung nehmen.

Ist ein Gang aus zwei Correctionen ermittelt, die beide weniger zuverlässig gehalten werden als die andern, so muss, wenn die eine Correction z. B. $\frac{1}{2}$ und die andere $\frac{1}{4}$ der Zuverlässigkeit hat, die Anzahl Tage, welche zwischen den Beobachtungen verflossen ist, wie auch die zugehörige Differenz der Correction, mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, also mit $\frac{1}{8}$ multiplicirt und dieses Product gebraucht werden, wenn man den wahrscheinlichen Gang berechnet.

Die nachstehenden Beispiele werden dies deutlicher machen.

Beispiel 1. Am 8. October wahren Mittags ist die Correction eines Chronometers $+ 0^h\ 50'\ 10'',5$ und am 11. Octbr. wahren Mittags $+ 0^h\ 50'\ 12'',7$ gegen mittlere Zeit an demselben Orte gefunden; man soll den Gang des Chronometers ermitteln.

Den 11ten wahren Mittags Chronometer-Correction	$= + 0^h\ 50'\ 12'',7$
» 8ten » » » »	$= + 0^h\ 50'\ 10'',5$
3 Tage = der verfloss. Zeit. Diff. der Corr.	$= + \quad 0'\ 2'',2.$

also $+ 2'',2 : 3 = + 0'',73$ ist der tägliche Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit gewesen; das Chronometer geht mithin zu langsam.

Anmerkung. Die verflossene Zeit ist hier 3 wahre Sonnentage, und man sollte den Divisor in mittleren Sonnentagen ausgedrückt haben; aber man kann, wie schon früher bemerkt ist, weil die Zeitgleichung höchstens nahe 30 Secunden in einem Tage verändert, wenn die Zwischenzeit nicht mehr als 14 Tage beträgt, stets ohne erheblichen Fehler diese Verwechselung machen.

Beispiel 2. Am 25. August um $5^h\ 24'$ mittlere Zeit Abends ist die Correction eines Chronometers $- 1^h\ 16'\ 35'',6$ und am 29. August um $6^h\ 15'$ mittlere Zeit Abends ist dieselbe $- 1^h\ 17'\ 2'',8$ gegen mittlere Zeit an demselben Orte gefunden; man soll den täglichen Gang ermitteln.

Den 29. Aug. $6^h\ 15'$ mittl. Zt. Abds. Chronom.-Corr.	$- 1^h\ 17'\ 2'',8$ g. mittl. Zt.
» 25. » $5^h\ 24'$ » » » » »	$- 1^h\ 16'\ 35'',6$ » » »
4 Tage $0^h\ 51'$ Diff. d. Corr.	$= - \quad 0'\ 27'',2.$

4,035 mittlere Tage ist die verflossene Zeit.

Der tägliche Gang ist also $= \frac{-27'',2}{4,035} = -6'',74$ gegen mittlere Zeit, d. h. das Chronometer gewinnt täglich 6″,74 gegen mittlere Zeit.

Beispiel 3. Am 23. Januar wahren Mittags war die Correction eines Chronometers — 0^h 1′ 10″,5 und am 2. Februar wahren Mittags war dieselbe + 0^h 0′ 2″,3 gegen mittlere Zeit desselben Ortes; wie ist demnach der tägliche Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit gewesen?

Den 2. Februar	Chronometer-Correction . . .	+ 0^h 0′ 2″,3	geg. mittl. Zeit,
» 23. Januar	» » . . .	— 0^h 1′ 10″,5	» » »
10 Tage = der verfloss. Zeit.	Diff. =	+ 1′ 12″,8;	

mithin ist der tägliche Gang des Chronometers $= \frac{72'',8}{10} = +7'',28$ gegen mittlere Zeit; d. h. das Chronometer retardirt täglich 7″,28 gegen mittlere Zeit.

Beispiel 4. Es sind in Memel in 1^h 24′ 34″,7 OL. von Greenwich in Zeit, aus gleichen Höhen der Sonne nachstehende Chronometer-Correctionen gefunden; man soll daraus den Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit finden.

Den 11. Mai	wahren Mittags Chron.-Corr.	+ 1^h 18′ 19″,82	geg. mittl. Zeit.
» 15. »	» » » »	+ 1^h 17′ 58″,20	» » »
» 18. »	» » » »	+ 1^h 17′ 41″,81	» » »
» 19. »	» » » »	+ 1^h 17′ 35″,93	» » »
» 23. »	» » » »	+ 1^h 17′ 13″,64	» » »

Zw. d. 11. u. 15. sind	4 Tage;	Diff. d. Cor. = — 21″,62,	mithin	$\frac{-21'',62}{4} = -5'',41$	tgl. Gang.
» » 11. » 18. »	7 »	» » » = — 38″,01,	»	$\frac{-38'',01}{7} = -5'',43$	» »
» » 11. » 19. »	8 »	» » » = — 43″,89,	»	$\frac{-43'',89}{8} = -5'',49$	» »
» » 11. » 23. »	12 »	» » » = — 66″,18,	»	$\frac{-66'',18}{12} = -5'',51$	» »
» » 15. » 18. »	3 »	» » » = — 16″,39,	»	$\frac{-16'',39}{3} = -5'',46$	» »
» » 15. » 19. »	4 »	» » » = — 22″,27,	»	$\frac{-22'',27}{4} = -5'',57$	» »
» » 15. » 23. »	8 »	» » » = — 44″,56,	»	$\frac{-44'',56}{8} = -5'',57$	» »
» » 18. » 19. »	1 »	» » » = — 5″,88,	»	$\frac{-5'',88}{1} = -5'',88$	» »
» » 18. » 23. »	5 »	» » » = — 28″,17,	»	$\frac{-28'',17}{5} = -5'',63$	» »
» » 19. » 23. »	4 »	» » » = — 22″,29,	»	$\frac{-22'',29}{4} = -5'',57$	» »
= 10 (Anzahl der Reihen.)	= 56 (Summe der Tage.)	= — 309″,26 (Summe der Differenzen.)		= — 55″,52 (Summe der tägl. Gänge.)	

Wahrscheinlicher täglicher Gang $= \frac{-309'',26}{56} = -5'',52$, und

mittlerer täglicher Gang $= \frac{-55'',52}{10} = \ldots\ldots\ldots -5'',55$;

der Unterschied zwischen dem wahrscheinlichen und mittleren Gange beträgt mithin nur 0″,03.

Beispiel 5. 1852 in Gibraltar auf 5° 19′ WL. von Greenwich sind aus gleichen Höhen der Sonne nachstehende Chronometer-Correctionen gefunden; man soll daraus den wahrscheinlichen Gang des Chronometers ermitteln.

Den 18. Sept. Chron.-Corr.	$= -$	$1^h\ 2'\ 35'',05$	geg.	mittl.	Zeit,
» 20. » » »	$= -$	$1^h\ 2'\ 26'',06$	»	»	»
» 23. » » »	$= -$	$1^h\ 2'\ 11'',89$	»	»	»
» 25. » » »	$= -$	$1^h\ 2'\ 2'',69$	»	»	»

wobei zu bemerken ist, dass die letzte Correction, der Beobachtung wegen, nur halb so zuverlässig ist, als die anderen Correctionen sind.

Zw. d. 18. u. 20. sind 2 Tage;	Cor. d. 20. — Cor. d. 18. $= + 8'',99$;	also tgl. Gang $= \frac{8'',99}{2}$	$= + 4'',50$
» » 18. » 23. » 5 »	» » 23. — » » 18. $= + 23'',16$;	» » » $= \frac{23'',16}{5}$	$= + 4'',63$
» » 18. » 25. » 7 »	» » 25. — » » 18. $= + 32'',36$;	» » » $= \frac{32'',36}{7}$	$= + 4'',62$
» » 20. » 23. » 3 »	» » 23. — » » 20. $= + 14'',17$;	» » » $= \frac{14'',17}{3}$	$= + 4'',72$
» » 20. » 25. » 5 »	» » 25. — » » 20. $= + 23'',37$;	» » » $= \frac{23'',37}{5}$	$= + 4'',67$
» » 23. » 25. » 2 »	» » 25. — » » 23. $= + 9'',20$;	» » » $= \frac{9'',20}{2}$	$= + 4'',60$
$= 6$ (Anzahl der Reihen). $= 24$ (Summe der Tage).	$= + 111'',25$; (Summe der Differenzen).		$= + 27'',74$ (Summe der tägl. Gänge).

Wenn angenommen wird, dass alle Correctionen gleiche Zuverlässigkeit haben, ist

$$\frac{111'',25}{24} = + 4'',64 \text{ der wahrscheinliche tägliche Gang}$$

und $$\frac{27'',74}{6} = + 4'',62 \text{ der mittlere tägliche Gang des Chronometers.}$$

Will man darauf Rücksicht nehmen, dass die Correction vom 25sten nur halb so zuverlässig war, als die andern, so sind die Differenzen der Correctionen sowohl als die Anzahl der verflossenen Tage, welche aus Verbindungen der Correction vom 25sten gefunden werden, mit $\frac{1}{2}$ zu multipliciren, oder mit 2 zu dividiren und man hat dann:

Zwischenzeit $= 2$ Tage;	Diff. der Corr. $= + \ldots\ldots\ldots$	$8'',99$
» $= 5$ »	» » » $= + \ldots\ldots\ldots$	$23'',16$
» $= \frac{7}{2}$ »	» » » $= + \frac{32'',36}{2} =$	$+ 16'',18$
» $= 3$ »	» » » $= + \ldots\ldots\ldots$	$14'',17$
» $= \frac{5}{2}$ »	» » » $= + \frac{23'',37}{2} =$	$+ 11'',685$
» $= \frac{2}{2}$ »	» » » $= + \frac{9'',20}{2} =$	$+ 4'',60$
Anzahl der Tage $= 17$;	Summe der Correctionen $=$	$+ 78'',785$;

also $\frac{78'',785}{17} = + 4'',63 =$ dem wahrscheinlichen täglichen Gange des Chronometers.

Man sieht aus den beiden letzten Beispielen, dass, wenn die Abweichungen der verschiedenen Gänge des Chronometers nur klein sind, es beinahe dasselbe Resultat giebt, ob man das arithmetische Mittel aus

den Gängen nimmt, oder den wahrscheinlichen Gang berechnet; der Unterschied kann jedoch, wenn die Beobachtungen weniger zuverlässig gemacht sind, bedeutender werden.

Ist die Correction eines Chronometers gegen mittlere Zeit des Beobachtungsortes und der tägliche Gang gegen mittlere Zeit ermittelt, so ist es für den practischen Gebrauch am bequemsten, wenn man die Correction des Chronometers für den mittleren Mittag zu Greenwich und zwar für den Tag der letzten Beobachtung reducirt, welches nach folgender Regel geschehen kann.

Suche aus der mittleren Zeit des Ortes der Beobachtung, wonach die letzte Correction des Chronometers gefunden ist, die entsprechende Greenwicher mittlere Zeit, indem OL. in Zeit mit — und WL. in Zeit mit + auf die mittlere Zeit der Beobachtung angewandt wird, die so gefundene mittlere Greenwicher Zeit subtrahire von der Zeit des nächstfolgenden mittleren Mittags in Greenwich und schliesse:

> 24^h verhalten sich zu dem Unterschied zwischen der gefundenen mittleren Greenwicher Zeit und dem nächstfolgenden mittleren Greenwicher Mittage, wie der tägliche Gang des Chronometers zu x.

Die so gefundene Grösse x sowie die Länge des Ortes in Zeit von Greenwich (östlich mit — und westlich mit + bezeichnet) und die zuletzt gefundene Correction des Chronometers gegen mittlere Zeit des Ortes algebraisch addirt, geben die Correction des Chronometers gegen mittlere Zeit im mittleren Mittage in Greenwich und zwar, wenn die der letzten Zeit der Beobachtung entsprechende mittlere Greenwicher Zeit Vormittags fällt, für dasselbe bürgerliche Datum als diese; fällt aber die gedachte mittlere Greenwicher Zeit Nachmittags, dann für das um einen Tag spätere Datum.

Beispiel 6. Es sei, wie in Beispiel 4., die Correction des Chronometers am 23. Mai wahren Mittags $= + 1^h\ 17'\ 13'',64$ und der tägliche Gang $- 5'',55$ gegen mittlere Zeit; die Länge in Zeit von Memel (als Ort der Beobachtung) ist $1^h\ 24'\ 34'',7$ östlich; man soll die Chronometer-Correction für den mittleren Greenwicher Mittag finden.

Die mittlere Zeit im wahren Mittage den 23. Mai ist

ungefähr	$= 11^h\ 56'\ 35''$	Morgens,
OL. in Zeit	$= - 1^h\ 24'\ 35''$	
mittl. Greenw. Zeit	$= 10^h\ 32'\ 0''$	Morgens
oder	$1^h\ 28'$	vor d. mittl. Grw. Mittage d. 23. Mai.

$$24^h : 1^h,5 = - 5'',5 : x,$$

$$\text{wonach } x = \frac{-5,5 \cdot 1,5}{24} = - 8,25 : 24 = - 0'',34 \text{ wird.}$$

	$x = -$	$0'',34$
OL. in Zeit	$= - 1^h\ 24'\ 34'',7$	
Chronom.-Corr.. .	$= + 1^h\ 17'\ 13'',64$	
algebr. Summe . .	$= - 0^h\ 7'\ 21'',4$	= der Correct. gegen mittl. Greenw. Zeit im mittl. Mittage in Greenwich den 23sten.

Beispiel 7. Es sei, wie in Beispiel 5., die Chronometer-Correction am 23. September wahren Mittags in Gibraltar, also in $5^\circ\ 19'$ WL. von Greenwich $- 1^h\ 2'\ 11'',89$ gegen mittlere Zeit, der tägliche Gang $= + 4'',6$ gegen mittlere Zeit, man soll die Correction des Chronometers gegen Greenwicher mittlere Zeit zur Zeit des mittleren Mittags in Greenwich finden.

Ungef. mittl. Zeit im
wahren Mittage d. 23. Spt. $=$ $11^h\ 52'\ 15''$ Morgens,
WL. in Zeit $= + 0^h\ 21'\ 16''$

mittl. Grw. Zeit d. 23. Sept. $=$ $12^h\ 13'\ 31''$ Morgens,
$=$ $0^h\ 13'\ 31''$ Nachmittags
oder $23^h\ 46'\ 29''$ vor d. mittl. Grw. Mitt. d. 24. Spt.

$$24^h : 23^h,8 = +4'',6 : x,$$

$$\text{wonach } x = \frac{23,8 \cdot 4,6}{24} = + \quad 4'',56 \text{ wird.}$$

WL. in Zeit $= + 0^h\ 21'\ 16'',00$
Chronom.-Corr. . . $= - 1^h\ \ 2'\ 11'',89$ gegen mittl. Zeit d. 23. Sept.
Chronom.-Corr. . . $= - 0^h\ 40'\ 51'',33$ gegen mittlere Greenw. Zeit
zur Zeit des mittl. Mittags in Greenwich d. 24. Sept.

Beispiel 8. 1852 in Memel sind durch gleiche Höhen des Sterns Aldebaran für die oberen Culminationen desselben die Chronometerzeiten wie folgt gefunden; man soll daraus den Gang gegen mittlere Zeit und die Correction des Chronometers gegen mittlere Greenwicher Zeit im mittleren Mittage finden.

den $\frac{30}{11}$ zeigte das Chron. zur Zeit d. oberen Culm. des Aldeb. $10^h\ 36'\ 25'',6$
» $\frac{5}{12}$ » » » » » » » » » $10^h\ 17'\ 13'',0$
» $\frac{9}{12}$ » » » » » » » » » $10^h\ \ 1'\ 48'',1$
» $\frac{13}{12}$ » » » » » » » » » $9^h\ 46'\ 28'',3$.

Zwischen d. 30. Nov. und 5. Dec. sind 5 Tage;
Culm. d. 30. Nov. — Culm. d. 5. Dec. $= + 19'\ 12'',6$

$$\text{mithin Gang d. Chron. geg. Sternzeit} = \frac{19'\ 12'',6}{5} = + \ 3'\ 50'',52$$
$- \ 3'\ 55'',91$

Gang d. Chron. in einem Sterntage geg. mittl. Zeit $= - \ 0'\ \ 5'',39$
Acceleration für $5'',4 =$ $0'',01$

Gang des Chron. geg. mittl. Zeit in 24 mittl. Stunden $= - 5'',40$.

Zwischen d. 30. Nov. und 9. Dec. sind 9 Tage;
Culm. d. 30. Nov. — Culm. d. 9. Dec. $= + 34'\ 37'',5$
mithin Gang des Chron. in einem Sterntage geg.

$$\text{Sternzeit} = \frac{34'\ 37'',5}{9} \ldots\ldots\ldots = + \ 3'\ 50'',83$$
$- \ 3'\ 55'',91$

Gang d. Chron. in einem Sterntage geg. mittl. Zeit $= - \ 0'\ \ 5'',08$
Acceleration für $5'',08 =$ $0'',01$

Gang d. Chron. gegen mittl. Zeit in 24 mittl. Stunden $= - 5'',09$.

Zwischen d. 30. Nov. und 13 Dec. sind 13 Tage;
Culm. d. 30. Nov. — Culm. d. 13. Dec. $= + 49'\ 57'',3$

$$\text{mithin Gang d. Chron. gegen Sternzeit} = \frac{49'\ 57'',3}{13} \doteq + \ 3'\ 50'',56$$
$- \ 3'\ 55'',91$

Gang d. Chron. geg. mittl. Zeit in einem Sterntage $= - \ 0'\ \ 5'',35$
Acceleration für $5'',35 =$ $0'',01$

Gang des Chron. geg. mittl. Zeit in 24 mittl. Stunden $= - 5'',36$.

Zwischen d. 5. und 9. Dec. sind 4 Tage;
Culm. d. 5. — Culm. d. 9. Dec. = + 15′ 24″,9

mithin Gang d. Chron. geg. Sternzeit $= \frac{15' \, 24'',9}{4}$ = + 3′ 51″,22
— 3′ 55″,91

Gang d. Chron. geg. mittl. Zeit in einem Sterntage = — 0′ 4″,69
Acceleration für 4″,69 = 0″,01

Gang des Chron. geg. mittl. Zeit in 24 mittl. Stunden = — 4″,70.

Zwischen d. 5. und 13. Dec. sind 8 Tage;
Culm. d. 5. — Culm. d. 13. Dec. = + 30′ 44″,7

mithin Gang d. Chron. geg. Sternzeit $= \frac{30' \, 44'',7}{8}$ = + 3′ 50″,59
— 3′ 55″,91

Gang d. Chron. in einem Sterntage geg. mittl. Zeit = — 0′ 5″,32
Acceleration für 5″,32 = 0″,01

Gang des Chron. geg. mittl. Zeit in 24 mittl. Stunden = — 5″,33.

Zwischen d. 9. und 13. Dec. sind 4 Tage;
Culm. d. 9. — Culm. d. 13. Dec. = + 15′ 19″,8

mithin Gang d. Chron. geg. Sternzeit $= \frac{15' \, 19'',8}{4}$ = + 3′ 49″,95
— 3′ 55″,91

Gang d. Chron. geg. mittl. Zeit in einem Sterntage = — 0′ 5″,96
Acceleration für 5″,96 = 0″,02

Gang des Chron. geg. mittl. Zeit in 24 mittl. Stunden = — 5″,98.
Anzahl der Gänge = ... 6) — 31″,86.

Mittl. Gang des Chronometers geg. mittl. Zeit = — 5″,31.

N.-Alm. ✱AR. d. 13. Dec. = 4^h 27′ 29″,38
✱Zeit im mittl. Mittage den 13. Dec. = 17^h 29′ 3″,08

Seit dem mittl. Mittage verflossene ✱Zeit = 10^h 58′ 26″,30
Retard. für 10^h = 1′ 38″,30
» 58′ = 9″,50 = — 1′ 47″,87
» 26″ = 0″,07

Mittlere Zeit der ob. Culm. d. ✱ = 10^h 56′ 38″,43
Chronom. zeigte den 13. Dec. = 9^h 46′ 28″,30

Chronom.-Corr. zur Zeit der Culm. = + 1^h 10′ 10″,13
OL. in Zeit . = — 1^h 24′ 34″,70
— 0^h 14′ 24″,57

Corr. f. Zeit v. d. mittl. Greenw. Mittage d. 14. Dec. = — 3″,20

Chron.-Corr. geg. mittl. Greenw. Zeit d. 14. Dec. = — 0^h 14′ 27″,77.

Naut.-Alm. ✱Zeit den 13. Dec. . . = 17^h 29′ 16″,98
Accel. für 1^h = 9″,86
» » 24′ = 3″,94 = — 13″,90
» » 35″ = 0″,10

✱Zeit im mittl. Mittage in Memel = 17^h 29′ 3″,08.
Mittl. Zeit der Culm. d. ✱ = 10^h 56′ 38″
OL. in Zeit = — 1^h 24′ 35″
mittl. Greenw. Zeit = 9^h 32′ Ab. d. 13. Dec.,
oder 14^h 28′ v. d. mittl. Greenw. Mittage d. 14. Dec.

$24^h : 14^h,5 = -5'',3 : x$, giebt $x = -3'',20$.

Beispiel 9. Es sind am 6. und 11. Februar nachstehende gleiche Höhen des Sterns Arcturus über dem künstlichen Horizonte mit den entsprechenden Zeiten eines Chronometers beobachtet; man soll danach den Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit finden.

Therm. d. 6. Febr. — 2°,4 R.; Barom. d. 6. Febr. = 28″ 7‴,55 Franz.
» » 11. » + 10°,4 » » » 11. » = 27″ 5‴,81 »

Chron. zeigte d. 6.	3ʰ 51′ 36″	✱ 47° 20′;	Chron. d. 11. Febr. = 3ʰ 31′ 29″
	52 46	40	= 32 40
	53 58	48 0	= 33 52
	55 9	20	= 30 3
	56 21	40	= 36 14
	57 32	49 0	= 37 26
Mittel =	3ʰ 54′ 33″.7	²)48° 10′	Mittel = 3ʰ 34′ 27″.3
		24° 5′	k = — 1″,5
			3ʰ 34′ 25″,8.

N. Taf. mittl. Refract. für 24° 5′	= 2′ 8″.5		2′ 8″.5
» Ber. für Barom.	= + 3″.6	Ber. für Barom.	= — 1″,2
» » » Therm.	= + 6″,0	» » Therm.	= — 1″,7
den 6. Febr. Refract.	= 2′ 18″,1.	d. 11. Febr. Refr.	= 2′ 5″.6.

Refr. d. 11. Febr. — Refr. d. 6. Febr. = — 12″.5 log = 1,09691 *n*
Verflossene Zeit oder dT = 5′ 56″.5 = 356″.5 log = 2,55206
3,64897 *n*
Höhendifferenz = 0° 50′ = 3000″ log = 3,47712
log der Ber. für Refr. . . = 0,17185 *n*
Ber. für Refr. = k = — 1″,49, anzuwenden auf das Mittel der Zeiten am 11. Februar.

Mittel der Zeiten den 6. Febr. . . .	= 3ʰ 54′ 33″,7
Mittel der Zeiten den 11. Febr. + k	= 3ʰ 34′ 25″.8
Verflossene Sterntage	= 5) 20′ 7″,9
Gang des Chron. geg. Sternzeit . .	= + 4′ 1″.58
	— 3′ 55″,91
Gang des Chron. in einem Sterntage geg. mittl. Zeit	= + 0′ 5″,67
Acceleration für 5″,67	= 0″,02
Gang des Chron. geg. mittl. Zeit in 24 mittl. Stunden	= + 0′ 5″,69.

Beispiel 10. 1852 in Memel (in 1ʰ 24′ 34″,67 OL. in Zeit von Greenwich) ist der Gang des Chronometers Tiede No. 77. wie folgt gefunden:

1. Durch gleiche Höhen der Sonne, nämlich 10 Vormittags- und 10 Nachmittagshöhen an jedem Tage,

d. 21. März	wahr.	Mittags,	Chron.-Corr.	+ 1ʰ 33′ 56″,58	g. mittl. Memeler Zt.,
d. 24.	»	»	»	+ 1 33 54 ,07	» » » »
vom 24. a. d. 25.	»	Mittern.,	»	+ 1 33 55 ,63	» » » »
d. 25. März	»	Mittags,	»	+ 1 33 55 .37	» » » »
d. 29.	»	»	»	+ 1 33 54 .78	» » » »

2. An der westlichen Seite des Meridians sind nachstehende gleiche Höhen des Sterns Aldebaran beobachtet; es soll der mittlere und wahr-

scheinliche Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit, und der Stand desselben gegen mittlere Greenwicher Zeit zur Zeit des mittleren Mittags den 29. März gefunden werden.

d. 20. März.		d. 24. März.	d. 30. März.
6^h 41′ 42″	✱ 65° 0′	6^h 26′ 0″	6^h 2′ 24″
42 56	64 40	27 14	3 38
44 12	20	28 28	4 55
45 26	0	29 45	6 9
46 42	63 40	31 0	7 23,5
47 58	20	32 15	8 39
49 12	0	33 30	9 54
50 26	62 40	34 46	11 8
51 43	20	35 58,5	12 23
52 54	0	37 12	13 35

d. $\frac{20}{3}$ 6^h 47′ 19″,1 d. $\frac{24}{3}$ 6^h 31′ 36″,85 d. $\frac{30}{3}$ 6^h 8′ 0″,85
d. $\frac{24}{3}$ 6^h 31′ 36″,85 d. $\frac{20}{3}$ 6^h 47′ 19″,1

Verfl.n.d.Ch. = 3T. 23^h 44′ 17″,75 Verfl.Zt.n.d.Ch. = 9T. 23^h 20′ 41″,75
4 Sterntage = 3T. 23^h 44′ 16″,36 m. Zt. 10 Sternt. = 9T. 23^h 20′ 40″,91 m. Zt.
Gang d. Chr. in 4 ✱T. = — 1″,39 g. m. Zt. Gg. d. Chr. in 10 ✱T. = — 0″,84 g. m. Z.

Den 24. März Chronometer im Mittel . . = 6^h 31′ 36″,85
» 30. » » » » . . = 6^h 8′ 0″,85
Verfloss. Zeit nach dem Chron. = 5 Tage 23^h 36′ 24″,00
6 Sterntage = 6 · 23^h 56′ 4″,09 . = 5 Tage 23^h 36′ 24″,54
Gang des Chron. in 6 Sterntagen = + 0″,54 geg. mittl. Zeit.

Es ist also:

Gang des Chronometers in 4 Sterntagen = — 1″,39 geg. m. Zt.
» » » » 10 » = — 0″,84 » » »
» » » » 6 » = + 0″,54 » » »
20) — 1″,69

Wahrscheinl. tägl. Gang des Chron. in einem Sterntage = — 0″,085 geg. m. Zt.
Acceleration für 0″,085 = 0″,000
Wahrscheinl. tägl. Gang des Chron. gegen mittl. Zeit = — 0″,085.

Zw. d. $\frac{21}{3}$ und $\frac{24}{3}$ sind 3 Tage; Corr. d. spät. — d. d. früh. Tages = — 2″,51
» » $\frac{21}{3}$ » $\frac{24-25}{3}$ » 3,5 » » » » — » » » = — 0″,95
» » $\frac{21}{3}$ » $\frac{25}{3}$ » 4 » » » » — » » » = — 1″,21
» » $\frac{21}{3}$ » $\frac{29}{3}$ » 8 » » » » — » » » = — 1″,80
» » $\frac{24}{3}$ » $\frac{24-25}{3}$ » 0,5 » » » » — » » » = + 1″,56
» » $\frac{24}{3}$ » $\frac{25}{3}$ » 1 » » » » — » » » = + 1″,30
» » $\frac{24}{3}$ » $\frac{29}{3}$ » 5 » » » » — » » » = + 0″,71
» » $\frac{24-25}{3}$ » $\frac{25}{3}$ » 0,5 » » » » — » » » = — 0″,26
» » $\frac{24-25}{3}$ » $\frac{29}{3}$ » 4,5 » » » » — » » » = — 0″,85
» » $\frac{25}{3}$ » $\frac{29}{3}$ » 4 » » » » — » » » = — 0″,59
34 Tage — 4″,60.

Wahrscheinl. tägl. Gang geg. mittl. Zt. = $\frac{-4'',6}{34}$ = — 0″,135.
Oben gefunden » » » » » » = — 0″,085
Mittel aus den wahrscheinlichen Gängen = — 0″,11 g. m. Z.
Der wahrscheinl. tägl. Gang aus beiden Beobacht. = — 0″,11 geg. mittl. Zt.

Stand d. Chron. d. 29. März wahr. Mitt. in Memel = + $1^h\ 33'\ 54'',78$ g. m. Z.
Memel liegt östlich von Greenwich = — $1^h\ 24'\ 34'',67$
den 29. März Stand des Chron. geg. mittl. Greenw. Zeit zur Zeit des wahren Mittags in Memel . . = + $0^h\ 9'\ 20''.11$
OL. in Zeit = — $1^h\ 24'\ 35''$ — Zeitgleich. $(4'\ 39'')$ = $1^h\ 20'$, dafür Gang des Chronometers . . = + $0'',01$
d. 29. März mittl. Mittags in Greenw. Stand des Chronometers gegen mittl. Zeit = + $0^h\ 9'\ 20'',12$.

§. 150.

Den Stand und Gang eines Chronometers gegen mittlere Greenwicher Zeit durch Zeitbestimmungen zu finden, die an zwei verschiedenen Orten gemacht sind, deren Länge man genau kennt.

Hat man an zwei verschiedenen Orten, deren Längen genau bekannt sind, Gelegenheit, genaue Zeitbestimmungen nach einem Chronometer zu machen, so kann der Gang und Stand desselben gefunden werden auf folgende Weise.

Man bestimme an zwei verschiedenen Orten, in Zwischenzeiten von 3 bis 14 Tagen oder länger, nach der in §. 142., 143. und 144. gegebenen Vorschrift, so genau wie möglich den Stand oder die Correction des Chronometers gegen mittlere Zeit des betreffenden Ortes. Zu jeder dieser Chronometer-Correctionen (wenn das Chronometer zurück gegen die Zeit des Ortes ist mit +, und wenn dasselbe zuviel zeigt mit — bezeichnet) addire man algebraisch die Länge des Ortes in Zeit (östlich mit — und westlich mit + bezeichnet), an welchem die Correction gefunden ist, so erhält man zwei Correctionen des Chronometers gegen mittlere Greenwicher Zeit, und wenn man noch zu der mittleren Zeit der Zeitbestimmungen eines jeden Ortes, dessen Länge in Zeit (OL. mit —, und WL. mit + bezeichnet) algebraisch addirt, so findet man die den Beobachtungen der Zeitbestimmungen entsprechenden mittleren Zeiten in Greenwich.

Die früher gefundene Chronometer-Correction von der später gefundenen algebraisch subtrahirt und dieses durch den Unterschied der beiden gedachten mittleren Greenwicher Zeiten in Tagen und Decimaltheilen derselben auf 3 Stellen genau ausgedrückt, dividirt, giebt den täglichen Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit.

Um den zuletzt gefundenen Stand des Chronometers auf die Zeit des nächstfolgenden mittleren Greenwicher Mittags zu reduciren, subtrahire man die mittlere Greenwicher Zeit, für welche die letzte Correction gefunden ist, von der Zeit des nächstfolgenden mittleren Greenwicher Mittags und schliesse dann: 24^h verhalten sich zu der gefundenen Differenz zwischen der mittleren Greenwicher Zeit und der Zeit des nächstfolgenden mittleren Greenwicher Mittags, wie der tägliche Gang des Chronometers zu x. Diese Grösse x zu der letzten, gegen mittlere Greenwicher Zeit gefundenen Chronometer-Correction algebraisch addirt, giebt die Chronometer-Correction für den gedachten nächstfolgenden mittleren Mittag zu Greenwich.

Anmerkung. Man kann nach dieser Methode auch auf See, wenn man sich in der Nähe eines in der Karte verzeichneten Gegenstandes befindet, dessen Länge und Breite genau bekannt ist, und man den Ort des Schiffes durch genaue terrestrische Beobachtungen bestimmt hat, den Gang und Stand des Chronometers ermitteln oder prüfen, wenn sich eine günstige Gelegenheit zur Zeitbestimmung durch über dem Seehorizonte gemessene Höhen darbietet. Da aber diese Höhen nicht so zuverlässig sind als die über dem künstlichen Horizonte gemessenen, so folgt daraus, dass dieselben auch kein so zuverlässiges Resultat gewähren, und man kann daher auch nur grössere Abweichungen im Gange des Chronometers dadurch ermitteln, oder vielmehr prüfen, ob der früher bestimmte Gang sich auf See bedeutend verändert hat.

Beispiel 11. 1852, den 13. April zu Memel in 21° 8′ 40″ OL. von Greenwich, ist um $8^h\,0'\,15'',6$ mittlere Zeit Morgens die Correction eines Chronometers $+\,2^h\,0'\,4'',8$ gegen mittlere Zeit des Ortes gefunden; den 28. April 1852 zu Dundee in 2° 57′ 30″ WL. von Greenwich ist ferner um $5^h\,10'\,5'',5$ mittlere Zeit Abends die Correction desselben Chronometers $+\,0^h\,24'\,20'',6$ gegen mittlere Zeit des Ortes ermittelt; wie war der tägliche Gang gegen mittlere Zeit und die Correction des Chronometers am nächstfolgenden mittleren Mittage zu Greenwich?

d. 13. April $8^h\,0'\,15'',6$ Mgs. ist = d. 12ten um		$20^h\;0'\,15'',6$ Abds.
OL. in Zeit .	=	$-\;1^h\,24'\,34'',7$
Mittl. Greenw. Zt. der 1sten Beob. d. 12ten	=	$18^h\,35'\,40'',9$
d. 28. April mittl. Zt. der Beob. in Dundee	=	$5^h\,10'\;5'',5$ Abds.
WL. in Zeit	=	$+\;0^h\,11'\,50'',0$
Mittl. Greenw. Zt. der 2ten Beob. d. 28sten	=	$5^h\,21'\,55'',5$
» » » der 1sten » d. 12ten	=	$18^h\,35'\,40'',9$
Verfl. Zeit zwischen den Beobachtungen	=	15 Tage $10^h\,46'\,14'',6$
	=	15.449 Tage.
d. 12. April Corr. d. Chr. g. Memeler mtl. Zt.	=	$+\;2^h\;0'\;4'',8$
OL. in Zeit	=	$-\;1^h\,24'\,34'',7$
1ste Corr. d. Chron. g. mittl. Greenw. Zeit	=	$+\;0^h\,35'\,30'',1$
d. 28. April Corr. d. Chr. g. Dundee mittl. Zt.	=	$+\;0^h\,24'\,20'',6$
WL. in Zeit	=	$+\;0^h\,11'\,50'',0$
2te Corr. d. Chron. geg. mittl. Greenw. Zt.	=	$+\;0^h\,36'\,10'',6$

1ste Correction des Chron. $= +\,0^h\,35'\,30'',1$ gegen mittl. Greenw. Zeit,
2te » » » $= +\,0^h\,36'\,10'',6$ » » » »
2te Corr. — der 1sten Corr. $= +\,0^h\;0'\,40'',5$; der tägliche Gang ist mithin $= \frac{+\,40'',5}{15{,}449} = +\,2'',62$ gegen mittl. Zeit.

Mittl. Greenw. Zeit der letzten Beob. den 28sten	=	$5^h\,21'\,55'',5$ Abends.
		24^h
Zt. d. letzten Beob. v. d. mittl. Grw. Mt. d. 29sten	=	$18^h\,38'\;4'',5 = 18^h,6.$

Es ist dah. Corr. f. Zt. vor d. Mtg. $= \frac{18^h,6 \cdot 2'',62}{24} = \quad +\,2'',0$

Chr. Corr. d. 28sten um $5^h\,21'\,55'',5$ m. Zt. in Grw. $= +\,0^h\,36'\,10'',6$
Chr. Corr. d. 29sten mittl. Mittags zu Greenwich $= +\,0^h\,36'\,12'',6$ geg. m. Greenw. Zeit.

§. 151.

Die Correction eines Chronometers für jede gegebene mittlere Greenwicher Zeit zu finden, wenn die Correction desselben für den mittleren Mittag zu Greenwich gegen mittlere Greenwicher Zeit an einem bestimmten Tage bekannt ist, und man ausserdem den täglichen Gang des Chronometers gegen mittlere Zeit kennt.

Regel. Man drücke die gegebene mittlere Greenwicher Zeit*) astronomisch aus und subtrahire davon das Datum des Tages, für welchen die Correction des Chronometers bekannt ist, multiplicire diesen Unterschied in Tagen (auf 2 Decimalstellen genau ausgedrückt) mit dem täglichen Gange des Chronometers, und das Product addire man algebraisch zu der für den gegebenen Tag bekannten Chronometer-Correction, so ist die Summe die gesuchte Correction.

Beispiel 12. Der Stand eines Chronometers war am 23. Mai mittleren Mittags zu Greenwich $+ 0^h\ 10'\ 5'',5$ gegen mittlere Greenwicher Zeit, der tägliche Gang desselben ist $- 1'',05$ gegen mittlere Zeit; es soll die Chronometer-Correction für den 25. Juni um $4^h\ 10'$ mittlere Greenwicher Zeit des Morgens gefunden werden.

Den 25sten um $4^h\ 10'$ Morgens ist auch den 24sten um $16^h\ 10'$ astronomisch; es sind also bis zu dieser Zeit seit dem 23. Mai 32 Tage $16^h\ 10'$ verflossen = 32,67 Tage, und $32{,}67 \cdot - 1'',05$ ist = $- 0'\ 34'',3$
Chronometer-Correction den 23. Mai = $+ 0^h\ 10'\ 5'',5$
Cor. d. Chr. d. 25. Juni um $4^h\ 10'$ m. Grw. Zt. Mrg. = $+ 0^h\ 9'\ 31'',2$ geg. mittl. Greenw. Zeit.

§. 152.

Von der Chronometer-Corrections-Tafel.

Wenn der Stand eines Chronometers für den mittleren Mittag eines bestimmten Datums zu Greenwich und der tägliche Gang desselben gegen mittlere Zeit gefunden ist, so fertigt man für die ungefähre Dauer der zu machenden Reise gewöhnlich eine sogenannte Chronometer-Corrections-Tafel an, welche die Correction des Chronometers für jeden mittleren Mittag zu Greenwich gegen mittlere Greenwicher Zeit enthält, um daraus mit Leichtigkeit die Correction für jeden mittleren Mittag zu Greenwich entnehmen zu können.

Die Chronometer-Correction wird immer für den nächstfolgenden Tag gefunden, wenn zu der Correction des Tages der tägliche Gang (voreilend mit — und retardirend mit +bezeichnet) algebraisch addirt wird.

Beispiel 13. Der Stand eines Chronometers ist am 23. Mai mittleren Mittags zu Greenwich $+ 0^h\ 7'\ 21'',4$ gegen mittlere Greenwicher Zeit und der tägliche Gang desselben ist $+ 5'',5$ gegen mittlere Zeit; man soll eine Chronometer-Corrections-Tafel anfertigen.

*) Ist nicht die mittlere Greenwicher Zeit, sondern nur die Zeit bekannt, die das Chronometer in einem Augenblicke zeigte, für welchen die Chronometer-Correction gesucht wird, so findet man die mittlere Greenwicher Zeit ungefähr, wenn man das Datum, für welches man die Chronometer-Correction kennt, von dem gegebenen Datum abzieht, den täglichen Gang des Chronometers mit diesem Reste multiplicirt und das Product algebraisch zu der gegebenen Chronometer-Correction addirt, diese Summe aber algebraisch zur Zeit, die das Chronometer zeigte, addirt.

Chronometer-Corrections-Tafel für Greenwich.
(Gang $+\ 5'',5$)

Datum.	Chronometer-Correction.	Datum.	Chronometer-Correction.	Datum.	Chronometer-Correction.
1853.					
Mai 23	$+\ 0^h\ 7'\ 21'',4$	Mai 28	$+\ 0^h\ 7'\ 48'',9$	Juni 2	$+\ 0^h\ 8'\ 16'',4$
24	$0^h\ 7'\ 26'',9$	29	$0^h\ 7'\ 54'',4$	3	$0^h\ 8'\ 21'',9$
25	$0^h\ 7'\ 32'',4$	30	$0^h\ 7'\ 59'',9$	4	$0^h\ 8'\ 27'',4$
26	$0^h\ 7'\ 37'',9$	31	$0^h\ 8'\ 5'',4$	5	$0^h\ 8'\ 32'',9$
27	$0^h\ 7'\ 43'',4$	Juni 1	$0^h\ 8'\ 10'',9$	6	$0^h\ 8'\ 38'',4$

Beispiel 14. Der Stand eines Chronometers war am 24. September $-\ 2'\ 40'',3$ gegen mittlere Greenwicher Zeit zur Zeit des mittleren Greenwicher Mittags und das Chronometer verliert täglich $15'',5$ gegen mittlere Zeit; man soll eine Chronometer-Corrections-Tafel anfertigen.

Chronometer-Corrections-Tafel für Greenwich.
(Gang $+\ 15'',5$ gegen mittlere Zeit.)

Datum.	Chronometer-Correction.	Datum.	Chronometer-Correction.
1853.			
Septbr. 24	$-\ 0^h\ 2'\ 40'',3$	Octbr. 2	$-\ 0^h\ 0'\ 36'',3$
25	$2'\ 24'',8$	3	$0'\ 20'',8$
26	$2'\ 9'',3$	4	$0'\ 5'',3$
27	$1'\ 53'',8$	5	$+\ 0^h\ 0'\ 10'',2$
28	$1'\ 38'',3$	6	$0'\ 25'',7$
29	$1'\ 22'',8$	7	$0'\ 41'',2$
30	$1'\ 7'',3$	8	$0'\ 56'',7$
Octbr. 1	$0'\ 51'',8$	9	$1'\ 12'',2$

Ist der tägliche Gang eines Chronometers gross, so kann man sich noch eine Interpolations-Tafel machen, worin für jede Stunde bis 24 der Gang angegeben ist, und man kann dieselbe auch zur Interpolation für Zehntheile und Hunderttheile von Stunden brauchen, wenn man sich das Komma eine oder zwei Stellen nach der Linken verrückt denkt. Zu dem vorstehenden Beispiel würde diese Interpolations-Tafel wie folgt zu entwerfen sein.

Interpolations-Tafel.
(Täglicher Gang + 15″,5.)

Stunden.	Gang.	Stunden.	Gang.	Stunden.	Gang.
1	+ 0″,65	9	+ 5″,81	17	+ 10″,98
2	1 ,29	10	6 ,46	18	11 ,62
3	1 ,94	11	7 ,10	19	12 ,27
4	2 ,58	12	7 ,75	20	12 ,92
5	3 ,23	13	8 ,40	21	13 ,56
6	3 ,87	14	9 ,04	22	14 ,21
7	4 ,52	15	9 ,69	23	14 ,85
8	5 ,17	16	10 ,34	24	15 ,50

Um mit Hülfe dieser beiden Tafeln die Chronometer-Correction für eine gegebene mittlere Greenwicher Zeit zu finden, nimmt man die Correction für den nächstverflossenen Mittag aus der Chronometer-Corrections-Tafel, und aus der Interpolations-Tafel den Gang für die gegebenen Stunden und Decimaltheile von Stunden nach astronomischer Zeit, so ist die algebraische Summe beider Grössen die gesuchte Correction.

Wenn z. B. 1853 am 29. September um $9^h\ 25'$ Abends mittlere Schiffszeit auf 15° WL. von Greenwich die Chronometer-Correction gefunden werden soll, so findet man dieselbe wie folgt:

Mittlere Schiffszeit den 29. September = $9^h\ 25'$ Abends.
WL. in Zeit = $1^h\ 0'$
Ungef. mittl. Greenwicher Zeit d. 29sten = $10^h\ 25' = 10^h.4$ Abends.
Chronometer-Corr. d. 29sten mittl. Greenw. Mitt. = — 1′ 22″.8
N. d. Interpolations-Tafel ist der Gang für 10^h = + 6″.5
» » » » » » » » 0.4 = + 0″.3
Gesuchte Correction des Chronometers = — 1′ 16″.0 gegen mittlere Greenwicher Zeit.

§. 153.

Hat man mehre Chronometer, so bezeichnet man dieselben gewöhnlich mit den Buchstaben *A*, *B*, *C* u. s. w., indem man den besten „*A*" nennt, untersucht nur den Gang von *A* durch astronomische Beobachtungen und ermittelt durch Vergleichung mit diesem auch die Correction und Gänge der übrigen.

Bei der Vergleichung verfährt man wie folgt:

Wenn *A* etwa 50″ zeigt, fängt man an Secunden zu zählen, indem man nach den halben Secundenschlägen desselben hört, aber auf *B* sieht, und bemerkt auf Secunden, halbe oder Zehntheile von Secunden genau, je nachdem man hierin geübt ist, was *B* zeigte als die Minute von *A* voll war. Man schreibt dann zuerst die Zeit auf, welche *A* zeigte, und darunter die Zeit, welche *B* gleichzeitig angab.

Ist man mit der Vergleichung von *A* und *B* fertig, so vergleicht man auf ähnliche Art auch *A* und *C*, und zuletzt kann man zur Controlle auch *B* und *C* vergleichen.

Anmerkung. Es ist sehr zu empfehlen, dass sich jeder im Vergleichen zweier Uhren übt; denn Alles was genau gemacht werden soll, ist nicht leicht, wenn es auch ganz einfach zu sein scheint.

Kennt man die Correction von *A* zu der Zeit, als die Vergleichung mit *B* und *C* gemacht wurde, so findet man die Correctionen von *B* und *C*, wenn man von den Zeiten, welche *A* bei den Vergleichungen zeigte, die Zeiten, welche *B* und *C* zeigten, abzieht und zu jeder dieser Differenzen die Correction von *A* algebraisch addirt.

Um sich von der Richtigkeit der Vergleichungen zu überzeugen, ziehe man auch die Zeit, welche *C* bei der Vergleichung mit *B* zeigte, von der Zeit, die *B* gleichzeitig angab, ab, und addire zu dieser Differenz die schon gefundene Correction von *B* algebraisch, so muss diese Summe mit der schon gefundenen Correction von *C* übereinstimmend sein, wenn anders die Vergleichungen und Rechnungen richtig gemacht sind.

Beispiel 15. August den 10ten, 11ten und 15ten sind zur Zeit der wahren Mittage nachstehende Correctionen von Chronometer *A* gegen mittlere Zeit durch gleiche Höhen der Sonne gefunden, und die nachfolgenden Vergleichungen desselben mit *B* und *C* des Mittags gemacht; man soll die täglichen Gänge der Chronometer und die Correctionen von *B* und *C* zu denselben Zeiten, als die Vergleichungen mit *A* gemacht sind, finden.

Datum.	Correction von A gegen mittlere Zeit.	Tägl. Gang von A.	Vergleichung von A und B.	Correction von B gegen mittlere Zeit.	Tägl. Gang von B.	Vergleichung von A und C.	Correction von C gegen mittlere Zeit.	Tägl. Gang von C.	Vergleichung von B und C.	Correction von C.
10	$+ 0^h\, 15'\, 0'',8$		$A = 11^h\, 57'\, 0''$ $B = 12^h\, 5'\, 6'',4$ $-\, 8'\, 6'',4$ Corr. $A = +\, 15'\, 0'',8$ $+\, 6'\, 54'',4$	$+ 6'\, 54'',4$		$A = 11^h\, 58'\, 0''$ $C = 11^h\, 16'\, 25'',5$ $+\, 41'\, 34'',5$ Corr. $A = +\, 15'\, 0'',8$ $+\, 56'\, 35'',3$	$+ 56'\, 35'',3$		$B = 12^h\, 8'\, 0''$ $C = 11^h\, 18'\, 19'',1$ $+\, 49'\, 40'',9$ Corr. $B = +\, 6'\, 54'',4$ $+\, 56'\, 35'',3$	$+ 56'\, 35'',3$
11	$+ 0^h\, 15'\, 4'',7$	$+ 3'',9$	$A = 11^h\, 57'\, 0''$ $B = 12^h\, 5'\, 3'',5$ $-\, 8'\, 3'',5$ Corr. $A = +\, 15'\, 4'',7$ $+\, 7'\, 1'',2$	$+ 7'\, 1'',2$	$+ 6'',8$	$A = 11^h\, 58'\, 0''$ $C = 11^h\, 16'\, 30'',7$ $+\, 41'\, 29'',3$ Corr. $A = +\, 15'\, 4'',7$ $+\, 56'\, 34'',0$	$+ 56'\, 34'',0$	$- 1'',3$	$B = 12^h\, 8'\, 0''$ $C = 11^h\, 18'\, 27'',3$ $+\, 49'\, 32'',7$ Corr. $B = +\, 7'\, 1'',2$ $+\, 56'\, 33'',9$	$+ 56'\, 33'',9$
15	$+ 0^h\, 15'\, 20'',6$ 4) $15'',9$ $4'',0$	$+ 4'',0$	$A = 11^h\, 57'\, 0''$ $B = 12^h\, 4'\, 51'',5$ $-\, 7'\, 51'',7$ Corr. $A = +\, 15'\, 20'',6$ $+\, 7'\, 29'',1$	$+ 7'\, 29'',1$ 4) $27'',9$ $7'',0$	$+ 7'',0$	$A = 11^h\, 58'\, 0''$ $C = 11^h\, 16'\, 50'',6$ $+\, 41'\, 9'',4$ Corr. $A = +\, 15'\, 20'',6$ $+\, 56'\, 30'',0$	$+ 56'\, 30'',0$ 4) $4'',0$ $1'',0$	$- 1'',0$	$B = 12^h\, 8'\, 0''$ $C = 11^h\, 18'\, 59'',6$ $+\, 49'\, 0'',4$ Corr. $B = +\, 7'\, 29'',1$ $+\, 56'\, 29'',5$	$+ 56'\, 29'',5$

§. 154.

Die Zuverlässigkeit zweier oder mehrer Chronometer gegen einander zu ermitteln und demnach aus den mittleren Greenwicher Zeiten, welche dieselben vielleicht um etwas verschieden angeben, die wahrscheinliche mittlere Greenwicher Zeit zu finden.

Hat man zwei oder mehrere Chronometer an Bord, welche die mittlere Greenwicher Zeit nach ihren Correctionen und Gängen ziemlich übereinstimmend angeben, so spricht die Wahrscheinlichkeit zwar dafür, dass die Chronometer ihren Gang nicht bedeutend verändert haben; aber sicher kann man durch Vergleichung zweier oder mehrerer Chronometer doch nicht ermitteln, ob sie ihren zuletzt ermittelten Gang beibehalten haben oder nicht, und wie der Gang von einem jeden derselben sich verändert hat.

Abweichungen werden indessen zwischen mehreren Chronometern an Bord wohl immer stattfinden, und man muss daher bei Untersuchung derselben am Lande schon die Zuverlässigkeit eines jeden mit Rücksicht auf die andern zu ermitteln suchen.

Es ergiebt sich nämlich, wenn man den Gang der Chronometer öfter untersucht, aus den Differenzen dieser Gänge, in welchem Grade jedes Chronometer einen gleichmässigen Gang hat, und es ist Grund vorhanden, jedem derselben nach diesem Verhältnisse ein Stimmrecht zu geben, und demnach, wenn die mittleren Greenwicher Zeiten, welche sie angeben, mit einander differiren, der Wahrscheinlichkeit nach die richtigere Greenwicher Zeit zu ermitteln. Wie man hierbei verfährt, ist aus nachstehendem Beispiel zu ersehen.

Beispiel. Angenommen die täglichen Gänge der Chronometer *A*, *B* und *C* wären zu gleichen Zeiten wie folgt gefunden:

Gänge von *A*.	Gänge von *B*.	Gänge von *C*.
+ 10″,7	— 6″,2	— 3″,3
+ 10″,9	— 6″,8	— 4″,2
+ 10″,8	— 6″,0	— 3″,9
+ 11″,0	— 6″,9	— 2″,0
+ 10″,9	— 6″,1	— 1″,9
+ 10″,8	— 6″,5	— 4″,0
Mittel = + 10″,85	Mittel = — 6″,42	Mittel = — 3″,22

Man nehme nun den Unterschied zwischen den bez. Gängen und dem Mittel derselben von jedem Chronometer, so ergiebt sich:

für *A*.	für *B*.	für *C*.
0″,15	0″,22	0″,08
0″,05	0″,38	0″,98
0″,05	0″,42	0″,68
0″,15	0″,48	1″,22
0″,05	0″,32	1″,32
0″,05	0″,08	0″,78
Summe = 0″,50	Summe = 1″,90	Summe = 5″,06

Die Summe dieser drei Summen ist $= 7'',46$. und weil man jedes Chronometer in dem Verhältnisse, als die resp. Summe gegen die Summe von allen drei Summen, klein ist, zuverlässig ansehen kann, so findet man die Zuverlässigkeit von $A = \frac{7'',46}{0'',5} = 14,9$; von $B = \frac{7'',46}{1'',9} = 3,9$ und von $C = \frac{7'',46}{5'',06} = 1,5$.

Die Summe dieser drei Zahlen ist $= 20,3$; wenn man daher annimmt, dass alle drei Chronometer mit Rücksicht auf die Zuverlässigkeit der Zeit, die sie zeigen, 20,3 Stimmen hätten, so würden auf A 14,9, auf B 3,9 und auf C 1,5 Stimmen kommen.

Wenn nun t, t' und t'' die mittleren Zeiten bezeichnen, die A, B und C zugleich angeben, und T die richtige Zeit ist, welche alle übereinstimmend angeben sollten, so ist der wahrscheinliche Werth von

$$T = \frac{t \cdot 14,9 + t' \cdot 3,9 + t'' \cdot 1,5}{20,3}.$$

Es ergeben sich also, wenn man 14,9, 3,9 und 1,5 durch 20,3 dividirt, diejenigen Zahlen, womit man die Zeit, welche jedes Chronometer angiebt, multipliciren muss, damit die Summe der dadurch erhaltenen Producte die wahrscheinlich richtige Zeit giebt.

Man findet diese Zahlen auf eine Decimalstelle genau für $A = 0,7$, für $B = 0,2$ und für $C = 0,1$.

Es sei die mittlere Greenwicher Zeit nach den verschiedenen Chronometern in demselben Zeitmomente nach

$$A = 3^h\ 5'\ 10'',4,$$
$$B = 3^h\ 4'\ 30'',6,$$
$$C = 3^h\ 6'\ 40'',5;$$

so findet man der Wahrscheinlichkeit nach die richtige Zeit

$$= 3^h\ 5'\ 10'',4 \cdot 0,7 + 3^h\ 4'\ 30'',6 \cdot 0,2 + 3^h\ 6'\ 40'',5 \cdot 0,1$$
$$= 3^h\ 5'\ 11'',45.$$

Da die Summe aller Multiplicatoren hier $0,7 + 0,2 + 0,1 = 1$ sein muss, wenn dieselben richtig berechnet sind, so ist es leichter, wenn man von jeder der Zeiten nur die Minuten und Secunden, welche jede dieser Zeiten über die kleinste volle Minute ist, mit dem betreffenden Multiplicator multiplicirt, und diese Producte mit den Stunden und Minuten, die von jeder Zeit abgezogen sind, addirt; die Summe ist dann ebenfalls gleich der wahrscheinlichen richtigen Zeit.

In obigem Beispiel könnte man mithin von jeder Zeit $3^h\ 4'$ abziehen und findet dann

$$T = 1'\ 10'',4 \cdot 0,7 + 30'',6 \cdot 0,2 + 2'\ 40'',5 \cdot 0,1 + 3^h\ 4' = 3^h\ 5'\ 11'',45.$$

§. 155.

Mit Hülfe eines Chronometers, dessen Stand gegen mittlere Greenwicher Zeit und dessen täglicher Gang gegen mittlere Zeit bekannt ist, die Länge des Ortes zu bestimmen.

Nach dem Vorangegangenen kann man für jede Zeit, die ein Chronometer zeigt, dessen Stand gegen mittlere Greenwicher Zeit und dessen täglicher Gang gegen mittlere Zeit bekannt ist, die mittlere Greenwicher Zeit finden.

Wenn man nach einer der in den vorhergehenden Paragraphen angeführten Methoden Zeitbestimmungen mit Benutzung des Chronometers

macht, so findet man, wieviel dasselbe zu einer bestimmten mittleren Zeit des Ortes zeigte. Man kann daher für einen und denselben Augenblick die mittlere Zeit in Greenwich und die mittlere Zeit des Ortes der Beobachtung finden. Der Unterschied dieser beiden Zeiten ist gleich der Länge des Beobachtungsortes (§. 26.), welche östlich, wenn die mittlere Zeit an letzterem grösser, und westlich, wenn dieselbe kleiner als die entsprechende mittlere Greenwicher Zeit ist.

Regel
die Länge des Schiffes nach einem Chronometer zu bestimmen.

1. Man beobachte von einem Himmelskörper, der sich zur Zeitbestimmung eignet, so viele Höhen, als man in 3 bis 5 Minuten messen kann und notire die Zeiten entweder nach dem Chronometer, wenn dies thunlich ist, oder nach der Beobachtungsuhr, die vor und nach der Beobachtung mit dem Chronometer verglichen werden muss.

2. Aus den beobachteten Zeiten und aus den beobachteten Höhen nehme man die arithmetischen Mittel, und bestimme aus diesen Mitteln etc. die mittlere Schiffszeit.

3. Die Zeit, welche das Chronometer im Augenblicke des Mittels der Zeiten nach der Beobachtungsuhr zeigte, ergiebt sich, wenn man schliesst: Die Zeit, welche nach der Beobachtungsuhr zwischen beiden Vergleichungen verflossen ist, verhält sich zu der Zeit, die nach dem Chronometer zwischen beiden Vergleichungen verflossen ist, wie die zwischen der ersten Vergleichung und dem Mittel der Zeiten der Beobachtungsuhr verflossene Zeit sich zu x verhält. Die diesemnach gefundene Grösse x wird immer zu der Zeit addirt, die das Chronometer bei der ersten Vergleichung zeigte, und die Summe ist gleich der Zeit, welche das Chronometer im Augenblicke der Zeitbestimmung gezeigt hat.*) Für diese findet man entweder nach dem bekannten Stande und Gange des Chronometers (§. 151.), oder, wenn eine Chronometer-Corrections-Tafel angefertigt ist (§. 152.), nach dieser die entsprechende mittlere Greenwicher Zeit.

4. Der Unterschied zwischen der mittleren Schiffszeit und der mittleren Greenwicher Zeit ist die Länge des Ortes in Zeit ausgedrückt, welche, in Bogen verwandelt (§. 101.), gleich der Länge des Schiffes ist, und östlich oder westlich benannt wird, je nachdem die Schiffszeit grösser oder kleiner als die Greenwicher Zeit ist.

Beispiel 1. 1852 den 21. Februar n. d. B. auf 20° 56′ SBr. und 86° OL. von Greenwich soll aus nachstehenden Beobachtungen die Länge des Schiffsortes bestimmt werden.

*) Diese Proportion wird sich am leichtesten durch Zerlegung des zweiten Gliedes gegen das erste Glied lösen lassen. Wenn z. B. gegeben wäre

$50'\,10'' : 50' = 20'\,7'' : x$, so ist die Rechnung

50′ 10″	1	20′ 7″
— 10″	— 301	— 4″
	giebt x =	20′ 3″.

Ist ferner gegeben $49'\,57'' : 50' = 28'\,45'' : x$, so rechnet man

49′ 57″	1	28′ 45″
3″	999	1″,7
	giebt x =	28′ 46″,7.

	I. C. = — 3′ 34″	
Beob. Uhr 8^h 0′ 57″	☉ 27° 36′ 0″	Augeshöhe 18 Fs. Rheinl.; die Beobachtungsuhr zeigte bei d. Beobachtung 5^h 37′ 37″,2 mehr als das Chron. Das Chron. war am 7. Dec. 1851 zur Zeit d. mittl. Mittags in Grw. 8′ 1″,4 vor der mittl. Grw. Zeit u. accel. tägl. 4″,3 geg. mittl. Zeit.
1 8	39 15	
1 22	43 0	
Beob. Uhr zeigte = 8^h 1′ 9″,0	☉ 27° 39′ 25″	
Beob. Uhr v. Chr. = 5^h 37′ 37″,2	I. C. . . . — 3′ 34″	
Chronom. zeigte = 2^h 23′ 31″,8	27° 35′ 51″	
Chr. C. d. 7. Dec. 51 = — 8′ 1″,4	Kimmt. . . — 4′ 13″	
2^h 15′ 30″,4	27° 31′ 38″	
Vom 7. Dec. 1851 bis 21. Febr. 1852 sind 76 Tage, Gang = — 5′ 26″,8	☉ Halbm. + 16′ 10″	
2^h 10′ 3″,6	27° 47′ 48″	
Gang für 9^h 50′ . . = + 1″,8	Ref. — P. = — 1′ 41″	
Mittl. Greenw. Zeit Morg. d. 21. Febr. = 2^h 10′ 5″,4	h = 27° 46′ 7″	

Ungef. mittl. Greenw. Zeit	=	2^h 10′ M.
oder		9^h 50′ v. d. mittleren Mittag d. 21. Febr.
Täglicher Gang	=	4″,3
		$9{,}8^h$
		[24]) 42,14
Gang des Chronom. für $9{,}8^h$. . .	=	+ 1″,76.

Naut.-Alm. d. 21. Febr. ☉ Decl. . .	=	— 10° 44′ 51″
stündl. Diff. = + 54″,3		
$9{,}8^h$		
532″,1	= +	8′ 52″
☉ Decl.	=	— 10° 53′ 43″ giebt $p = 79°\ 6'\ 17''$.

Den 21. Febr. Zeitgleichung . . .	= +	13′ 58″,04 a. wahre Zeit.
stündl. Diff. = 0″,3		
$9{,}8^h$		
+ 2″,94		+ 2″,94
Zeitgleichung	= +	14′ 0″,98 a. wahre Zeit.

Der Stundenwinkel t kann jetzt nach Formel (III.) §. 135. berechnet werden.

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin (S - h)}{\cos \varphi \cdot \sin p}}$$

$h =$	27° 46′ 7″		
$p =$	79° 6′ 17″	log cosec =	0,007899
$\varphi =$	20° 56′	log sec =	0,029655
	127° 48′ 24″		
$S =$	63° 54′ 12″	log cos =	9,643341
$S - h =$	36° 8′ 5″	log sin =	9,770620
			[2]) 19,451515
$\tfrac{1}{2} t =$	2^h 8′ 30″,7	log sin =	9,725758

$\frac{1}{2}t =$	$2^h\ 8'\ 30'',7$	
$t =$	$4^h\ 17'\ 1'',4$	östlich vom Meridian.
	$7^h\ 42'\ 58'',6$	wahre Schiffszeit Morgens den 21. Febr.
	$+\ 14'\ 1'',0$	Zeitgleichung auf wahre Zeit,
	$7^h\ 56'\ 59'',6$	mittlere Schiffszeit Morgens d. 21. Febr.
	$2^h\ 10'\ 5'',4$	mittlere Greenw. Zeit Morg. d. 21. Febr.
	$5^h\ 46'\ 54'',2$	OL. in Zeit,
Länge $=$	$86°\ 43',6$	Ost von Greenwich.

Beispiel 2. 1852 den 27. Juni Morgens n. d. B. auf 19° 3′ NBr. und 78° WL. von Greenwich sind bei 20′ Rheinl. Augeshöhe nachstehende Beobachtungen gemacht, aus denen die Länge des Schiffsortes bestimmt werden soll.

Zur Zeit der Beobachtung zeigte:

Beobachtungsuhr $5^h\ 3'\ 24'',5$ hinter Chronometer *H.*
» $5^h\ 43'\ 24'',5$ » » *T.*

Stand des Chron. *H.* den 27. Juni $= +\ 0^h\ 0'\ 46'',0$ g. m. Grw. Zt.
» » » *T.* den 27. Juni $= -\ 0^h\ 38'\ 34'',0$ » » » »
Mittl. tägl. Gang des Chronom. *H.* $= +\ 4'',5$
» » » » » *T.* $= +\ 7'',5$.

		I. C. $=$	$-\ 6'\ 36''$
Beob. U.	$7^h\ 44'\ 10''$	⊙	$29°\ 2'\ 15''$
	$44\ 23$		$5\ 15$
	$44\ 38$		$8\ 15$
	$44\ 57$		$12\ 30$
Beob. U. zeigte $=$	$7^h\ 44'\ 32''$	⊙	$29°\ 7'\ 4''$
Beob. U. hinter Chr. *H.* $=$	$5^h\ 3'\ 24'',5$	I. C. . .	$-\ 6'\ 36''$
Chr. *H.* zeigte $=$	$12^h\ 47'\ 56'',5$		$29°\ 0'\ 28''$
Stand d. Chr. *H.* 27. Juni $=$	$+\ 0'\ 46'',0$	Kimmt.	$-\ 4'\ 27''$
	$12^h\ 48'\ 42'',5$		$28°\ 56'\ 1''$
Corr. f. Gang d. Chr. *H.* $=$	$+\ 0'',2$	⊙ Halbm.	$+\ 15'\ 44''$
mttl. Grw. Z. n. Chr. *H.* $=$	$12^h\ 48'\ 42'',7$		$29°\ 11'\ 45''$
	Morg. d. 27. Juni.	Ref.—P.	$-\ 1'\ 36''$ { Rf. $= 1'\ 43''$, P. $= 7''$ }
		$h =$	$29°\ 10'\ 9''$.

Beob. U. zeigte $=$	$7^h\ 44'\ 32''$	Tägl. Gang v. Chr. *H.* $=$	$+\ 4'',5$
Beob. U. hinter Chr. *T.* $=$	$5^h\ 43'\ 24'',5$	und mittl. Grw. Zt. $=$	$0,8^h$
Chr. *T.* zeigte $=$	$13^h\ 27'\ 56'',5$		[24]) $3'',60$
Stand d. Chr. *T.* 27. Juni $=$	$-\ 38'\ 34'',0$	Corr. für Gang . . . $=$	$+\ 0'',15$.
	$12^h\ 49'\ 22'',5$		
Corr. f. Gang d. Chr. *T.* $=$	$+\ 0'',3$	Tägl. Gang v. Chr. *T.* $=$	$+\ 7'',5$
mttl. Grw. Z. n. Chr. *T.*	$12^h\ 49'\ 22'',8$	und mittl. Grw. Zt. $=$	$0,8^h$
	Morg. d. 27. Juni.		[24]) $6'',00$
		Corr. für Gang . . . $=$	$+\ 0'',25$.

Mittl. Greenw. Zt. $= 0^h\ 49'$ Ab. d. 27. Juni.
N. J. d. 27. Juni ⊙ Decl. $= +\ 23°\ 19'\ 36''$
stündl. Diff. $= -\ 6'',9$
$0,8^h$
$-\ 5'',52$ $-\ 6''$
⊙ Decl. $\delta = +\ 23°\ 19'\ 30''$.

Zeitgl. den 27. Juni . . .	$= + 2' \, 43'',6$	auf w. Zt.
stündl. Diff. $= + 0'',51$		
$0{,}8^h$		
$0'',408$. .	$+ \quad 0'',4$	
Zeitgl.	$= + 2' \, 44'',0$	auf w. Zt.

Nach Gleichung (IV.) §. 135. ist die Rechnung zur Bestimmung des Stundenwinkels t wie folgt zu führen:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

$\varphi =$	$+ 19^\circ \; 3'$	log sec	$= 0{,}02446$
$\delta =$	$+ 23^\circ \; 19' \; 30''$	log sec	$= 0{,}03703$
$\varphi - \delta =$	$- \; 4^\circ \; 16' \; 30''$	$n \cos = 99722$	
$h =$	$29^\circ \; 10' \; 9''$	$n \sin = 48739$	
		50983 log	$= 4{,}70743$
$t =$	$4^h \; 22' \; 31'',4$	$\log (2 \sin^2 \frac{1}{2} t)$	$= 4{,}76892$

wahre Schiffszeit . .	$= 7^h \; 37' \; 28''.6$	Mrgs. d. 27. Juni,
Zeitgl.	$= + \; 2' \; 44''.0$	auf wahre Zeit,
mittl. Schiffszeit . .	$= 7^h \; 40' \; 12''.6$	Mrgs. d. 27. Juni,
m. Gr. Z. nach Chr. *H.*	$= 12^h \; 48' \; 42'',7$	Mrgs. d. 27. Juni,
	$5^h \; 8' \; 30'',1$	WL. in Zeit,
Länge	$= 77^\circ \; 7',5$	West v. Greenw. nach Chr. *H.*
Mittl. Schiffszeit . .	$= 7^h \; 40' \; 12''.6$	Mrgs. d. 27. Juni,
m. Gr. Z. nach Chr. *T.*	$= 12^h \; 49' \; 22'',8$	Mrgs. d. 27. Juni,
	$5^h \; 9' \; 10'',2$	WL. in Zeit,
Länge	$= 77^\circ \; 17',6$	West v. Greenw. nach Chr. *T.*

Länge im Mittel nach beiden Chr. $= 77^\circ \; 12',5$ West v. Greenw.

Beispiel 3. 1852 den 1. Februar n. d. B. auf $9^\circ \, 21'$ SBr. und $115^\circ \, 50'$ WL. von Greenwich ist zur Ermittelung der Länge nachstehende Beobachtung gemacht:

	I. C. $= -$	$3' \; 45''$
Beob.-U. $= 4^h \; 20' \; 33''$	$\odot$	$28^\circ \; 53' \; 40''$
$20 \; 57$		$48 \; 40$
$21 \; 20$		$43 \; 10$
$4^h \; 20' \; 57''$	$\odot$	$28^\circ \; 48' \; 30''$
	I. C. . . $-$	$3' \; 45''$
	Kimmt. $-$	$3' \; 51''$
		$28^\circ \; 40' \; 54''$
	$\odot$ Halbm. $+$	$16' \; 14''$
		$28^\circ \; 57' \; 8''$
	Ref. — Par. . . $-$	$1' \; 37''$
		$h = 28^\circ \; 55' \; 31''.$

Augeshöhe 15 Fuss Rheinl. Das Chronometer war am 15. December 1851 zur Zeit des mittl. Mittags in Greenwich $8' \; 19'',8$ voraus gegen mittl. Greenw. Zt. und accelerirt täglich $2''.3$ g. m. Zt.

Vom 15. Decbr. 1851 bis 1. Febr. 1852 sind $=$	48 Tage,
	$2''.3$
	$110'',4$
$=$	$1' \; 50'',4$
Chron.-Corr. d. 15. Decbr. $=$	$8' \; 19'',8$
Chron.-Corr. d. 1. Februar $=$	$- \; 0^h \; 10' \; 10'',2.$

Vergleichung der Beobachtungsuhr mit dem Chronometer:

Chronometer $12^h\ 12'\ 0''$ *) = Beobachtungsuhr $4^h\ 15'\ 0''$

» $12^h\ 23'\ 0''$ = » $4^h\ 26'\ 3''$

Differenz = $11'\ 0''$ $11'\ 3''$.

Beobachtungsuhr zeigte zur Zeit der Beob. = $4^h\ 20'\ 57''$

Beob.-Uhr zeigte bei der ersten Vergleich. = $4^h\ 15'\ 0''$

$11'\ 3'' : 11'\ 0'' = 5'\ 57'' : x$

$11'\ 3''$	1	$5'\ 57''$
$-\ 3''$	-221	$-\ 1'',6$

Seit der ersten Vergl. n. Chr. verfl. = $5'\ 55'',4$

Zeit der ersten Vergl. n. Chr. = $12^h\ 12'\ 0''$

Chronometer zeigte zur Zeit der Beobacht. = $12^h\ 17'\ 55'',4$

Chronometer-Correction den 1. Februar . . = $-\ 0^h\ 10'\ 10'',2$

$12^h\ 7'\ 45'',2$

Acceleration für $12^h\ 8'$ = $-\ 1'',2$

mittl. Greenw. Zt. Ab. den 1. Februar . . . = $12^h\ 7'\ 44'',0$.

N. A. den 1. Februar ⊙ Decl. = $-\ 17^\circ\ 14'\ 56''$

stündl. Diff. = $-\ 42'',7$ giebt f. $12^h,1$ $-\ 8'\ 37''$

⊙ Decl. = $-\ 17^\circ\ 6'\ 19''$.

Zeitgl. den 1. Februar = $+\ 13'\ 50'',11$ auf w. Zt.

stündl. Diff. = $+\ 0'',326$

$12^h,1$

$+\ 3'',94$ $+\ 3'',94$

Zeitgl. = $+\ 13'\ 54'',05$ auf w. Zt.

Berechnung des Stundenwinkels nach Gleichung (IV.) §. 135.

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos\varphi \cdot \cos\delta}$$

$\varphi = -\ 9^\circ\ 21'$ log sec = 0,00581

$\delta = -\ 17^\circ\ 6'\ 19''$ log sec = 0,01965

$\varphi - \delta = 7^\circ\ 45'\ 19''$ $n \cos = 99085$

$h = 28^\circ\ 55'\ 31''$ $n \sin = 48367$

50718 log = 4,70516

$t = 4^h\ 9'\ 53''$ log $(2 \sin^2 \frac{1}{2}t)$. . . = 4,73062

wahre Schiffszeit = $4^h\ 9'\ 53''$ Abends den 1. Februar,

Zeitgl. = $+\ 13'\ 54'',1$ auf wahre Zeit,

mittl. Schiffszeit = $4^h\ 23'\ 47'',1$ Abends den 1. Februar,

mittl. Greenw. Zt. = $12^h\ 7'\ 44'',0$ Abends den 1. Februar,

$7^h\ 43'\ 56'',9$ WL. in Zeit,

Länge = $115^\circ\ 59',2$ West v. Greenw.

*) Dass die Zeit, welche das Chronometer zur Zeit der Beobachtung zeigte, nämlich $0^h\ 17'\ 55''$, Morgenzeit des folgenden Tages ist, ergiebt sich dadurch, dass, wenn man zu dem Mittel der Uhrzeiten die ungefähre Uhr-Correction und die Länge in Zeit algebraisch addirt, und auf die Summe die Chronometer-Correction mit entgegengesetztem Zeichen anwendet, also in diesem Beispiel 10' addirt, die Summe = $12^h\ 17'\ 17''$, mithin = $0^h\ 17'\ 17''$ Morgens des folgenden Tages ist; diese Zeit stimmt ungefähr mit der Zeit, die das Chronometer angegeben hat.

§. 156.

Beobachtung der Meridianhöhe.

A. Der oberen Meridianhöhe.

Wenn der Himmelskörper sich dem oberen Meridian nähert und nahe demselben ist, beobachte man in kurzen Zwischenzeiten Höhen desselben, bis selbige anfangen abzunehmen und notire jede; die grösste ist dann sehr nahe als die obere Meridianhöhe anzusehen (§. 131.). Gewöhnlich werden sich, besonders wenn man nicht allein die Höhen, sondern auch die entsprechenden Zeiten einer Uhr notirt hat, Unregelmässigkeiten zeigen, also ein Zu- und Abnehmen der Höhen stattfinden; letztere müssten nach der Culmination, sehr nahe in derselben Weise abnehmen, wie sie vor derselben zugenommen haben, wenn es möglich wäre, ganz genaue Beobachtungen zu machen. Es kann daher öfter der Fall eintreten, dass die notirten Höhen schon ab- und später noch wieder zunehmen. Eine einzelne Höhe als Meridianhöhe wird sich mit Sicherheit aus den beobachteten Höhen nicht herausfinden lassen, und es wird daher zweckmässiger sein, ein Mittel aus 4 bis 6 der auf einanderfolgenden grössten Höhen zu nehmen, welche nicht mehr mit einander differiren, als der sich aus der Unregelmässigkeit der Ab- oder Zunahme der Höhen ungefähr ergebende Beobachtungsfehler beträgt, und dieses Mittel als die Meridianhöhe zu betrachten.

B. Beobachtung der unteren Meridianhöhe.

Wenn der Himmelskörper dem Meridian unter dem Pol nahe ist, und die Höhen noch abnehmen, so beobachte man in kurzen Zwischenzeiten, oder so schnell als möglich, Höhen bis sie wieder anfangen zu wachsen und notire dieselben; die kleinste ist dann die untere Meridianhöhe. Der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wegen, womit jede Höhenmessung, besonders über dem Seehorizonte behaftet ist, wird es auch hier sicherer sein, ein Mittel aus denjenigen kleinsten Höhen, welche nicht mehr mit einander differiren, als der ungefähre Beobachtungsfehler beträgt, zu nehmen und dieses als die untere Meridianhöhe zu betrachten.

Anmerkung 1. Bei grossen Höhen ist der Bogen, den das reflectirte Bild des Himmelskörpers in Folge der Drehung des Instrumentes um die Gesichtslinie beschreibt, wenig gekrümmt, so dass man nur ungefähr den eigentlichen Berührungspunkt mit dem Horizonte, welcher im Vertical des Gestirnes liegt, ermitteln kann, was um so schwieriger wird, je näher das Gestirn dem Zenith steht. Es gewährt deshalb, wenn das Gestirn nahe dem Zenith durch den Meridian geht, die gemessene Meridianhöhe keine zuverlässige Breitenbestimmung. Daher wird man diese durch Meridianhöhen solcher Gestirne machen müssen, die nicht dem Zenith nahe durch den Meridian gehen. Andern Falles wird man den Berührungspunkt in der Kimm nach dem Compasse ermitteln und wenn die Sonne dem Zenith sehr nahe stände, würde die Höhe derselben im Süd- und Nord-Meridian gemessen werden können, was auch nicht leicht zu machen geht.

Anmerkung 2. Da die Declination der Sonne, des Mondes und der Planeten ändert, so wird nicht immer, wie in den vorstehend gegebenen Anweisungen zur Beobachtung der Meridianhöhe angenommen ist, die grösste oder die kleinste Höhe die Meridianhöhe sein. In §. 131. ist schon eine Formel entwickelt, wonach man ermitteln kann, in wie

viel Zeit Gestirne mit veränderlicher Declination, vor oder nach ihrem Durchgange durch den Meridian die grösste Höhe erreichen.

Es ist §. 131. für 78° Breite und 0° 50′ ungleichnamiger Declination gefunden, dass die grösste Höhe der Sonne 1′ 11″,4 vor oder nach der Culmination stattfinden kann, und auf 60° Breite beträgt dieser Zeitunterschied im höchsten Falle, wenn die Declination nahe = 0 ist, kaum eine halbe Minute. Der Mond dagegen erreicht auf 78° Breite und 1° ungleichnamiger Declination seine grösste Höhe 20′ 26″,6 vor oder nach der Culmination; in 60° Breite und 0° 0′ Declination würde dieser Unterschied nahe 7,5 Minuten, auf 50° Breite und bei 0° 0′ Declination nahe 5,2 Minuten und auf 40° Breite nur noch ungefähr 3,6 Minuten betragen können.

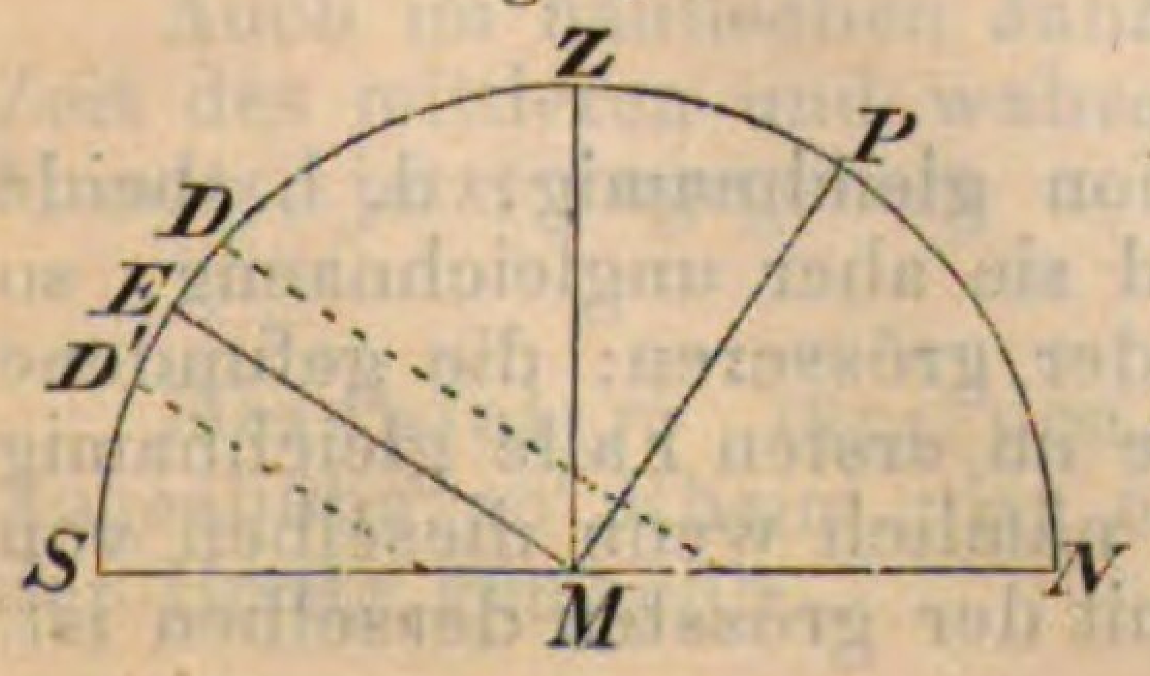
Es wird später (§. 169.), bei Berechnung der Meridianhöhen vermittelst Culminationssecunden gezeigt werden, wie man bei bekanntem kleinen Stundenwinkel und bekannter Declination, wie auch ungefähr bekannter Breite, leicht den Unterschied zwischen der grössten und der oberen Meridianhöhe finden kann; derselbe beträgt für die Sonne in 78° Breite, 0° 50′ ungleichnamiger Declination und einem Stundenwinkel von 1′ 12″, nahe 0″,6; in 60° Breite, 0° Declination und einem Stundenwinkel von 0,5 Minuten nur nahe 0″,3, welches die grössten Fehler sind, die bei Berechnung der Breite aus oberen Meridianhöhen der Sonne in den angeführten Fällen dadurch entstehen können, dass man die grösste Höhe der Sonne als die obere Meridianhöhe annimmt, welche bei Breitenbestimmungen auf See gegen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler und die Unsicherheit in der irdischen Refraction als verschwindend betrachtet werden können. Beim Monde kann dieser Fehler aber bedeutender werden, und beträgt in 78° Breite, 1° ungleichnamiger Declination und 20′,5 Stundenwinkel noch 2′ 46″, welches der grösstmögliche Fehler ist. In 60° Breite und 0° 0′ Declination und 7′,5 Stundenwinkel beträgt dieser Fehler 1′ 2″; in 50° Breite, 0° 0′ Declination und 5′,2 Stundenwinkel ist derselbe ungefähr 47 Secunden, und in 40° Breite, 0° 0′ Declination und einem Stundenwinkel von 3′,6 ist die obere Meridianhöhe 30″ kleiner als die grösste Höhe.

Die grösste Veränderung der Declination des Mondes beträgt 17″ in einer Minute, und wenn man die Länge des Ortes nur auf 2° unsicher annimmt, so wird die Declination dadurch um $8 \cdot 17 = 2' \, 16''$ fehlerhaft, woraus man um so mehr ersieht, dass die Breitenbestimmung vermittelst oberer Mond-Meridianhöhen auf See, abgesehen von dem Beobachtungsfehler, der auch meistens grösser als bei der Sonne sein wird, nur ein ungefähres Resultat gewährt; denn wenn man annimmt, dass die gedachten Fehler von 2′ 46″ und 2′ 16″ zusammenfallen, so beträgt der dadurch in der Breite entstehende Fehler schon 5′ 2″.

§. 157.

Aus den beobachteten grössten Höhen (dieselben als obere Meridianhöhen betrachtet) und der Declination der Himmelskörper, die zur Zeit der Culmination stattfindet, die geographische Breite zu finden.

Fig. 82.

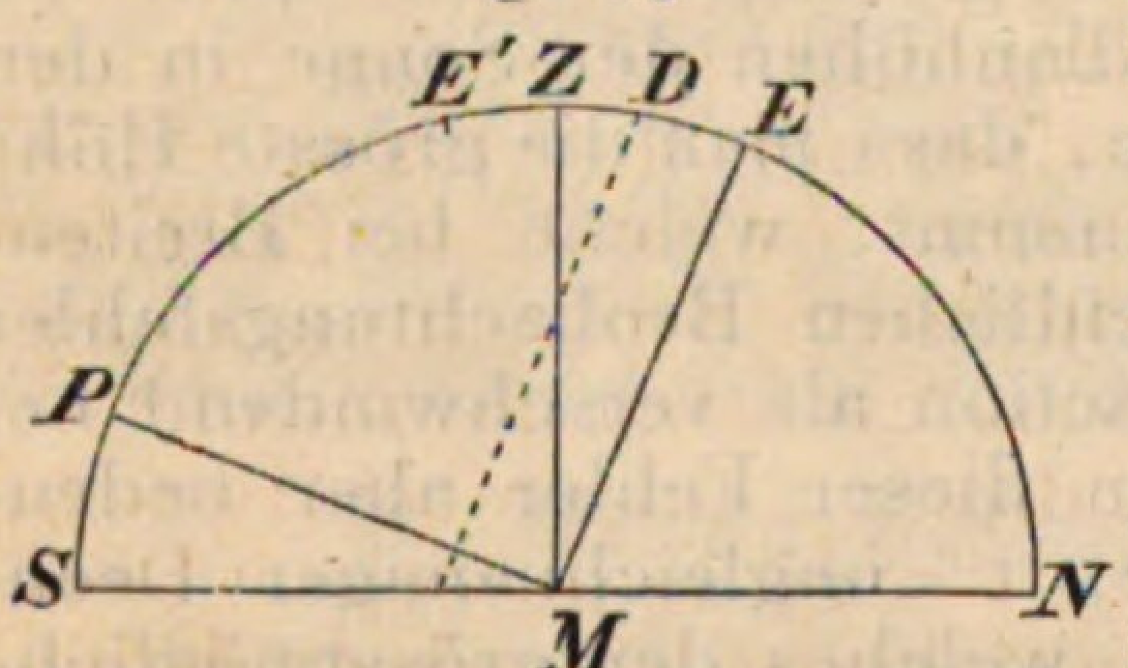


Es sei (Fig. 82.) *SEZPN* der sichtbare Theil von dem Himmels-Meridian eines Ortes, dessen geographisches Zenith *Z* ist; *P* bezeichne den oberen Weltpol und der Himmels-Aequator schneide den Meridian in *E*; die wahre obere Meridianhöhe des Mittelpunktes eines im Südmeridian beobachteten Gestirns sei *SD*, so ist dessen Zenith-

Abstand $ZD = 90^\circ - SD$, welcher in diesem Falle nördlich ist und mit N bezeichnet wird, weil das Zenith nördlich vom Himmelskörper steht; wenn aber das Zenith südlich vom Himmelskörper sich befindet, so ist der Zenith-Abstand südlich und wird mit S bezeichnet, oder, welches dasselbe ist, man giebt dem Zenith-Abstand die entgegengesetzte Benennung des Meridians, in welchem die Höhe beobachtet ist. Die nördliche Declination des im Südmeridian in D beobachteten Gestirnes ist ED und es ist EZ gleich der geographischen Breite des Ortes, und zwar Nord, weil das Zenith nördlich vom Aequator steht. Die Figur zeigt, dass in diesem Falle der nördliche Zenith-Abstand $DZ +$ der nördlichen Declination $ED =$ der nördlichen Breite EZ ist.

Wäre die obere wahre Meridianhöhe über dem Südhorizonte (Fig. 82.) aber SD', also die Süddeclination des Gestirnes ED' und der nördliche Zenith-Abstand ZD'; so ist die Breite $EZ = D'Z - D'E$, ebenfalls nördlich, weil das Zenith nach Norden vom Aequator steht.

Fig. 83.



Ist (Fig. 83.) die wahre Höhe im oberen Meridian über dem Nordhorizonte ND, so ist der südliche Zenith-Abstand $ZD = 90^\circ - ND$, und wenn DE die Süddeclination des Gestirnes, so ist die SBr. $ZE = ZD + DE$.

Wäre dagegen bei derselben Meridianhöhe die Norddeclination des Gestirnes $= DE'$, so schneidet der Aequator den Meridian in E', und die NBr. $E'Z = E'D - DZ$.

Man ersieht hieraus, dass es sich durch Zeichnung einer ähnlichen Figur (Meridianfigur) in jedem Falle, wenn die obere Meridianhöhe über dem Nord- oder Südhorizonte und die nördliche oder südliche Declination des Himmelskörpers bekannt sind, leicht ergiebt, ob man Zenith-Abstand und Declination zu addiren oder von einander zu subtrahiren habe, um die Breite zu erhalten, wie auch, ob letztere mit Nord oder Süd zu bezeichnen ist. Nach der Meridianfigur hat man zur Bestimmung der Breite aus beobachteten oberen Meridianhöhen die

Regel.

Aus der gemessenen Meridianhöhe suche die wahre Mittelpunktshöhe und subtrahire dieselbe von 90°, so ist der Rest der Zenith-Abstand; den bezeichne mit „Nord", wenn im Südmeridian, und mit „Süd", wenn im Nordmeridian beobachtet ist.

Ferner interpolire die Declination des Gestirnes für die Zeit der oberen Culmination desselben am Beobachtungsorte und bemerke bei der Declination, ob dieselbe Nord oder Süd ist.

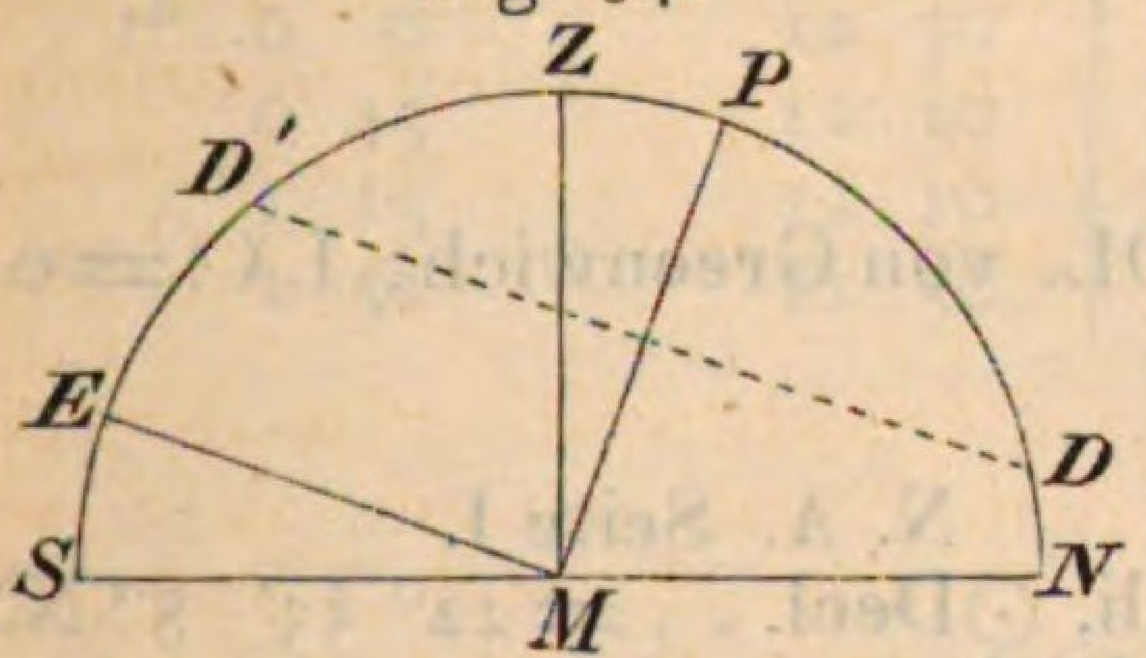
Sind nun Zenith-Abstand und Declination gleichnamig, d. h. beide Süd oder beide Nord, so addire beide; sind sie aber ungleichnamig, so subtrahire die kleinere dieser Grössen von der grösseren; die gefundene Summe oder der Rest ist die Breite, welche im ersten Falle gleichnamig mit den addirten Grössen, im zweiten aber, nämlich wenn dieselben von einander subtrahirt sind, stets gleichnamig mit der grössten derselben ist.

§. 158.

Aus den beobachteten kleinsten Höhen — diese als Meridianhöhen unter dem Pol betrachtet — und dem Polabstand der Gestirne vom oberen Pol gerechnet, die geographische Breite zu finden.

Wenn der Polabstand eines Himmelskörpers kleiner als die mit der Declination gleichnamige Breite des Ortes ist, so geht das Gestirn nicht unter, in welchem Falle man auch dessen untere Meridianhöhe beobachten und daraus die Breite bestimmen kann.

Fig. 84.



Es sei nämlich (Fig. 84.) $EP = ZN = 90°$, so ist $EZ = PN$, oder die Breite gleich der Polhöhe. Wenn nun DN die untere Meridianhöhe eines Gestirnes vorstellt, so ist der Polabstand desselben DP und die Polhöhe $PN = DN + DP =$ der Breite, welche stets gleichnamig mit der Declination des Gestirnes ist.

Es ergiebt sich aus dem Gesagten, zur Bestimmung der Breite aus beobachteten Meridianhöhen unter dem Pol nachstehende

Regel.

Aus der gemessenen unteren Meridianhöhe suche die wahre Mittelpunktshöhe (§. 119. bis 122.), reducire die Declination des Gestirnes für die Zeit der unteren Culmination desselben am Beobachtungsorte und subtrahire dieselbe von 90°, so ist der Rest der Polabstand oder die Poldistanz vom oberen Pol.

Diese Poldistanz, zu der wahren Mittelpunktshöhe addirt, giebt die geographische Breite des Ortes, welche stets gleichnamig mit der Declination des beobachteten Gestirnes ist.

§. 159.

Aus oberen Meridianhöhen der Sonne die Breite zu finden.

Da die Sonne um 12^h wahre Zeit Mittags durch den oberen Meridian eines jeden Ortes geht, und im Nautical-Almanac Seite I. jeden Monats, wie auch in der nautischen Tafel XXI. die Declination der Sonne für den Augenblick des wahren Mittags zu Greenwich gegeben ist, so berichtigt man die Declination nur für Länge, oder Länge in Zeit vom Greenwicher Meridian gerechnet, indem OL. als Zeit vor dem Mittage und WL. als Zeit nach dem Mittage genommen wird, und verfährt übrigens nach der in §. 157. gegebenen Regel.

Auch im nautischen Jahrbuch ist die Declination der Sonne für die Zeit des mittleren und wahren Mittags eines jeden Tages, Seite I. jeden Monats, jetzt angegeben.

Beispiel 1. 1853 den 3. Januar auf 18° 36′ WL. von Greenwich, Augeshöhe 20′ Rheinl., ist nachstehende Beobachtung zur Bestimmung der Breite gemacht.

☉̲ 58° 10′ i. S. M.
I. C. . . . = + 2′
Kimmt. . = — 4′ 27″
Ref. — P. = — 0′ 31″
☉ Hlbm. = + 16′ 17″
} . . + 13′,3
⊖ wahre Höhe. . . . = 58° 23′,3
90°
⊖ Mrd.-Zenithdist. . = 31° 36′,7 N.
☉ Decl. = 22° 48′,4 S.
Breite = 8° 48′,3 N.

Wahre Zeit . . = 0h 0′ Ab. d. 3. Jan.
Zeitgl. = + 4′,9 a. w. Z.
WL. in Zeit . . = + 1h 14′.4
Ungf. m. Grw. Z. = 1h 19′ Ab. d. 3. Jan.
N. J. d. 3. Jan. ☉ Decl. = 22° 48′ 42″ S.
ständl. Diff. . . = — 14″,5
1,3h
435
145
— 18″.85 . . — 19″
☉ Decl. = 22° 48′ 23″ S.

Beispiel 2. 1853 den 4. Juli auf 101° OL. von Greenwich; I. C. = 0; Augeshöhe 16′ Rheinl.

☉̲ 81° 59′ i. N. M.
Kimmt. . = — 3′ 58″
Ref. — P. = — 0′ 7″
☉ Hlbm. = + 15′ 45″
} + 11′,7
⊖ wahre Höhe = 82° 10′,7
90°
⊖ Mrd.-Zenithdist. . = 7° 49′,3 S.
☉ Decl. = 22° 54′,7 N.
Breite = 15° 5′,4 N.

N. A. Seite I.
d. 4. Juli, ☉ Decl. . . = 22° 53′ 8″ N.
ständl. Diff. = + 13″,7
OL. i. Zt. = 6,7h
+ 91″,8 . . + 1′ 32″
☉ Decl. = 22° 54′ 40″ N.

Beispiel 3. 1852 den 22. September auf 165° 36′ WL. von Greenwich; I. C. = + 4′,2, Augeshöhe 16′ Rheinl., soll die Breite gefunden werden.

☉̲ 79° 30′,8 i. N. M.
I. C. . . . = + 4′,2
Kimmt. . = — 4′,0
Ref. — P. = — 0′,1
☉ Hlbm. = + 16′,0
} + 16′,1
⊖ wahre Höhe . . = 79° 46′,9
90°
⊖ Md.-Zenithdist. = 10° 13′,1 S.
☉ Decl. = 0° 1′,2 S.
Breite = 10° 14′,3 S.

N. A. Seite I.
d. 22. Septbr. ☉ Decl. = 0° 9′ 33″ N.
ständl. Diff. = — 58″,5
WL. in Zt. = 11h
— 643″.5 — 10′ 44″
☉ Decl. = 0° 1′ 11″ S.

Beispiel 4. 1852 den 5. October auf 9° 45′ WL. von Greenwich; Augeshöhe 11′ Rheinl.; I. C. + 0′ 37″; sind nachstehende Höhen zur Bestimmung der Breite beobachtet.

12^h 53′ 5″	⊙	47° 11′ 40″
55 17		12 10
56 22		12 20
57 16		12 40
57 52		12 30
58 20		12 20
58 51		12 30
59 23		12 40
1^h 0 0		12 30
0 43		12 10
1 13		12 10
1 51		11 50

N. A. den 5. October ⊙ Decl. = 4° 53′ 45″ S.
stündl. Diff. . . = + 57″,7
WL. in Zeit . . = 0,65^h
+ 37″,5 . . . + 38″
⊙ Decl. + 4° 54′ 23″ S.

. 12^h 58′ 37″ ⊙ 47° 12′ 32″ i.S.M.
I. C. = + 0′ 37″ } — 2′ 41″
Kimmt. = — 3′ 18″ }
⊙ scheinb. H. = 47° 9′ 51″
Refr.—Par. . . = — 0′ 48″ } + 15′ 14″
⊙ Halbm. . . . = + 16′ 2″ }
⊖ wahre Höhe = 47° 25′ 5″ S.
90°
⊙ Merid.-Zenithdist. . . . = 42° 34′ 55″ N.
⊙ Decl. = 4° 54′ 23″ S.
Breite = 37° 40′ 32″ N.

Anmerkung. Da in Beispiel 4. auch die Uhrzeiten notirt sind, so kann man zugleich aus dieser Beobachtung die Uhrcorrection gegen wahre Zeit finden, denn so viel wie die Uhr mehr als 12^h zeigt als die Meridianhöhe stattfand, geht dieselbe nahe vor, und so viel wie sie weniger als 12^h zeigt, ist sie zurück gegen wahre Zeit. In dem vorstehenden Beispiel ist die Uhr also 0^h 58′ 37″ vor wahrer Zeit.

Da die Höhenänderung nahe am Meridian unbedeutend ist und die grösste Höhe nicht im Meridian liegt (§. 131.), so kann die auf solche Art gefundene Uhrcorrection nicht sehr zuverlässig sein.

Beispiel 5. 1852 den 20. December auf 20° OL. von Greenwich ist ⊙ 52° 3′ im N. M. beobachtet; I. C. = — 5′,5; Augeshöhe 16′ Rheinl.; auf welcher Breite war man?

⊙ 52° 3′,0 i. N. M.
I. C. . . . = — 5′,5 }
Kimmt. . = — 4′,0 } — 26′,5
Ref. — P. = — 0′,7 }
⊙ Hlbm. = — 16′,3 }
⊖ wahre Höhe . . = 51° 36′,5
90°
⊙ M.-Zenithdist. . = 38° 23′,5 S.
⊙ Decl. = 23° 27′,2 S.
Breite = 61° 50′,7 S.

N. A.
d. 20. Decbr. ⊙ Decl. = 23° 27′ 13″ S.
stündl. Diff. = 0″,8
OL. in Zeit = 1,3^h
— 1″,04 . . . — 1″
⊙ Decl. = 23° 27′ 12″ S.

Beispiel 6. 1853 den 5. August auf 25° WL. von Greenwich ist mit demselben Instrumente abwechselnd über dem Nord- und Südhorizonte die Höhe der Sonne beobachtet, woraus im Mittel die Meridianhöhen gefunden sind, wie folgt:

☉ 115° 46'.3 über dem Nordhorizonte im Meridian,
☉ 63° 49'.3 » » Süd » » »
[2]) 51° 57',0

½ Diff.	= 25° 58'.5 = ⊖ sch.Z.D., also sch.H. = 64° 1',5		
Refr. — Par.	= + 0'.4	N.-A. d. 5. Aug. ☉ Decl.	= 16° 57' 13" N.
⊖ w. Zenith-Dist. . . .	= 25° 58',9 N.	stündl. Diff. . .	= 41",1
☉ Decl.	= 16° 56',1 N.	WL. in Zeit .	= 1,7^h
Breite	= 42° 55',0 N.	— 69",9 . .	— 1' 10"
		☉ Decl.	= 16° 56' 3" N.

Anmerkung. Es ist §. 111. erklärt, dass, wenn man sowohl die kleinste, als über dem entgegengesetzten Horizonte die grösste Höhe eines Gestirnes misst, die halbe Differenz der gemessenen Höhen die scheinbare Zenithdistanz ist. Hat man nun, wie im vorstehenden Beispiel, bei der kleinsten Höhe den Unterrand, und bei der grössten den Oberrand gemessen, welches aber im Instrumente der Unterrand zu sein scheint, so ist die halbe Differenz die scheinbare Zenithdistanz des Mittelpunktes; denn wenn man die Mittelpunkte gemessen hätte, so wären beide Höhen um die Halbmesser grösser gefunden, folglich die halbe Differenz der Höhen dieselbe geblieben.

Auf die scheinbare Zenithdistanz hat man natürlicher Weise die Refraction weniger der Parallaxe entgegengesetzt, wie auf die Höhen, anzuwenden, um die wahre Zenithdistanz zu erhalten.

§. 160.

Aus unteren Meridianhöhen der Sonne die Breite zu finden.

Da die Sonne um 12^h wahre Zeit (Mitternacht) durch den Meridian unter dem Pol geht, so hat man zu dieser Zeit die entsprechende Zeit des Meridians der Ephemeride zu suchen (§. 101.) und die Declination dafür zu verbessern. Uebrigens verfährt man nach der im §. 158. gegebenen Regel.

Beispiel 1. 1852 den 30. Juni auf 34° 1' OL. von Greenwich; Augeshöhe 20' Rheinl.; I. C. = 0.

☉	5° 28' i. M. u. d. P.	W. Schiffszeit. . =	12^h 0' Ab.
Kimmt. =	— 4',4	OL. in Zeit . . . =	— 2^h 16'
☉ scheinb. H. . . =	5° 23',6	u. wahre Grw. Z. =	9^h 44' Ab, d. $\frac{30}{6}$.
R. — P. — 9',0 / Halbm. + 15'.7	+ 6',7	Zeitgl. =	+ 3' a. w. Zt.
		ungef. m. Grw. Z. =	9^h 47' Ab. d. $\frac{30}{6}$.
⊖ wahre Höhe . =	5° 30',3		
☉ N. P. D. =	66° 51',5	N. J. d. $\frac{30}{6}$, ☉ Decl. =	23° 10' 7" N.
Breite =	72° 21',8 N.	stndl. Diff. = — 10",0	
		9,8^h	
		— 98" . . .	— 1' 38"
		☉ Decl. =	23° 8' 29" N.
			90°
		☉ N. P. D.	66° 51' 31".

Beispiel 2. 1852 den 20. Juni auf 25° 30′ OL. von Greenwich ist beobachtet: I. C. = — 0′ 30″; Barometer 29″,8 Engl.; Thermometer 34° Fahrenheit.

☉̆ 13° 50′ 50″ im Meridian unter dem Pol.

Ind. Corr. =	— 0′ 30″	Whr.Zt.d.Ortes =	12h 0′ Ab. d. 20/6.
	²) 13° 50′ 20″	OL. in Zeit .. = —	1h 42′
☉ scheinb. Höhe .. =	6° 55′ 10″	Ung.wh.Grw.Zt. =	10h 18′ Ab. d. 20/6.
Mittl. Refr. = — 7′ 23″			
Cor. f. Bar. = — 0′ 3″		N. A. d. 20. ☉ Decl. =	23° 27′ 21″ N.
» » Thr. = — 0′ 15″	— 23′ 17″	stündl. Diff. = 0″,33	
Höh.-Parl. = + 0′ 9″		10,3h	
Halbmesr. = — 15′ 45″		+ 3″,39 =	+ 3″
⊖ wahre Höhe ... =	6° 31′ 53″	☉ Decl. =	23° 27′ 24″ N.
☉ N. PD. =	66° 32′ 36″		90°
Breite =	73° 4′ 29″ N.	☉ N. PD. =	66° 32′ 36″.

§. 161.

Aus der oberen oder unteren Meridianhöhe eines Fixsterns die geographische Breite zu finden.

Es ist in §. 131. unter F. gezeigt, wie man die Zeit der oberen und unteren Culmination eines Fixsterns finden kann. Die Declination eines Fixsterns verändert übrigens so wenig, dass es genügt, dieselbe nur für das gegebene Datum zu interpoliren. Die Breite findet man nach den §§. 157. und 158.

Bei Beobachtung der Sternhöhen wäre zu erinnern, dass es meistens besser ist, das Rohr ohne Gläser, als das Fernrohr zu gebrauchen, und wenn man mit einem Octanten ohne Rohr beobachtet, so ist es oft erforderlich, das Diopter um 90° zu drehen und über dasselbe hinzusehen, statt durch die kleine Oeffnung in demselben; denn wenn man durch das Diopter sieht, so wird, wenn der Stern nicht sehr hell ist, derselbe meistens zu verschwinden scheinen, wenn er beinahe mit der Kimm in Berührung gebracht ist. Auch ist es besser, wenn man sich der Wasserfläche so viel als möglich nähert, weil dann der Horizont näher liegt und daher deutlicher erscheint.

Beispiel 1. 1853 den 6. April ist ✱ Sirius 56° 28′ im N. M. gemessen, I. C. = 0; Augeshöhe 12′ Rheinl.; wie gross war die Breite?

✱ Höhe =	56° 28′	im N. M.
Kimmtiefe = — 3′,4 / Refraction = — 0′,6	— 4′	
✱ wahre Höhe =	56° 24′	N.
	90°	
✱ Zenithdistanz =	33° 36′	S.
✱ Declination =	16° 31′,3	S.
Breite =	50° 7′,3	S.

Beispiel 2. 1853 den 11. Juni ist ✱ Capella 11° 54′ im Meridian unter dem Pol beobachtet; I. C. = + 4′,5; Augeshöhe 7′ Rheinl.; wie gross ist die Breite?

✱ Höhe	$= 11^\circ\ 54'$	im Meridian unter dem Pol.
I. C. $= + 4',5$ / Kimmtiefe . $= - 2',6$	. . . $+ 1',9$	
✱ scheinbare Höhe . .	$= 11^\circ\ 55',9$	
Refraction	$= \quad - 4',4$	
✱ wahre Höhe	$= 11^\circ\ 51',5$	
✱ N. PD.	$= 44^\circ\ \ 9',5$	
Breite	$= 56^\circ\ \ 1'$	Nord.

Anmerkung. Wenn man die Meridianhöhe eines Fixsterns misst, den man nicht kennt, so bemerke man, ob derselbe erster oder zweiter Grösse ist, und notire die Uhrzeit der Culmination. Man hat hierdurch ein Mittel, auszufinden, welcher Stern es gewesen ist, den man beobachtet hat; denn wenn ein Stern sich im Meridian befindet, so ist die Rectascension desselben gleich der Sternzeit. Man finde dann mit der, wenn auch nur ungefähr bekannten Zeit des Ortes nach §. 108. die Sternzeit und suche in der nautischen Tafel XXVI. denjenigen Stern, der die Grösse des beobachteten Sterns und nahe die Rectascension hat, welche gleich der gefundenen Sternzeit ist, so muss dieser der beobachtete sein.

Kennt man die ungefähre Breite des Ortes, so kann man aus derselben und der oberen oder unteren Meridianhöhe des Sterns die ungefähre Declination desselben und vermittelst letzterer auf ähnliche Weise wie durch die Rectascension mit Hülfe der erwähnten Tafel XXVI. den Stern ermitteln, welchen man beobachtet hat.

Die Declination eines Himmelskörpers ist nämlich gleich der absoluten Differenz der oberen Meridian-Zenithdistanz und der Breite, wenn beide gleichnamig sind; dieselbe ist mit der Breite gleichnamig, wenn diese grösser als die Meridian-Zenithdistanz, dagegen ungleichnamig, wenn jene kleiner als diese ist. Wäre die obere Meridian-Zenithdistanz mit der Breite ungleichnamig, so ist die absolute Summe beider die Declination und diese gleichnamig mit der Breite.

Beispiel 3. 1853 den 13. November, ungefähr um $6^h\ 50'$ wahre Zeit Morgens beobachtete man die Höhe eines Sterns erster Grösse $48^\circ\ 29'$ im N. M., I. C. $= 0$, Augeshöhe 10' Rheinl.; welcher Stern war es und auf welcher Breite war man?

Ungefähre wahre Zeit den 12. November	$= 18^h\ 50'$
N. A. ⊙ AR. den 13. November	$= 15^h\ 15'$

Ungefähre AR. des beobachteten Sterns $= 10^h\ \ 5'$. woraus sich nach Tafel XXVI. ergiebt, dass es der Stern Regulus war, denn seine AR. $= 10^h\ 0'\ 23''$.

✱ Höhe	$= 48^\circ\ 29'$	im N. M.
Kimmtiefe $= - 3',1$ / Refraction $= - 0',9$	 $- 4',0$	
✱ wahre Höhe	$= 48^\circ\ 25',0$	
	90°	
✱ Merid.-Zenithdist. .	$= 41^\circ\ 35',0$ S.	
✱ Declination	$= 12^\circ\ 40',9$ N.	
Breite	$= 28^\circ\ 54',1$ Süd.	

Beispiel 4. 1853 den 17. März, nach dem Besteck auf $50^\circ\ 5'$ NBr. beobachtete man die Höhe eines Sterns erster Grösse $59^\circ\ 57'$ im S. M., I. C. $= - 1'$; Augeshöhe 14' Rheinl.; welcher Stern war es und auf welcher Breite war man?

✳ Höhe	=	59° 57′	im S.M.
I. C. = — 1′			
Kimmtiefe = — 3′,7	. . —	5′,3	
Refraction = — 0′,6			
✳ wahre Höhe	=	59° 51′,7	
		90°	
✳ M.Z.D.	=	30° 8′,3	N.
Ungefähre Breite	=	50° 5′	N.
Ungef. Decl. des ✳	=	19° 56′,7	Nord.

Es ergiebt sich hiernach, dass es der Stern Arcturus war; denn derselbe hat nach Tafel XXVI. 19° 57′,7 N. Decl.

Wie oben ✳ M.Z.D.	=	30° 8′,3	N.
✳ Declination	=	19° 56′,8	N.
Breite	=	50° 5′,1	Nord.

§. 162.

Aus der oberen Meridianhöhe eines Planeten die geographische Breite zu finden.

Kennt man die Zeit des Ortes der Beobachtung, so finde man für diese die entsprechende Zeit des Meridians der Ephemeride und suche dafür die Declination. Ist die Zeit der Beobachtung aber nicht bekannt, so kann man nach §. 131. D. die Zeit der oberen Culmination des Planeten finden, und für die entsprechende Zeit des Meridians der Ephemeride die Declination reduciren.

Wenn man nach dem Nautical-Almanac rechnet, worin ausser der Culminationszeit auch die Declination der Planeten zur Zeit der oberen Culmination gegeben ist, braucht man diese Declination nur für die Länge in Zeit zu interpoliren, wobei jedoch zu beachten ist, dass man das Datum nach astronomischer Zeit zu nehmen hat. Im Uebrigen verfährt man nach §. 157.

Beispiel. 1844 den 14. September n. d. Best. auf 0° 18′ OL. von Greenwich. Augeshöhe 13′ Rheinl.; I. C. = + 0′ 34″. Man soll aus nachstehenden Beobachtungen die Breite bestimmen.

Ungefähre U. C. — 10′ gegen mittlere Zeit.

Morg.	9^h 7′ 1″ ♀	67° 36′ 20″
	7 41	36 40
	8 8	36 50
	9 3	36 25
	9 36	37 40
	10 12	37 30
	10 52	37 0
	11 16	36 20
	11 43	36 40
	12 18	36 30
	12 57	36 0
	13 46	35 45

Mittel d. Uhrzeit = 9^h 9' 49"	♀ = 67° 36' 53" S.M.
Ungef. U. C. = — 10' geg. mittl. Zt.	I. C. = + 0' 34"
Mittl. Schiffszeit . = 8^h 59' 49"	67° 37' 27"
OL. in Zeit = — 1' 12"	Kimmtiefe = — 3' 35"
Mittl. Greenw. Zeit = 8^h 58' 37" Morgens	Schb. Höhe = 67° 33' 52"
= 20^h 58' 37" Ab. d. $\frac{13}{9}$.	Refr.—Par. = — 0' 18"
N. A. d. $\frac{13}{9}$ z. Zt. d. M. P. ♀ Decl. = 15° 15' 19" N.	♀ w. Höhe = 67° 33' 34" S.
Corr. f. 0^h 1' 12" OL. in Zeit = 0"	90°
♀ Declination = 15° 15' 19' N.	♀ M. Z. D. = 22° 26' 26" N.
♀ Horiz. Par. = 15".	♀ Decl. . . = 15° 15' 19" N.
	Breite . . . = 37° 41' 45" N.

Anmerkung. Die Venus ist hier bei Tage beobachtet, welches, wenn dieselbe der Sonne nicht nahe ist, bei heiterer Atmosphäre oft angeht. Die Schwierigkeit besteht nur darin, sie erst am Himmel aufzufinden.

§. 163.

Aus oberen Meridianhöhen des Mondes die geographische Breite zu bestimmen.

Wenn die ungefähre Zeit der Beobachtung nicht bekannt ist, suche man nach der in §. 131. unter B. gegebenen Regel die Zeit der oberen Culmination, und dieser entsprechend die Declination des Mondes, wie auch den Halbmesser und die Horizontalparallaxe desselben (§. 103.). Im Uebrigen verfahre nach §. 157.

Beispiel 1. 1852 den 4. Februar auf 30° 9' WL. von Greenwich ist beobachtet ☾ 81° 40' 35" im N.M.; Indexcorrection + 3' 25", Augeshöhe 16' Rheinl.; man soll die Breite finden.

Naut. Jahrb. d. $\frac{4}{2}$ ☾ Merid.-Durchgang . . . = 11^h 31',8 mittl. astr. Zt.
» » » $\frac{5}{2}$ » = 12^h 30',7 » » »

24^h : 2^h 0'.6 = 58',9 : x

2^h	12	4',9
0',6	200	0',0
		4',9

d. $\frac{4}{2}$ ☾ Merid.-Durchg. a. Beobachtungsorte = 11^h 36',7 mittl. astr. Zt.
WL. in Zeit = 2^h 0',6 » » »
mittlere Greenwicher Zeit = 13^h 37',3 » » » d. $\frac{4}{2}$.

☾ Halb. d. $\frac{4}{2}$ Mittern. = 16' 15"
» » $\frac{5}{2}$ Mittags = 16' 19"

12^h : 1^h 37',3 = 0' 4" : x

1^h	12 . . .	0",33
30'	2 . . .	0",17
6'	5 . . .	0",03
		0",5
		16' 15",5

Contraction = 0",0
Vergrösserung = + 16",5
☾ scheinb. Halbm. . . = 16' 32".

☾ Horizontalpar. d. $\frac{4}{2}$ Mittern. $= 59' \, 37''$
» » $\frac{5}{2}$ Mittags $= 59' \, 54''$

$12^h : 1^h \, 37',3 = 0' \, 17'' : x$

1^h	12 . . .	$1'',42$
$30'$	2 . . .	$0'',71$
$6'$	5 . . .	$0'',14$
$1'$	6 . . .	$0'',02$
		$2'',3$

Horizontalparallaxe . . $= 59' \, 39'',3.$

☾ Decl. den $\frac{4}{2}$ um 12^h $= 20^\circ \, 37' \, 52''$ N.
Differenz für $10' = - 59'',1$
Grw.Zt. n. $12^h = 1^h \, 37',3 = 9,7 \cdot 10'$
$- 573'',3$. . $= - 9' \, 33''$
☾ Declination $= 20^\circ \, 28' \, 19''$ N.

☾ $= 81^\circ \, 40' \, 35''$ im N. M.
I. C. . . . $= + 3' \, 25''$ }
Kimmtiefe $= - 3' \, 58''$ } . . $= - 0' \, 33''$
☾ scheinbare Höhe $= 81^\circ \, 40' \, 2''$
☾ scheinb. Halbmesser . . $= + 16' \, 32''$
☾ scheinbare Höhe $= 81^\circ \, 56' \, 34''$
Parall.—Refr. $= + 8' \, 15''$. . . { $8' \, 15''$ / $- 6''$ / $+ 6''$ }
☾ wahre Höhe $= 82^\circ \, 4' \, 49''$
90°
☾ M.Z.D. $= 7^\circ \, 55' \, 11''$ S.
☾ Decl. $= 20^\circ \, 28' \, 19''$ N.
Breite $= 12^\circ \, 33' \, 8''$ Nord.

Beispiel 2. 1852 den 9. Januar auf $3^\circ \, 22'$ OL. von Greenwich ist ☾ $46^\circ \, 0' \, 53''$ im N. M. beobachtet; Indexcorrection $= - 5' \, 53''$; Augeshöhe 15′ Rheinl.; man soll die Breite finden.

N. A. d. 8. Jan. ☾ Merid.-Durchg. zu Greenwich $= 13^h \, 48',5$ mittl. astr. Zeit,
» » » 7. » » » » » $= 12^h \, 50',1$ » » »

$24^h : 0^h \, 13',5 = 58',4 : x$

1^h	24	$2',43$
$12'$	5	$0',49$
$1',5$	8	$0',06$
		$0',55$

den 8. Jan. ☾ Mer.-Durchg. am Beobachtungsorte $= 13^h \, 47',9$ mittl. astr. Zeit.
OL. in Zeit . $= - 0^h \, 13',5$
mittlere Greenwicher Zeit $= 13^h \, 34',4$ Ab. d. 8. Jan.

☾ Halbm. d. 8. Jan. Mittern. . $= 16' \, 9'',5$
» » 9. » Mittags . $= 16' \, 11'',8$

$12^h : 1^h \, 34',4 = 2'',3 : x$

1^h	12 $=$	$0'',2$
$30'$	2 $=$	$0'',1$
		$0'',3$

$16' \, 9'',8$
Vergrösserung $+ 11'',8$
Contraction $- 1'',0$
☾ scheinb. Halbmesser $= 16' \, 20'',6.$

☾ Horiz.-Parall. d. 8. Jan. Mittern. = 59′ 17″,8
» » 9. » Mittags = 59′ 26″,2

12^h :	1^h 34″,4	=	8″,4 : x
1^h	12		0″,7
30′	2		0″,35
5′	6		0″,06
			1″,1

Horizontalparallaxe . . . = 59′ 18″,9.
☾ Declination den 8. Januar um 13^h . . = 19° 28′ 51″,3 Nord,
Differenz für 10′ = —70″,98
Grw. Zt. nach 13^h = 34′,4 = 3.44 · 10′
244″,17 . . = — 4′ 4″,2
☾ Declination = 19° 24′ 47″ Nord.

☾	= 46° 0′ 53″ im N. M.	
I. C. = — 5′ 53″; Kimmtiefe . = — 3′ 51″	. . = — 9′ 44″	
☾ scheinbare Höhe	= 45° 51′ 9″	
☾ scheinb. Halbmesser . .	= + 16′ 21″	
☾ scheinbare Höhe	= 46° 7′ 30″	40′ 4″
Parall.—Refr.	= + 40′ 12″	— 5″
☾ wahre Höhe	= 46° 47′ 42″	+ 13″
	90°	
☾ M. Z. D.	= 43° 12′ 18″ S.	
☾ Declination	= 19° 24′ 47″ N.	
Breite	= 23° 47′ 31″ Süd.	

§. 164.

Die geographische Breite aus der Höhe eines Himmelskörpers zu bestimmen, nahe am Meridian und nicht nahe am Zenith beobachtet, wenn die wahre oder mittlere Zeit und die ungefähre Länge des Ortes bekannt ist.

Es bezeichne h die wahre Höhe, z das Complement derselben, φ die geographische Breite des Ortes, b das Complement derselben, δ die Declination des Gestirnes, p die Poldistanz desselben vom oberen Pol gezählt, t dessen Stundenwinkel vom oberen Meridian ostwärts und westwärts gezählt und A das Azimuth des Himmelskörpers vom Meridian des oberen Pols gerechnet; so ergiebt sich aus dem sphärischen Dreieck zwischen dem geographischen Zenith, oberen Pol und Gestirn nach §. 20. der sphärischen Trigonometrie

$$\sin A = \frac{\sin t \cdot \sin p}{\sin z} = \sin t \cdot \sin p \cdot \operatorname{cosec} z = \sin t \cdot \cos \delta \cdot \sec h \text{ (I.)}.$$

Es ist stets $A > 90°$, wenn $p > 90°$ ist; dagegen ist $A < 90°$, wenn $p < b$ ist; wenn aber $p < 90°$ und $> b$ ist, so kann A sowohl spitz als stumpf sein; soll jedoch die Beobachtung zur Breitenbestimmung tauglich sein, so muss A, wenn das Gestirn nicht etwa nahe am unteren Meridian beobachtet wurde, immer stumpf sein.

Es ist ferner in obigem Dreieck nach (3.) in §. 40. der sphärischen Trigonometrie, worin g den parallactischen Winkel bezeichnet,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + t)}{\sin \frac{1}{2}(A - t)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - z),$$

oder

$$\operatorname{cotg}(45° + \tfrac{1}{2}\varphi) = \sin \tfrac{1}{2}(A + t) \cdot \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(A - t) \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - z) \ . \ . \ . \text{ (II.)}.$$

Man hat also nach (I.) erst A (das Azimuth vom oberen Pol) zu berechnen, dann nach (II.) die Breite $\varphi = 2\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) - 90^\circ$.

Wäre, was nicht leicht vorkommen kann, die Poldistanz Nord statt Süd, oder umgekehrt angenommen, so würde $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ statt $45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ gefunden sein, und dann wäre $\varphi = 90^\circ - 2\,(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$.

Entwickelung einer zweiten Formel, nach der man die Breite finden kann.

Im sphärischen Dreieck zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn ist:

$$\cos z = \cos b \cdot \cos p + \sin b \cdot \sin p \cdot \cos t \text{ (I. §. 19. sphär. Trig.)},$$

oder

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t, \text{ also}$$

$$\frac{\sin h}{\sin \delta} = \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \operatorname{cotg} \delta \cdot \cos t.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\operatorname{tang} N = \operatorname{cotg} \delta \cdot \cos t$, so geht sie über in

$$\frac{\sin h}{\sin \delta} = \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{\sin N}{\cos N},$$

also

$$\frac{\sin h}{\sin \delta} \cdot \cos N = \sin \varphi \cdot \cos N + \cos \varphi \cdot \sin N;$$

folglich

$$\sin (\varphi + N) = \frac{\sin h}{\sin \delta} \cdot \cos N \quad \text{(III.)},$$

und

$$\varphi = (\varphi + N) - N.$$

N ist kleiner als 90°, wenn φ und δ gleichnamig und t spitz ist; hingegen ist $N > 90^\circ$, wenn φ und δ ungleichnamig und $t < 90^\circ$.

Ob $(\varphi + N) >< 90^\circ$ ist, muss aus der ungefähr bekannten Breite beurtheilt werden. Findet man aber $\varphi + N$ kleiner als N, so hat φ die entgegengesetzte Benennung, als bei der Bestimmung ob N spitz oder stumpf ist, angenommen wurde.

Wenn φ und δ gleichnamig, dabei $t > 90^\circ$, dann wird N negativ aber $< 90^\circ$, und $\varphi + N$ bleibt positiv, jedoch kleiner als 90°. Es ist dann ebenfalls $\varphi = (\varphi + N) - N$.

Denkt man sich vom Gestirn eine Normale auf den Meridian gefällt, so ist der Meridianbogen zwischen dieser Normale und dem oberen Pol der Bogen N. In letzterem Falle liegt dieser Bogen unter dem oberen Pol, in den beiden anderen Fällen über demselben.

§. 165.

Zu finden, welchen Einfluss ein Fehler in einem der gegebenen Theile auf die nach §. 164. berechnete Breite hat.

I. Will man untersuchen, welchen Einfluss ein Fehler im Stundenwinkel auf die berechnete Breite hat, so ist im sphärischen Dreieck zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn, wenn man die Poldistanz und Höhe constant annimmt, den Stundenwinkel und die Breite aber veränderlich setzt, nach §. 71. Differentialformel (II.)

$$db = -\frac{dt \cdot \sin b}{\operatorname{cotg} A},$$

oder

$$d\varphi = \frac{dt \cdot \cos \varphi}{\operatorname{cotg} A} = dt \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tang} A \quad \text{(IV.)},$$

worin dt einen kleinen Fehler im Stundenwinkel und $d\varphi$ den entsprechenden Fehler in der Breite, φ die Breite des Ortes und A das Azimuth des Gestirnes, vom Meridian des oberen Pols gerechnet, bezeichnet.

Der Fehler in der Breite ist entweder gleich- oder ungleichnamig mit dem Fehler im Stundenwinkel, je nachdem das Azimuth kleiner oder grösser als 90° ist.

Setzt man in (IV.) A veränderlich von 0 bis 180°, so ist

1. $d\varphi = 0$, wenn $A = 0$ oder $= 180°$,
2. $d\varphi$ am grössten, wenn $A = 90°$,
3. $d\varphi = dt$, wenn $\cos\varphi = \operatorname{cotg} A$,
4. $d\varphi < dt$, wenn $\operatorname{cotg} A > \cos\varphi$,
5. $d\varphi > dt$, wenn $\cos\varphi > \operatorname{cotg} A$.

Nimmt man φ von 0 bis 90° veränderlich, dt und A aber constant an, so ist

6. $d\varphi = 0$, wenn $\varphi = 90°$,
7. $d\varphi$ am grössten, wenn $\varphi = 0$ ist.

Hieraus folgt: der günstigste Augenblick zur Breitenbestimmung ist der, wenn der Himmelskörper sich im Meridian befindet; der ungünstigste Zeitpunkt hingegen wird der sein, wenn das Gestirn sich im ersten Vertical befindet; auch folgt daraus, dass auf hohen Breiten die Breitenbestimmung genauer als auf niederen wird.

Um die Grenzen zu finden, bei welchen ein Fehler von einer Minute im Stundenwinkel die Breite nicht mehr als 2' fehlerhaft giebt, ist nach

$$\text{(IV.)} \quad \ldots \operatorname{cotg} A = \frac{dt \cdot \cos\varphi}{d\varphi},$$

$$= \frac{15' \cdot \cos\varphi}{2'},$$

$$= 7{,}5 \cdot \cos\varphi \ldots\ldots \text{(a.)}.$$

Das sphärische Dreieck zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn liefert nach der sphärischen Trig. §. 27. Gleichung (VI.)

$$\operatorname{tang}\delta \cdot \cos\varphi = \sin t \cdot \operatorname{cotg} A + \sin\varphi \cdot \cos t.$$

Setzt man nun

$$\operatorname{cotg} A = m \cdot \sin x$$

und

$$\sin\varphi = m \cdot \cos x,$$

so ist

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{cotg} A}{\sin\varphi} = 7{,}5 \cdot \operatorname{cotg}\varphi \ldots\ldots \text{(b.)},$$

$$m = \frac{\sin\varphi}{\cos x},$$

$$\operatorname{tang}\delta \cdot \cos\varphi = m\,[\sin t \cdot \sin x + \cos t \cdot \cos x],$$

oder

$$\operatorname{tang}\delta \cdot \cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos x} \cdot \cos(t - x),$$

mithin

$$\cos(t - x) = \operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{cotg}\varphi \cdot \cos x \ldots\ldots \text{(c.)}.$$

Nach (b.) kann man x berechnen und mit + oder — bezeichnen, je nachdem $A < 90°$ oder $> 90°$ ist.

Nach (c.) kann man $(t - x)$ berechnen, worin δ negativ genommen werden muss, wenn φ und δ ungleiche Zeichen haben, in welchem Falle $(t - x) > 90°$ ist. Die algebraische Summe von $(t - x)$ und x giebt t. Die nautische Tafel XXVIII. enthält die gedachten Grenzen des Stundenwinkels, welche auf die angegebene Art berechnet sind.

II. Will man untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der Höhe auf die Breite hat, so ist im sphärischen Dreieck zwischen Pol, Zenith und Gestirn, wenn der Stundenwinkel und die Poldistanz constant, die Höhe und Breite aber veränderlich angenommen werden, nach §. 71. der Differentialformel (V.)

$$db = \frac{dz}{\cos A},$$

oder $d\varphi = \frac{dh}{\cos A} = dh \cdot \sec A$. (V.),

und der Fehler in der Breite ist gleich- oder ungleichartig mit dem Fehler in der Höhe, je nachdem das Azimuth kleiner oder grösser als 90° ist; der Fehler in der Höhe geht aber immer vergrössert in die Breite über.

Wenn in (V.) A von 0 bis 180° veränderlich angenommen wird, so ist:

1. $d\varphi$ am kleinsten und zwar $= dh$, wenn $A = 0$ oder $= 180°$,
2. $d\varphi$ am grössten, wenn $A = 90°$ ist.

Hiernach ist auch in Bezug auf die fehlerhafte Höhe der günstigste Augenblick zur Breitenbestimmung, wenn der Himmelskörper im Meridian ist. Der Fehler in der Breite aber ist am grössten, wenn das Gestirn sich im ersten Vertical befindet (also der ungünstigste Augenblick zur Breitenbestimmung).

III. Will man untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der Poldistanz auf die berechnete Breite hat, so ist, wenn man im sphärischen Dreieck zwischen Pol, Zenith und Gestirn den Stundenwinkel und die Höhe constant, die Poldistanz und Breite aber veränderlich annimmt, nach §. 71. der Differentialgleichung (VII.)

$$db = -\frac{dp \cdot \cos g}{\cos A}, \text{ oder}$$

$$d\varphi = \frac{dp \cdot \cos g}{\cos A} = dp \cdot \cos g \cdot \sec A \quad \text{. (VI.),}$$

worin dp den Fehler in der Poldistanz, $d\varphi$ den entsprechenden Fehler der Breite, A das Azimuth vom Meridian des oberen Pols und g den parallactischen Winkel bezeichnet. Es ist dp und $d\varphi$ gleichartig oder ungleichartig, je nachdem g und A gleichartig oder ungleichartig sind.

Wenn man in (VI.) g und A von 0 bis 180° veränderlich annimmt, so ist:

1. $d\varphi$ am kleinsten, wenn $g = 90°$,
2. $d\varphi = dp$, wenn das Gestirn im Meridian, also wenn $g = 0$ und $A = 180°$, oder wenn $g = 180°$ und $A = 0$ ist,
3. $d\varphi$ am grössten, wenn $A = 90°$ ist.

Da übrigens $\sin g = \cos \varphi \cdot \frac{\sin t}{\cos h}$ und $\sin A = \cos \delta \cdot \frac{\sin t}{\cos h}$ ist, so ist $\cos A >< \cos g$, je nachdem $\delta >< \varphi$ ist, woraus folgt, dass $d\varphi$ sowohl grösser wie auch kleiner als dp werden kann.

Es muss aber eines etwaigen Fehlers der Höhe und des Stundenwinkels wegen, das Azimuth entweder sehr stumpf oder sehr spitz sein, wenn man ein zuverlässiges Resultat erhalten will, und weil der parallactische Winkel dann immer, mit nur einigen Graden Abweichung, das Supplement des Azimuths ist und die Cosinusse sehr spitzer und sehr stumpfer Winkel nicht bedeutend differiren, so wird der Fehler in der Breite nie bedeutend grösser oder kleiner als derjenige der Poldistanz.

§. 165 a.

Regel. Nach Formel (I.) und (II.) (§. 164.) die Breite aus der Höhe eines Gestirnes zu bestimmen, das nicht weit vom oberen Meridian, aber nicht nahe am Zenith beobachtet ist, wenn man die wahre oder mittlere Zeit des Ortes und die ungefähre Länge desselben kennt.

1. Finde aus der beobachteten Höhe, oder aus dem Mittel der beobachteten Höhen (§. 119. bis §. 122.) die wahre Mittelpunktshöhe, nimm die Declination des Gestirnes für den Augenblick der Beobachtung (§. 103.)

und finde den Stundenwinkel des Gestirnes auf ganze Secunden genau (§. 134.).*)

2. Addire log sin Stundenwinkel, log sin Poldistanz und log cosec Zenithdistanz; die Summe ist log sin Azimuth vom Meridian des oberen Pols gerechnet, welches man in Zeitmaass ausgedrückt, aufsucht.

Das Azimuth ist stets stumpf, wenn die Poldistanz grösser als 90°; hingegen ist das Azimuth spitz, wenn die Poldistanz spitz und die Declination grösser als die Breite ist.

Wenn die Declination kleiner als die Breite und beide gleichnamig sind, so kann *A* zwar spitz oder stumpf sein; wenn jedoch die Beobachtung zur Breitenbestimmung tauglich sein soll, muss das Azimuth in diesem Falle immer stumpf sein.

3. Addire ferner log sin der halben Summe des Azimuth- und Stundenwinkels, log cosec der halben Differenz des Azimuth- und Stundenwinkels und log tang der halben Differenz der Pol- und Zenithdistanz; die Summe ist log cotg (45° plus der halben Breite); wenn man also den entsprechenden Bogen doppelt nimmt und davon 90° wegwirft, so hat man die Breite des Ortes.**)

Anmerkung. Die Zeit muss durch Beobachtung nach §. 138. oder §. 139., zugleich so nahe als möglich der Breitenbestimmung, ermittelt sein, und für veränderte Länge auf den Meridian des Ortes der Breitenbestimmung reducirt werden. Auch muss man, wenn der Gang der Uhr nicht sehr klein ist, die Zwischenzeit zwischen der Zeit- und Breitenbeobachtung nach §. 106. verbessern. Ist man im Besitz eines Chronometers und hat man keine Gelegenheit, Beobachtungen zur Zeitbestimmung zu machen, so kann man auch die Zeit des Ortes nach dem Chronometer, unter der Voraussetzung, dass Stand und Gang desselben und die Länge bekannt, finden.

Die Beobachtungen zur Breitenbestimmung müssen angestellt werden, wenn das Azimuth des Gestirnes möglichst gross oder möglichst klein ist, weil dann die Fehler in dem Stundenwinkel und der Höhe den möglichst kleinsten Einfluss auf das Resultat haben.

Je näher die Meridianhöhe dem Zenith kommt, desto stumpfer oder spitzer muss das Azimuth sein, wenn die Beobachtung gemacht wird.

Kommt das Gestirn dem Zenith sehr nahe, oder geht es durch dasselbe, wenn es culminirt, so lässt sich nach demselben keine Breitenbestimmung mit Zuverlässigkeit machen.

Beispiel 1. 1852 den 3. Juli nach dem Besteck auf 40° 36′ NBr. und 1° 50′ OL. von Greenwich sind nachstehende Höhen zur Bestimmung der Breite gemessen. Die Uhrcorrection war um 8^h Morgens $= - 0^h\, 46'\, 46''$ gegen mittlere Zeit gefunden; das Schiff hat bis zur Breitenbeobachtung seine Länge $27\frac{1}{2}'$ nach Osten verändert; der Gang der Uhr war ungefähr 0 gegen mittlere Zeit; Augeshöhe 11 Fuss Rheinl.; I. C. $= + 2'\, 36''$.

*) Es genügt, auf See die Höhe und Declination auf volle Minuten, oder, wenn man genauer verfahren will, auf zehntel Minuten zu nehmen. Am Lande, oder wenn man über dem künstlichen Horizonte beobachtet hat, kann man dagegen auf Secunden rechnen.

**) Hat man in der Rechnung φ nördlich statt südlich genommen oder umgekehrt, so erkennt man dieses daran, dass das vermeintliche $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$ dann $(45° - \frac{1}{2}\varphi)$ wird, und folglich mal 2 genommen, weniger als 90° beträgt. Die Breite ist dann $= 90° - 2\,(45° - \frac{1}{2}\varphi)$, aber mit entgegengesetzter Bezeichnung, als dieselbe in der Rechnung angenommen wurde.

Die Breitenbestimmung nach dieser Methode kann also nicht zweideutig werden, wenn nur die ungefähre Breite so genau bekannt ist, dass man weiss, ob das Azimuth vom Nord- oder Südmeridian spitz oder stumpf ist, welches man bei der Beobachtung übrigens schon nach dem Compasse ermitteln kann.

	$12^h\,39'\,31''$	☉̲	$72°\,19'\,0''$
	$40'\,15''$		$19'\,20''$
	$40'\,45''$		$19'\,50''$
	$41'\,22''$		$20'\,0''$
	$42'\,1''$		$20'\,40''$
	$12^h\,40'\,47''$	☉̲	$72°\,19'\,46''$
U.C. a. Orte d. Zeitbest.	$= -\ 46'\,46''$	I. C.	$= +\ 2'\,36''$
	$11^h\,54'\,1''$	Kimmt.	$= -\ 3'\,18''$
Veränd. OL. in Zeit .	$= +\ 0^h\,1'\,50''$		$72°\,19'\,4'' =$ ☉̲ scheinb. Höhe.
Mittl. Schiffsz.	$= 11^h\,55'\,51''$		
Zeitgleich.	$= -\ 3'\,53''$ a. m. Zt.		
Wahre Zeit	$= 11^h\,51'\,58''$	Rf.—Par.	$= -\ 0'\,16''$
	12^h	☉ Halbm.	$= +\ 15'\,45''$
Stundenwinkel	$= 0^h\,8'\,2''$.		$72°\,34'\,33'' =$ ☉ w. Höhe.
			$90°$
			$17°\,25'\,27'' =$ Zenithdist.

Mittl. Schiffsz. $= 11^h\,56'$ Morgens,
OL. in Zeit $= -\ 7'$
ungef. Greenw. mittl. Zeit $= 11^h\,49'$ Morgens,
oder $= 0^h\,11'$ vor d. Mittag d. 3. Juli.

☉ Decl. . . $= 22°\,57'\,1''$ N.
Zeitgl. . . . $= +\ 3'\,53'',3$ auf wahre Zeit.
$p = 67°\,2'\,59''$.

$$\sin A = \sin t \cdot \sin p \cdot \operatorname{cosec} z$$
$$\operatorname{cotg}(45° + \tfrac{1}{2}\varphi) = \sin \tfrac{1}{2}(A + t) \cdot \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(A - t) \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - z)$$

t Stundenwinkel	$= 0^h\,8'\,2''$	log sin	$= 8,54462$
p N. Poldist.	$= 67°\,2'\,59''$	log sin	$= 9,96418$
z Zenithdistanz	$= 17°\,25'\,27''$	log cosec	$= 0,52369$
A Azimuth	$=$ N. $11^h\,35'\,9''$ O. . .	log sin	$= 9,03249$
t	$= 0^h\,8'\,2''$		
$\frac{A+t}{2}$	$= 5^h\,51'\,35'',5$. . .	log sin	$= 9,99971$
$\frac{A-t}{2}$	$= 5^h\,43'\,33'',5$. . .	log cosec	$= 0,00111$
$\frac{p-z}{2}$	$= 24°\,48'\,46''$	log tang	$= 9,66495$
$45° + \frac{1}{2}\varphi$	$= 65°\,8',8$	log cotg	$= 9,66577$
	2		
NBr.	$= 40°\,17',6$.		

$$\operatorname{tang} N = \operatorname{cotg} \delta \cdot \cos t$$
$$\sin(\varphi + N) = \frac{\sin h}{\sin \delta} \cdot \cos N$$

$\delta = 22°\,57'\,1''$	log cotg $= 0,37320$		log cosec $= 0,40901$
$t = 0^h\,8'\,2''$	log cos $= 9,99973$	$h = 72°\,34'\,33''$	log sin $= 9,97960$
$N = 67°\,2',2$	log tang $= 0,37293$		log cos $= 9,59123$
$\varphi + N = 107°\,19',3$			log sin $= 9,97984$
NBr. $= 40°\,17',1$.			

Beispiel 2. Die Breite nach dem Besteck sei 0° 40′ N., die Declination der Sonne 21° 4′ S. und die wahre Höhe der Sonne 69° 9′, also die Zenithdistanz = 20° 51′, die wahre Zeit = 0^h 20′ 58″ Nachmittags; man soll die Breite finden.

$t =$	0^h 20′ 58″	 log sin	= 8,96074
$p =$	111° 4′	 log sin	= 9,96996
$z =$	20° 51′	 log cosec	= 0,44864
$A =$	N. 11^h 4′ 34″ W.	 log sin	= 9,37934
$t =$	0^h 20′ 58″		
$\frac{A+t}{2} =$	5^h 42′ 46″	 log sin	= 9,99877
$\frac{A-t}{2} =$	5^h 21′ 48″	 log cosec	= 0,00606
$\frac{p-z}{2} =$	45° 6′,5	 log tang	= 0,00164
$45° + \frac{1}{2}\varphi =$	44° 34′,4	 log cotg	= 0,00647
	2		
	89° 8′,8		
	90°		
$\varphi =$	0° 51′,2 Süd,		

denn 44° 34′,4 ist nicht $45° + \frac{1}{2}\varphi$, sondern $45° - \frac{1}{2}\varphi$, weil das Doppelte von jenem kleiner als 90° wird. Nimmt man aber bei Lösung dieser Aufgabe SBr. an, so findet man auch $45° + \frac{1}{2}\varphi$ = 45° 25′,6, also φ = 0° 51′,2 Süd.

Lösung derselben Aufgabe nach Formel (III.).

$\delta =$ 21° 4′ S.	log cotg = 0,41431		log cosec	= 0,44436
$t =$ 0^h 20′ 58″	log cos = 9,99818	h = 69° 9′	log sin	= 9,97059
$N =$ 111° 8′,9	log tang = 0,41249		log cos	= 9,55722
$N + \varphi =$ 110° 17′,5			log sin	= 9,97217
$\varphi =$ 0° 51′,4 Süd.				

Beispiel 3. 1844 den 4. October nach dem Besteck auf 36° 48′ NBr. und 9° 50′ WL. von Greenwich sind nachstehende Höhen der Venus gemessen, um darnach die Breite zu bestimmen. Die Uhrcorrection war kurz vorher nach beobachteten ⊙ Höhen — 1^h 10′ 8″ gegen mittl. Zeit gefunden; Augeshöhe 15 Fuss Rheinl.; I. C. = + 0′ 28″.

Morgens	8^h 55′ 10″	♀	60° 54′ 40″
	55 29		56 20
	55 49		59 10
	56 5		61 1 10
	56 30		4 20
	56 51		7 10
	57 8		8 50
	8^h 56′ 9″	♀	61° 1′ 40″
U.C. =	-1^h 10′ 8″	I. C. = +	0′ 28″
m. ast. Z. d. 3. =	19^h 46′ 1″	Kmt. = —	3′ 51″
		♀ scheinb. H. =	60° 58′ 17″
		Refr. — Par. = —	0′ 26″
		♀ wahre H. =	60° 57′ 51″
		♀ Z. Distanz =	29° 2′ 9″.

Mittl. Schiffsz = 19^h 46′ d. $\frac{3}{10}$.
WL. in Zeit = 0^h 39′
Mittl. Grw. Zt. = 20^h 25′ d. $\frac{3}{10}$.

m. ⊙ AR. = 12^h 52′ 30″.

♀ AR. = 9^h 47′ 35″,3.
♀ δ = 12° 9′ 10″ N.
90°
p = 77° 50′ 50″.

♀ Horizontal-Parall. = 12″.

Mittl. Zeit den 3ten =	$19^h\,46'\,1''$		
m. ☉ AR. =	$12^h\,52'\,30''$		
✻ Zeit =	$8^h\,38'\,31''$		
♀ AR. =	$9^h\,47'\,35''$		
♀ Stundenw. Ost v. Merid. t =	$1^h\,9'\,4''$	log sin	= 9,47249
♀ N. P. Dist. p =	$77^\circ\,50',8$	log sin	= 9,99016
♀ Zenithdistanz z =	$29^\circ\,2',1$	log cosec	= 0,31395
♀ Azimuth A =	N. $9^h\,33'\,8''$ Ost.	log sin	= 9 77660
Stundenwinkel t =	$1^h\,9'\,4''$		
$\frac{A+t}{2}$ =	$5^h\,21'\,6''$	log sin	= 9,99371
$\frac{A-t}{2}$ =	$4^h\,12'\,2''$	log cosec	= 0,05009
$\frac{p-z}{2}$ =	$24^\circ\,24',3$	log tg	= 9,65679
$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ =	$63^\circ\,21'$	log cotg	= 9,70059
	2		
φ =	$36^\circ\,42'$ Nord.		

Beispiel 4. 1852 den 4. Juli nach dem Besteck auf 41° 17′ NBr. und 0° 11′ WL von Grw. sind nachstehende Höhen des Polarsterns zur Bestimmung der Breite beobachtet; Augeshöhe 14 Fuss Rheinl.; U. C. = — 43′ 31″ gegen mittl. Zeit; I. C. = + 1′.

Morgens $3^h\,15'\,48''$	Polar ✻	$42^\circ\,20',2$
16 39		18,0
17 46		17,7
18 52		18,5
19 39		21,8
$3^h\,17'\,45''$		$42^\circ\,19',2$

U. C. gegen mittl. Zeit = — $43'\,31''$	I. C. = + 1′ } — 2′,7	
Mittl. Schiffsz. d. 3. Juli = $14^h\,34'\,14''$	Kimmt. = — 3′,7 }	
m. ☉ AR. = $6^h\,49'\,2''$		$42^\circ\,16',5$ = ✻ sch. H.
✻ Zeit = $21^h\,23'\,16''$	Refr. = — 1′,1	
✻ AR. = $1^h\,5'\,39''$		$42^\circ\,15',4$ = ✻ w. H.
Polar ✻ Stundenw. = $3^h\,42'\,23''$ Ost v. Mer.		90°
		✻ Z. Dist. = $47^\circ\,44',6$.

Mittl. Schiffsz. =	$14^h\,34'$ d. 3. Juli.
WL. in Zeit =	+ 1′
Mittl. Grw. Zeit =	$14^h\,35'$ d. 3. Juli.

mittl. ☉ AR. =	$6^h\,49'\,2''$
✻ AR. =	$1^h\,5'\,39''$
✻ δ =	$88^\circ\,30'\,57''$ N.
	90°
p =	$1^\circ\,29'\,3''$.

$t =$	$3^h\, 42'\, 23''$	log sin	$= 9{,}91649$
$p =$	$1^\circ\, 29'\, 3''$	log sin	$= 8{,}41331$
$z =$	$47^\circ\, 44'\, 36''$	log cosec	$= 0{,}13069$
$A =$	N. $0^h\, 6'\, 36''$ O. . .	log sin	$= 8{,}46049$
$t =$	$3^h\, 42'\, 23''$		
$\frac{A+t}{2} =$	$1^h\, 54'\, 29'',5$. . .	log sin	$= 9{,}68037$
$\frac{A-t}{2} =$	$-\ 1^h\, 47'\, 53''.5$. . .	log cosec	$= 0{,}34336\, n$
$\frac{p-z}{2} =$	$-\ 23^\circ\, 7'.8$	log tg	$= 9{,}63054\, n$
$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi =$	$65^\circ\, 43',2$	log cotg	$= 9{,}65427$
	2		
$\varphi =$	$41^\circ\, 26',4$ Nord.		

Anmerk. Zur Ermittelung der Breite aus der Höhe des Polarsterns giebt es einen bedeutend kürzeren Weg, wie später gezeigt werden soll.

Beispiel 5. 1872 den 12. Juni n. d. B. auf 71° 40′ NBr. und 24° 20′ OL. v. Grw. ist Abends $6^h\, 46'$ w. Z. die Beobachtungsuhr 7′ 15″ hinter wahrer Zeit gefunden, die Uhr gewinnt stündlich 8″, darauf nahe 5 Stunden noch gesegelt und verändert in Breite 0° 8′ N., in Länge 1° 13′ Ost, dann in 18 Fuss Rheinl. Augeshöhe, I. C. — 2′ 15″, beobachtet nach derselben Uhr um

	$11^h\, 15'\, 36''$	$\underline{\odot}$	$5^\circ\, 13'\, 15''$
	16 37		12 0
	17 36		11 30
	18 27		10 45
	$11^h\, 17'\, 4''$	$\underline{\odot}$	$5^\circ\, 11'\, 53''$
U.C.g.···.Z.	$+\ 7'\, 15''$	I.C.	$-\ 2'\, 15''$
	$11^h\, 24'\, 19''$		$5^\circ\, 9'\, 38''$
L.U. in Zeit	$+\ 4'\, 52''$	Kimmt. . .	$-\ 4'\, 13''$
	$11^h\, 29'\, 11''$		$5^\circ\, 5'\, 25''$
Corr. f. G.	$-\ 0'\, 38''$	Refr.—Par.	$-\ 9'\, 27''$
w.Ortsz. =	$11^h\, 28'\, 33''$		$4^\circ\, 55'\, 58''$
		$\odot$ Halbm. . . .	$+\ 15'\, 47''$
		$h =$	$5^\circ\, 11'\, 45''$.

Zur Zeit der Beobachtung ist die Breite 71° 48′ N. und Länge 25° 33′ O.

W. Ortsz.	$11^h\, 29'$ Ab. d. $\frac{12}{6}$
OL. in Zeit —	$1^h\, 42'$
w. Grw. Zeit	$9^h\, 47'$ Ab. d. $\frac{12}{6}$;

dieser entspricht

$\odot\ \delta = 23^\circ\, 13'\, 21''$ N.

$$\left.\begin{aligned} \text{tang}\, N &= \text{cotg}\, \delta \cdot \cos t \\ \sin(\varphi + N) &= \sin h \cdot \text{cosec}\, \delta \cdot \cos N \end{aligned}\right\}\ \text{(III.) §. 164.}$$

$\delta = 23^\circ\, 13'\, 21''$	log cotg $= 0{,}36748$	log cosec	$= 0{,}40417$
$t = 11^h\, 28'\, 33''$	log cos $= 9{,}99590n$ $\ h = 5^\circ\, 11'\, 45''$	log sin	$= 8{,}95694$
$N = -\ 66^\circ\, 34',9$	log tang $= 0{,}36338n$	log cos	$= 9{,}59927$
$\varphi + N = 5^\circ\, 14',2$	. .	log sin	$= 8{,}96038$
$\varphi = 71^\circ\, 49',1$ N.			

§. 166.

Die Breite des Ortes aus der Höhe eines Himmelskörpers näherungsweise zu bestimmen, wenn man die Zeit, die ungefähre Breite und Länge des Ortes kennt und die Höhe nahe am Meridian, jedoch nicht nahe am Zenith beobachtet ist.

Es bezeichne φ die geographische Breite, b das Complement derselben, δ die Declination, p die Poldistanz, t den Stundenwinkel vom oberen Meridian nach Osten und Westen gerechnet, h die wahre Höhe, z das Complement derselben, H die aus h, φ, δ und t abgeleitete Meridianhöhe (unter der Voraussetzung, dass δ sich nicht verändert), Z sei das Complement der Meridianhöhe (Meridian-Zenithdistanz), also gleich der Breite $\mp$ der Declination, worin das obere Zeichen bei gleichnamiger und das untere bei ungleichnamiger Breite und Declination gilt.

Im sphärischen Dreieck zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn ist nach §. 19. der sphärischen Trigonometrie

$$\cos z = \cos b \cdot \cos p + \sin b \cdot \sin p \cdot \cos t,$$

oder $$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t,$$

und wenn man für $\cos t$ den gleichen Werth $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} t$ setzt, so ergiebt sich

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta,$$

also ist

$$\sin h + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta = \cos (\varphi \mp \delta) = \cos Z = \sin H \quad . \text{ (I.)}.$$

Da man die Breite nur ungefähr kennt, setze man diese Breite $= \varphi_{\text{I}} = \varphi \pm d\varphi$ in (I.), so erhält man

$$\sin h + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi_{\text{I}} \cdot \cos \delta = \cos Z_{\text{I}} = \sin H_{\text{I}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (II.)},$$

worin Z_{I} und H_{I} die mit der ungefähren Breite φ_{I} berechnete Meridian-Zenithdistanz und Meridianhöhe bezeichnen.

Wenn man noch die aus Z_{I} und δ abgeleitete genäherte Breite mit φ_{II} bezeichnet, so ist $\varphi_{\text{II}} = Z_{\text{I}} \pm \delta$, worin das obere Zeichen gilt, wenn Z_{I} und δ gleichnamig, das untere, wenn beide ungleichnamig sind.

Um zu untersuchen, unter welchen Umständen φ_{II} eine genäherte Breite wird, sei $d\varphi$ der Fehler in der Breite, dZ der entsprechende Fehler in der Meridian-Zenithdistanz und man differentiire (I.) indem φ und Z variabel gesetzt werden, so ergiebt sich nach den Differentialformeln in §. 69. und §. 62.

$$dZ = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t \,.\, \cos \delta \cdot \sin \varphi}{\sin Z} \, d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (III.)}.$$

Da $Z \pm \delta = \varphi$ (worin das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem Z und δ gleichnamig oder ungleichnamig sind), so ist der Fehler in der angenommenen oder ungefähren Breite φ_{I} stets gleichnamig mit dem Fehler in der berechneten Breite, ausgenommen wenn die Breite kleiner als die Declination ist und beide gleichnamig sind.

Es ist aber $dZ < d\varphi$, wenn $\dfrac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi}{\sin Z} < 1$ ist. In diesem Falle differirt auch φ_{II} weniger mit φ, als mit φ_{I}, wenn man nämlich nach (II.) Z_{I} und φ_{II} berechnet hat, und die gedachte Methode ist dann eine Näherungsmethode. Wenn man daher die Rechnung wiederholt, indem immer die zuletzt berechnete Breite als die ungefähre Breite φ_{I} angenommen wird, und zwar so lange, bis die zuletzt berechnete Breite mit der dabei als ungefähr angenommenen Breite übereinstimmt, so muss diese die richtige Breite sein.

Es ergiebt sich ferner aus dem nachstehend Gesagten, dass, je nachdem die ungefähre Breite $\varphi_I >\!<$ als φ ist, die genäherte Breite $\varphi_{II} <\!>$ als φ_I, aber $>\!<$ als φ werden muss, wenn nicht die Breite kleiner als die Declination ist und beide gleichnamig sind, in welchem Falle das Entgegengesetzte in Bezug auf die richtige Breite φ stattfindet, also eine zu kleine ungefähre Breite eine zu grosse berechnete Breite, und eine zu grosse ungefähre eine zu kleine berechnete Breite giebt; eine Annäherung an φ muss jedoch auch hier stattfinden, wenn nur $\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi}{\sin Z} < 1$ ist; im entgegengesetzten Falle aber entfernen sich die berechneten Breiten immer mehr von der richtigen Breite.

Um die Grenzen bestimmen zu können, innerhalb welcher die Breitenbestimmung nach dieser Methode anzuwenden ist oder eine Annäherung gewährt, setze man

$$1 = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi}{\sin Z} = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{cosec} (\varphi - \delta),$$

worin φ und δ, wenn ungleichnamig, als entgegengesetzte Grössen zu betrachten sind.

Es ist dieser Annahme nach

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{1}{\cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{cosec} (\varphi - \delta)} = \sec \delta \cdot \operatorname{cosec} \varphi \cdot \sin (\varphi - \delta) \quad \text{(IV.)},$$

nach welcher Formel $2 \sin^2 \frac{1}{2} t$, mithin auch t gefunden werden kann, zu welchem Behuf die nautische Tafel XXXIX., welche log $(2 \sin^2 \frac{1}{2} t)$ enthält und zum Argument t hat, eine Erleichterung gewährt.

Wenngleich sich durch Wiederholung der Rechnung ergiebt, ob die obige Methode anzuwenden ist, in welchem Falle die Differenzen zwischen der ungefähren und zuerst berechneten Breite, und zwischen dieser und der demnächst berechneten Breite u. s. w. immer kleiner werden, so wird es doch erwünscht sein, wenn man, bevor die Beobachtung gemacht wird, weiss, ob die Methode überhaupt eine Annäherung gewährt. Zu diesem Behuf sind in nachstehender Tafel für verschiedene gleichnamige Breiten und Declinationen die Stundenwinkel vom oberen Meridian angegeben, bei welchen keine Annäherung nach dieser Methode mehr stattfindet. Es ist natürlich nicht genügend, wenn man diese Grenzen nicht überschreitet, sondern man muss die Beobachtungen möglichst entfernt von denselben anstellen, d. h. der Stundenwinkel muss bedeutend kleiner sein, als der in der Tafel angegebene.

Für ungleichnamige Breiten und Declinationen sind in der gedachten Tafel keine Grenzen enthalten; es wird daher in dieser Beziehung nur bemerkt, dass die Grenzen für diese Fälle ausgedehnter sind, als wenn Breite und Declination dieselbe Grösse haben, aber gleichnamig sind, denn es wird nach (IV.) $2 \sin^2 \frac{1}{2} t$, mithin auch t grösser, wenn $\sin (\varphi - \delta)$ grösser wird, welches übrigens bei denselben, aber ungleichnamigen Werthen von φ und δ, der Fall ist.

Stundenwinkel, bei welchen keine Annäherung mehr statt hat.	Breite. ±	Decl. ±	Stundenwinkel, bei welchen keine Annäherung mehr statt hat.	Breite. ±	Decl. ±	Stundenwinkel, bei welchen keine Annäherung mehr statt hat.	Breite. ±	Decl. ±
6^h $0'$	0°	0°	5^h $31'$	8°	1°	0^h $0'$	20°	20°
0 0	1	1	0 0	8	8	2 36	20	24
6 0	1	2	4 3	8	12	1 42	22	20
0 0	2	2	6 9	8	16	0 0	22	22
4 0	2	3	5 34	9	1	2 28	22	24
6 0	2	4	0 0	9	9	1 39	24	22
0 0	3	3	4 48	9	15	0 0	24	24
3 13	3	4	6 11	9	18	1 36	26	24
4 42	3	5	5 37	10	1	0 0	26	26
6 1	3	6	0 0	10	10	2 12	28	24
0 0	4	4	4 32	10	16	2 38	30	24
2 46	4	5	6 14	10	20	2 58	32	24
4 0	4	6	5 22	12	2	3 14	34	24
5 3	4	7	0 0	12	12	3 28	36	24
6 2	4	8	4 7	12	18	3 41	38	24
0 0	5	5	6 21	12	24	3 51	40	24
2 28	5	6	5 27	14	2	4 1	42	24
6 3	5	10	0 0	14	14	4 10	44	24
0 0	6	6	5 10	14	24	4 18	46	24
2 14	6	7	5 32	16	2	4 25	48	24
4 1	6	9	0 0	16	16	4 32	50	24
6 5	6	12	4 13	16	24	4 38	52	24
5 27	7	1	1 52	18	16	4 44	54	24
0 0	7	7	0 0	18	18	4 50	56	24
3 42	7	10	3 23	18	24	4 55	58	24
6 7	7	14	1 47	20	18	5 0	60	24

§. 167.

Vom Einfluss eines Fehlers in einem der gegebenen Theile auf die nach §. 166. zu berechnende Breite.

1. Was den Einfluss eines Fehlers in der ungefähren Breite auf die genäherte Breite betrifft, so ist schon in (III.) gefunden

$$dZ = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi}{\sin Z} \cdot d\varphi,$$

und da der Fehler in der genäherten Breite $d\varphi_1$ immer gleich gross mit dem Fehler in dem Complemente der genäherten Meridianhöhe sein muss, so ist

$$d\varphi_1 = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi}{\sin Z_1} \cdot d\varphi \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(V.),$$

worin $d\varphi$ den Fehler in der ungefähren Breite bezeichnet, und $d\varphi_1$ gleich dem entsprechenden Fehler in der genäherten Breite ist, welcher stets mit dem Fehler in der ungefähren Breite gleichnamig, wenn nicht die Breite und Declination gleichnamig und letztere grösser als erstere ist.

Setzt man in (V.) t von 0 bis 12^h veränderlich, so ist dZ, mithin auch $d\varphi_1$ am kleinsten, wenn $t = 0$; mit t aber zunehmend und am grössten, wenn $t = 12^h$ ist.

2. Will man untersuchen, welchen Einfluss ein Fehler in dem Stundenwinkel auf die berechnete Breite hat, so differentiire man (I.) in §. 166., indem man $\frac{1}{2}t$ und $\cos Z$ variabel setzt; dann ergiebt sich nach den Differentialformeln in §. 68. und §. 62.

$$dZ = d\varphi = -(2\sin\tfrac{1}{2}t \cdot \cos\tfrac{1}{2}t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta + 2\sin\tfrac{1}{2}t \cdot \cos\tfrac{1}{2}t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta)\frac{d\tfrac{1}{2}t}{\sin Z},$$

$$= -(2\sin\tfrac{1}{2}t \cdot \cos\tfrac{1}{2}t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta)\frac{2 \cdot d\tfrac{1}{2}t}{\sin Z},$$

$$= -\frac{\sin t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin Z} \cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI.)},$$

und der Fehler in der Breite ist mithin stets entgegengesetzt dem Fehler im Stundenwinkel, ausgenommen, wenn die Breite kleiner als die Declination ist und beide gleichnamig sind.

Wird in (VI.) t von 0 bis 6^h veränderlich gesetzt, so ist dZ und folglich auch $d\varphi$ am kleinsten, und zwar $= 0$, wenn $t = 0$; mit t aber zunehmend und am grössten, wenn $t = 6^h$ ist, woraus sich ergiebt, dass es am besten ist, diese Beobachtung bei möglichst kleinem Stundenwinkel des Gestirns zu machen.

Um die Grenzen des Stundenwinkels zu finden, bei welchem ein Fehler von einer Minute in demselben die Breite nicht über 2' fehlerhaft giebt, setze man in (VI.) $dt = 15'$ in Bogen, gleich 1' in Zeit und $d\varphi = 2'$, so ist

$$\sin t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \operatorname{cosec} Z \cdot 15' = 2',$$

oder $\sin t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \operatorname{cosec} Z \cdot 7',5 = 1'$,

mithin $\sin t = \sec\varphi \cdot \sec\delta \cdot \sin Z \cdot 0{,}133333.$

Nach dieser Formel kann t bequemer als nach den in §. 165. abgeleiteten Formeln (b) und (c) berechnet werden. Die gedachten Grenzen des Stundenwinkels t sind übrigens in der nautischen Taf. XXVIII. enthalten.

3. Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein Fehler in der Höhe auf die berechnete Breite hat, differentiire man (I.) in §. 166., indem h und Z veränderlich gesetzt werden, so ergiebt sich nach den Differentialformeln in den §§. 68. 69. und 62.

$$dZ = d\varphi = -\frac{\cos h}{\sin Z} \cdot dh \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII.)},$$

und der Fehler in der Breite hat immer entgegengesetzte Benennung mit dem Fehler in der Höhe (h), ausgenommen, wenn die Breite kleiner als die Declination ist und beide gleichnamig sind. Da übrigens $\cos h$ immer grösser als $\sin Z$ ist, so muss der Fehler in der Breite stets grösser als der in der Höhe (h) werden.

Aus den Gleichungen (V.), (VI.) und (VII.) folgt:

1. Dass der Fehler in der Breite zunimmt, wenn die Meridian-Zenithdistanz abnimmt, und zwar, dass der Fehler sehr gross wird, wenn die Meridian-Zenithdistanz sehr klein ist, woraus hervorgeht, dass das Gestirn, welches man zu Beobachtungen zur Breitenbestimmung benutzen will, dem Zenith nicht nahe culminiren muss.

Aus (V.) und (VI.) ergiebt sich noch:

2. Dass der Fehler in der berechneten Breite bedeutender wird, wenn Meridian-Zenithdistanz und Declination des Gestirnes abnehmen.

§. 168.

Regel. Die Breite nach der in §. 166. gegebenen Näherungsmethode zu finden, der Stundenwinkel mag vom oberen oder unteren Meridian gezählt sein.

1. Die gemessene Höhe des Himmelskörpers oder, wenn mehrere gemessen sind, das Mittel derselben, wird zur wahren Mittelpunktshöhe reducirt (§. 119. bis incl. §. 122.), die Declination für den Augenblick der Beobachtung (§. 103.) und der Stundenwinkel vom oberen Meridian für die gegebene Zeit gesucht (§. 134.).

2. Addire log Stundenwinkel (nautische Taufel XXXIX.), log cos Breite — 10 und log cos Declination — 10; für die Summe dieser Logarithmen suche die Zahl und addire dieselbe zum fünfstelligen natural sinus der wahren Höhe, so ist diese Summe der natural cosinus der Meridian-Zenithdistanz.

3. Gieb der Meridian-Zenithdistanz den entgegengesetzten Namen des Meridians, in welchem das Gestirn culminirt, und nimm die Summe oder die Differenz zwischen der Meridian-Zenithdistanz und Declination, je nachdem beide gleichnamig oder ungleichnamig sind, so ergiebt sich die genäherte Breite, welche immer gleichnamig mit den gleichnamigen Grössen oder mit der grössten von den ungleichnamigen Grössen ist (§. 157.).

4. Weicht diese genäherte Breite mehr als 3 bis 4 Minuten von der in Rechnung genommenen ab, so muss, wenn der Stundenwinkel gross und besonders wenn die Meridian-Zenithdistanz klein ist, die Rechnung wiederholt werden, wobei die genäherte Breite benutzt wird, welches Verfahren so lange zu wiederholen ist, bis die zuletzt gefundene Breite entweder mit der zuletzt in Rechnung genommenen Breite genau übereinstimmt, oder doch nicht mehr als 3 bis 4 Minuten mit derselben differirt.

Anmerkung. Ist der Stundenwinkel vom oberen Meridian gezählt, so gross, dass man denselben vom unteren Meridian nehmen muss, da die nautische Tafel XXXIX. nur die Logarithmen des Stundenwinkels bis $7^h\,59'\,55''$ enthält, so subtrahirt man die oben nach 2 gefundene Zahl von dem natural sinus der wahren Höhe; der Rest ist der natural sinus der unteren Meridianhöhe. Die Breite ist dann gleich der unteren Meridianhöhe plus der Poldistanz und immer gleichnamig mit der Declination des Gestirnes. Denn bezeichnet t' den Stundenwinkel des Gestirnes, vom unteren Meridian ostwärts und westwärts gezählt, h_u die untere Meridianhöhe desselben, so giebt das sphärische Dreieck zwischen Pol, Zenith und Gestirn, mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen (§. 166.), die Gleichung

$$\sin h = \sin\varphi\cdot\sin\delta - \cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos t',$$

oder

$$\sin h = \sin\varphi\cdot\sin\delta - \cos\varphi\cdot\cos\delta + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta,$$

woraus folgt

$$-\cos(\varphi+\delta) = \sin h - 2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta,$$

oder weil, wie man leicht findet,

$-\cos(\varphi+\delta) = \sin h_u$, so auch

$$\sin h_u = \sin h - 2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VIII.)},$$

welche Gleichung nachzuweisen war.

Beispiel 1. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 1 (§. 165a.) man soll die Breite nach der Näherungsmethode finden.

$\cos Z_{\text{I}} = \sin h + 2\sin^2\frac{1}{2}t\cdot\cos\varphi_{\text{I}}\cdot\cos\delta$ [(II.) §. 166.]

$t =$ $0^h\ 8'\ 2''$ log Stundenwinkel = 1,78834
$\varphi_{\text{I}} = +40^\circ\ 36'$ log cos = 9,88040 — 10
$\delta = +22^\circ\ 57'$ log cos = 9,96419 — 10
Zahl = + 43 log . . = 1,63293
h . . ⊙ w. H. = $72^\circ\ 34',5$ $n\sin$ = 95411
Z_{I} . M. Z. D. = $17^\circ\ 20',5$ N. $n\cos$ = 95454
δ . . Decl. . . = $22^\circ\ 57',0$ N.
φ_{II} = $40^\circ\ 17',5$ Nord.

Wiederholung.

$t =$ $0^h\ 8'\ 2''$ log Stundenwinkel = 1,78834
$\varphi_{\text{II}} = +40^\circ\ 17',5$ log cos = 9,88239 — 10
$\delta = +22^\circ\ 57'$ log cos = 9,96419 — 10
Zahl = + 43 log . . = 1,63492
$n\sin$ wahre Höhe = 95411
M. Z. D. . . . = $17^\circ\ 20',5$ N. $n\cos$ = 95454
Decl. = $22^\circ\ 57',0$ N.
φ = $40^\circ\ 17',5$ Nord.

Beispiel 2. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 2 (§. 165 a.), man soll nach der Näherungsmethode die Breite finden.

$t =$ $0^h\ 20'\ 58''$ log Stundenwinkel = 2,62136
$\varphi_{\text{I}} = +\ 0^\circ\ 40'$ log cos = 9,99997 — 10
$\delta = -21^\circ\ 4'$ log cos = 9,96996 — 10
Zahl = + 390 log . . = 2,59129
$h = 69^\circ\ 9'$ $n\sin$. . = 93452
$Z_{\text{I}} = 20^\circ\ 12',7$ N. $n\cos$ = 93842
$\delta = 21^\circ\ 4'$ S.
$\varphi_{\text{II}} = 0^\circ\ 51',3$ Süd.

Die Wiederholung giebt hier dasselbe.

Beispiel 3. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 3 (§. 165 a.), die Breite jedoch $35^\circ\ 48'$ Nord angenommen; man soll nach der Näherungsmethode die Breite finden.

$t =$ $1^h\ 9'\ 4''$ log Stundenwinkel = 3,65386
$\varphi_{\text{I}} = +35^\circ\ 48'$ log cos = 9,90906 — 10
$\delta = +12^\circ\ 9',2$ log cos = 9,99015 — 10
Zahl = 3573 log . . . = 3,55307
$h = 60^\circ\ 57',9$ $n\sin$. = 87432
$Z_{\text{I}} = 24^\circ\ 29',2$ N. $n\cos$ = 91005
$\delta = 12^\circ\ 9',2$ N.
$\varphi_{\text{II}} = 36^\circ\ 38',4$ Nord.

Wiederholung.

log Stundenwinkel . . . = 3,65386
log cos Declination . . . = 9,99015 — 10
φ_{II} . + $36^\circ\ 38'$ log cos = 9,90443 — 10
Zahl = 3535 . . . log = 3,54844
$n\sin h$. . . = 87432
$n\cos(\varphi-\delta)$ = 90967
$\varphi-\delta$. . . = $24^\circ\ 32',4$ N.
δ = $12^\circ\ 9',2$ N.
φ = $36^\circ\ 41',6$ Nord.

Beispiel 4. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 5. (§. 165 a.); man soll nach der Näherungsmethode die Breite finden.

$$\sin h_u = \sin h - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta.$$

t' vom unteren Merid.	$= 0^h\ 31'\ 27''$	log Stundenw.	$= 2{,}97313$
☉ δ	$= +23^\circ\ 13'\ 21''$	log cos	$= 9{,}96331 - 10$
φ_I	$= +71^\circ\ 48'$	log cos	$= 9{,}49462 - 10$
Zahl	$= -\ 270$	log	$= 2{,}43106$
h . . ☉ wahre Höhe	$= 5^\circ\ 11'\ 45''$	n sin	$= 09056$
h_u . . untere Merid.-H.	$= 5^\circ\ 2'{,}4$	n sin	$= 08786$
☉ p	$= 66^\circ\ 46'{,}7$ N.		
φ_{II}	$= 71^\circ\ 49'{,}1$ Nord.		

§. 169.

Die Breite aus Höhen eines Gestirns zu bestimmen, welche innerhalb 15 Minuten vor oder nach der oberen oder unteren Culmination beobachtet sind, wenn man die Zeit der Beobachtung, sowie die ungefähre Breite und Länge des Ortes kennt.

Im sphärischen Dreieck zwischen dem oberen Pol, Zenith und Gestirn hat man

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cos t,$$

woraus nach §. 166. sich ergiebt

$$\sin h + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta = \cos (\varphi - \delta) = \cos Z = \sin H \quad \text{(I.)},$$

worin h die wahre Höhe, t den Stundenwinkel vom oberen Meridian gezählt, φ die ungefähre Breite des Ortes, δ die für den Augenblick der Beobachtung reducirte Declination des Gestirns, H die nach h, t, φ und δ auf den Meridian reducirte Höhe (Meridianhöhe) und Z das Complement derselben (die Meridian-Zenithdistanz) bezeichnet.

Aus (I.) ergiebt sich

$$\sin H - \sin h = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta,$$

oder $2 \cos \dfrac{H+h}{2} \cdot \sin \dfrac{H-h}{2} = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta$,

$$\text{oder } \sin \frac{H-h}{2} = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\cos \dfrac{H+h}{2}} \quad \text{(II.)}.$$

Weil der Annahme nach $t < 15$ Minuten in Zeit, also H nur wenig grösser als h ist, kann man ohne erheblichen Fehler $\cos \dfrac{H+h}{2} = \cos H = \sin Z = \sin (\varphi - \delta)$ und $\sin \dfrac{H-h}{2}$ dem Bogen proportional setzen. Es ergiebt sich demnach aus (II.), wenn man $\dfrac{H-h}{2}$ in Secunden ausgedrückt, mit $\dfrac{C}{2}$ bezeichnet,

$$\frac{C}{2} \cdot \sin 1'' = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \quad \text{(III.)}.$$

Es sei $t = n' = n \cdot 1'$ in Zeit $= n \cdot 900''$ (Bogensecunden), so ist, wenn auch $\sin^2 \frac{1}{2} t$ dem Bogen proportional gesetzt wird,

$$\frac{C}{2} \cdot \sin 1'' = \frac{\frac{1}{4}(n \cdot 900'')^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)},$$

oder

$$\frac{C}{2} = \frac{n^2 \cdot 450^2 \cdot \sin 1'' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)},$$

folgl.

$$C = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot 2\, n^2 \cdot 450^2 \cdot \sin 1'' = \frac{1'',9635\,^{*)} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot n^2 \quad \text{(IV.)},$$

worin C in Bogensecunden ausgedrückt ist, welche zur Höhe h zu addiren sind, um die obere Meridianhöhe H zu erhalten.

Setzt man ferner $n = 1'$ in Zeit, so ist

$$C = 1'',9635 \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \quad \text{(V.)},$$

worin C den Höhenunterschied in Bogensecunden zwischen der oberen Meridianhöhe und der wahren Höhe, deren Stundenwinkel, vom oberen Meridian gezählt, = 1 Zeitminute ist, bezeichnet, welche Secunden man Culminationssecunden nennt, die, wie (IV.) ergiebt, nur mit dem Quadrate der Zeitminuten des Stundenwinkels zu multipliciren sind, um die Anzahl Bogensecunden zu erhalten, welche, zur wahren Höhe h addirt, die obere Meridianhöhe H geben.

Aus der Meridianhöhe findet man dann nach §. 157. die Breite, welche eigentlich, weil die Breite nur ungefähr bekannt war, eine genäherte Breite ist; es ist jedoch, weil der Stundenwinkel nie grösser als 15 Minuten sein soll, eine Wiederholung der Rechnung nie nöthig (§. 167.).

Zur Erleichterung der Rechnung sind die oberen Culminationssecunden, oder $1'',9635 \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)}$ in der nautischen Tafel XXIX. für die Breite bis 80° und Declination bis 24° für gleichnamige Breite und Declination, wie auch für ungleichnamige Breite und Declination enthalten; die nautische Tafel XXX. enthält das Quadrat der Zeitminuten des Stundenwinkels von 0 bis 15 Minuten für jede Secunde auf eine Decimalstelle genau.

Will man nach (V.) die Culminationssecunden berechnen, so ist log 1'',9635 + log cos Br. + log cos Decl. + log cosec (Br. — Decl.) = log Culminationssecunden, wobei man, wenn Breite und Declination ungleichnamig sind, diese als ungleichartige Grössen zu betrachten, also statt „Breite — Declination" dann „Breite + Declination" zu nehmen hat.

Will man die Culminationssecunden für die nächste Minute vom unteren Meridian haben, so ist nach (VIII.) (§. 168.)

$$\sin h - \sin h_u = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta,$$

woraus folgt

$$2 \cos \frac{h + h_u}{2} \cdot \sin \frac{h - h_u}{2} = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta,$$

oder da h und h_u wenig differiren, so auch

$$\sin \frac{h - h_u}{2} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\cos h_u}.$$

*)

log 2	= 0,30103
log (450)² . .	= 5,30643
log sin 1'' . .	= 4,68557 — 10
1'',9635 log	= 0,29303.

Setzt man nun $\sin\frac{h - h_u}{2}$ und $\sin^2 \frac{1}{2} t'$ den Bögen proportional, da sie klein sind, und $t' = n'$ Zeit $= n \cdot 1'$ Zeit $= n \cdot 900''$ Bogen, so ergiebt sich

$$\frac{h - h_u}{2} = \frac{\left(\frac{n \cdot 900''}{2}\right)^2 \cdot \sin 1'' \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta}{\cos h_u},$$

oder

$$h - h_u = \frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\cos h_u} \cdot n^2 \cdot 2\,(450)^2 \cdot \sin 1'',$$

oder

$$h - h_u = \frac{1'',9635 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta}{\cos h_u} \cdot n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI.)}.$$

Aus (VI.) ergiebt sich, dass ebenfalls log 1'',9635 + log cos Br. + log cos Decl. + log sec untere Meridianhöhe = log Culminationssecunden ist, und man die Culminationssecunden, mal dem Quadrat der Zeitminuten des Stundenwinkels vom unteren Meridian gerechnet, von der wahren Höhe abziehen muss, um die untere Meridianhöhe zu erhalten. Aus der unteren Meridianhöhe wird dann nach §. 160. bis §. 163. die Breite gefunden.

Bezeichnet man die Maximumhöhe bei der oberen Culmination eines Gestirns, welches seine Declination ändert, wie die Sonne, der Mond, oder ein Planet, mit H', deren Stundenwinkel vom oberen Meridian in Zeitminuten ausgedrückt mit n, die oberen Culminationssecunden mit C, die Declination im Augenblicke der Culmination mit δ, die Veränderung dieser Declination in 1 Zeitminute mit $\Delta\delta$, so findet die Maximumhöhe dann statt, wenn die Höhenänderung in 1 Zeitminute von der Drehung der Erde um ihre Axe allein herrührend, hier also die in der nten Zeitminute vor oder nach der oberen Culmination, welche nach (IV.)

$$[(n + \tfrac{1}{2})^2 - (n - \tfrac{1}{2})^2] \cdot C \text{ ist} = \Delta\delta \text{ wird.}$$

Da in dieser Gleichung C und $\Delta\delta$ bekannt sind, so kann n daraus ermittelt werden. Löst man nämlich die Klammern des Factors C auf, so hat man

$$(n^2 + n + \tfrac{1}{4} - n^2 + n - \tfrac{1}{4}) \cdot C = \Delta\delta,$$

das giebt

$$2\,n\,C = \Delta\delta,$$

oder

$$n = \frac{\Delta\delta}{2\,C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII.)},$$

wonach n leicht berechnet werden kann.

Bezeichnet man wie vorher, die obere Meridianhöhe desselben Gestirns mit H, so wird man auf H' die Grössen $n^2 \cdot C$ und $n \cdot \Delta\delta$ anzuwenden haben, und zwar erstere mit +, letztere mit —, das Gestirn mag sich dem oberen Pol nähern oder davon entfernen, wie leicht einzusehen ist. Nähert es sich dem oberen Pol, so findet die Maximumhöhe nach der oberen Culmination statt, und wenn es sich vom oberen Pol entfernt, vor derselben. Das Entgegengesetzte findet aber statt, wenn bei gleichnamiger Breite und Declination, diese grösser als jene ist. In beiden Fällen ist

$$H = H' + n^2 \cdot C - n \cdot \Delta\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VIII.)}.$$

Dies die Formel, auf welche in §. 156. B. Anmerkung 2. verwiesen ist. Nimmt man H' für H, und ermittelt damit und mit δ die Breite φ, so wird diese mit dem Fehler $n^2 \cdot C - n \cdot \Delta\delta$ behaftet sein, der nur beim Monde eine zu berücksichtigende Grösse ist.

Bezeichnet man nun noch die Minimumhöhe eines Gestirnes mit veränderlicher Declination bei der unteren Culmination mit h', deren Stundenwinkel vom unteren Meridian in Zeitminuten mit n, die untere Meridianhöhe mit h_u, die dieser entsprechende Declination mit δ, die Veränderung letzterer in 1 Zeitminute mit $\Delta\delta$, die unteren Culminationssecunden mit c, so findet die Minimumhöhe vor oder nach der unteren Culmination statt, je nachdem das Gestirn sich dem oberen Pol nähert oder davon entfernt, und zwar so, dass die Höhenänderung in der nten Zeitminute vor oder nach der unteren Culmination durch die Drehung der Erde um ihre Axe allein hervorgebracht, $= \Delta\delta$ ist, also die Gleichung

$$[(n+\tfrac{1}{2})^2 - (n-\tfrac{1}{2})^2] \cdot c = \Delta\delta \text{ statt hat, woraus folgt}$$

$$n = \frac{\Delta\delta}{2\,c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IX.)}.$$

Zur Reduction der Minimumhöhe h' auf die untere Meridianhöhe h_u hat man die Gleichung

$$h_u = h' - n^2 \cdot c + n \cdot \Delta\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(X.)},$$

deren Richtigkeit auch leicht einzusehen ist.

Will man also die Minimumhöhe auf die untere Meridianhöhe reduciren, so berechne man erst n nach (IX.), dann h_u nach (X.). Bei der Sonne ist dies jedoch nicht nöthig, weil $\Delta\delta$ sehr klein ist; ebenso bei den Planeten, die man überdies nicht wird beobachten können, weil nicht gut sichtbar, wenn der Kimm so nahe. Es würde sonach hier diese Reduction auch nur beim Monde in Betracht kommen.

§. 170.

Die Breite vermittelst der oberen und unteren Culminationssecunden zu finden.

Regel.

1. Reducire die beobachtete Höhe, oder, wenn mehrere gemessen sind, das Mittel derselben zur wahren Mittelpunktshöhe (§. 119. bis §. 122.).

2. Finde die Declination des Gestirnes für den Augenblick der beobachteten Höhe (§. 103.).

3. Finde den Stundenwinkel des Himmelskörpers vom oberen Meridian (§. 134.) und drücke denselben in Minuten und zehntel Minuten aus.

4. Aus der nautischen Tafel XXIX. finde für die ungefähre Breite und für die Declination die Culminationssecunden und multiplicire dieselben mit dem aus der nautischen Tafel XXX. entnommenen, oder auch berechneten Quadrate der Zeitminuten des Stundenwinkels. Dieses Product ist eine Anzahl Bogensecunden, welche, zur wahren Höhe addirt, die obere Meridianhöhe geben.

5. Die obere Meridianhöhe von 90° subtrahirt, ist die Meridian-Zenithdistanz, welche, zur Declination addirt oder davon subtrahirt, je nachdem Meridian-Zenithdistanz und Declination gleichnamig oder ungleichnamig sind, die Breite giebt.

6. Ist die Höhe nahe am Meridian unter dem Pol beobachtet, mithin der Stundenwinkel vom unteren Meridian gefunden ($= 12^h$ — Stundenwinkel vom oberen Meridian), so giebt die nach Formel (VI.) berechnete Anzahl Secunden, von der wahren Höhe subtrahirt, die untere Meridianhöhe, welche, zum Complemente der Declination addirt, die Breite giebt.

Anmerkung. Es ist zwar, um hier eine Grenze anzugeben, in der Ueberschrift des §. 169. bemerkt, dass der Stundenwinkel nicht über 15′ sein muss, welches indessen nicht ohne Ausnahme gelten kann; denn je grösser die obere Meridianhöhe wird, desto kleiner muss der Stundenwinkel sein, welches sich aus der Formel leicht ergiebt. Zur Norm können nachstehende Grenzen des Stundenwinkels dienen:

1. wenn die Meridian-Zenithdistanz $< 3^\circ$, so ist diese Methode nicht zu gebrauchen;

2. wenn die Meridian-Zenithdistanz 10° ist, so darf der Stundenwinkel höchstens 3 Minuten sein;

3. wenn die Meridian-Zenithdistanz 66° ist, so kann der Stundenwinkel 20 Minuten betragen;

4. wenn die Meridian-Zenithdistanz nahe 20° und der Stundenwinkel 20 Minuten ist, so weicht die nach Culminationssecunden gefundene Breite nahe ½ Minute von der Wahrheit ab;

5. wenn die Meridian-Zenithdistanz 20° und der Stundenwinkel 30 Minuten ist, so weicht die durch Culminationssecunden gefundene Breite nahe 1,2 Minuten von der Wahrheit ab, woraus man sieht, dass auf See, wo es genügt, die Breite auf eine Minute genau zu finden, dies die äusserste Grenze ist, innerhalb welcher man von den oberen Culminationssecunden Gebrauch machen darf.

Beispiel 1. Die Aufgabe sei dieselbe, wie in Beispiel 1. (§. 165 a.); man soll die Breite durch Anwendung der Culminationssecunden finden.

$$H-h=\frac{1'',9635\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\cdot n^2 \;\ldots\; [(\mathrm{IV.})\ \S.\ 169.]$$

	1,9635		log	= 0,29303
$\varphi = +40^\circ$	36′		log cos	= 9,88040
$\delta = +22^\circ$	57′		log cos	= 9,96419
$\varphi-\delta = 17^\circ$	39′		log cosec	= 0,51827
$C =$	4″,53		log	= 0,65589
$n = 0^h$	8′033		log · 2	= 1,80975
	292″		log	= 2,46564

$H-h =$		4′	52″	
$h =$	72°	34′	33″	
$H =$	72°	39′	25″	
$Z =$	17°	20′	35″	N.
$\delta =$	22°	57′	1″	N.
$\varphi =$	40°	17′	36″	Nord.

Lösung nach Tafel XXIX. und XXX.

Culm.-Sec. nach Tafel XXIX = 4″,5
(8′ 2″)² nach Tafel XXX. . . . = 64,5

3225
2580

Höhen-Correction	= 290″,25 =		4′	50″		
⊖ w. Höhe	=	72°	34′	33″		
M.-H.	=	72°	39′	23″		
M.-Z.-D. ..	=	17°	20′	37″	N.	
⊙ Decl. ..	=	22°	57′	1″	N.	
Br.	=	40°	17′	38″	Nord.	

Beispiel 2. Die Aufgabe sei dieselbe, wie in Beispiel 2 (§. 165a.): also ungefähre Breite $= 0^\circ\ 40'$ N., Decl. $= 21^\circ\ 4'$ S., ⊖ w. Höhe $69^\circ\ 9'$ und der Stundenwinkel $= 0^h\ 20'\ 58''$, man soll durch Culminationssecunden die Breite finden.

$$
\begin{array}{rlll}
 & 1'',9635 & \ldots \log & = 0,29303 \\
\varphi = & +\ 0^\circ\ 40' & \ldots \log\cos & = 9,99997 \\
\delta = & -\ 21^\circ\ 4' & \ldots \log\cos & = 9,96996 \\
\varphi + \delta = & 21^\circ\ 44' & \ldots \log\operatorname{cosec} & = 0,43146 \\
\hline
\text{Culm.-Sec.} = & 4'',95 & \ldots \log & = 0,69442 \\
 & \log(20,97)^2 & \ldots\ldots\ldots & = 2,64320 \\
\hline
 & 2176'' & \ldots \log & = 3,33762 \\
H - h = & 36'\ 16'' & & \\
h = & 69^\circ\ 9'\ 0'' & & \\
\hline
H = & 69^\circ\ 45'\ 16'' & & \\
\hline
Z = & 20^\circ\ 14'\ 44'' & \text{N., weil} \odot \text{ im Süd. culminiren muss.} & \\
\delta = & 21^\circ\ 4'\ 0'' & \text{S.} & \\
\hline
\varphi = & 0^\circ\ 49'\ 16'' & \text{Süd.} &
\end{array}
$$

Wiederholung.

$$
\begin{array}{rlll}
 & 1'',9635 & \ldots \log & = 0,29303 \\
\varphi = & -\ 0^\circ\ 49' & \ldots \log\cos & = 9,99996 \\
\delta = & -\ 21^\circ\ 4' & \ldots \log\cos & = 9,96996 \\
\varphi - \delta = & 20^\circ\ 15' & \ldots \log\operatorname{cosec} & = 0,46078 \\
\hline
\text{Culm.-Sec.} = & 5'',293 & \ldots \log & = 0,72373 \\
 & \log \text{Stundenw.} \cdot 2 & \ldots\ldots & = 2,64320 \\
\hline
 & 2328'' & \ldots \log & = 3,36693 \\
H - h = & 38'\ 48'' & & \\
h = & 69^\circ\ 9'\ 0'' & & \\
\hline
H = & 69^\circ\ 47'\ 48'' & & \\
 & 90^\circ & & \\
\hline
\text{M.-Z.-D.} \ldots = & 20^\circ\ 12'\ 12'' & \text{N.} & \\
\odot \text{ Decl.} \ldots = & 21^\circ\ 4'\ 0'' & \text{S.} & \\
\hline
\end{array}
$$

Br. $= 0^\circ\ 51'\ 48''$ Süd, also nach dem in §. 165a. gefundenen Resultat etwa 0',4 Minuten abweichend.

Lösung nach Tafel XXIX.

$$
\begin{array}{rll}
t = 20'\,58'' = & 20',97 & \\
\hline
t^2 = & 439,7 & \\
\text{Culm.-Sec.} \ldots = & 5'',0 & \\
\hline
2198'',5 = & 36'\ 39'' & \\
\ominus \text{ w. Höhe} = & 69^\circ\ 9' & \\
\hline
\text{M.-H.} \ldots = & 69^\circ\ 45'\ 39'' & \\
 & 90^\circ & \\
\hline
\text{M.-Z.-D.} \ldots = & 20^\circ\ 14'\ 21'' & \text{N.} \\
\odot \text{ Decl.} \ldots = & 21^\circ\ 4'\ 0'' & \text{S.} \\
\hline
\text{Br.} \ldots\ldots = & 0^\circ\ 49'\ 39'' & \text{Süd.}
\end{array}
$$

Wiederholung.

t = 20' 58" = 20',97
t^2 = 439,7
Culm.-Sec. n. Tf. XXIX. = 5",3
13191
21985
Höhen-Correction . . . = 2330",41 = 38' 50"
⊖ w. Höhe = 69° 9' 0"
M.-H. . . . = 69° 47' 50"
90°
M.-Z.-D. . = 20° 12' 10" N, weil ⊙ im S. M. culm.
⊙ Decl. . . = 21° 4' 0" S.
Br. = 0° 51' 50" Süd.

Beispiel 3. 1844 d. 14. September n. d. Besteck auf 37° 40' NBr. und 0° 18' OL. von Greenwich, Augeshöhe 13 Fuss Rheinl., Uhrcorrection = — 10' 4" gegen mittlere Zeit, Index-Correction = + 0' 34", sind nachstehende Höhen gemessen; man soll die Breite nach Culminationssecunden bestimmen.

Morgens 9^h 1' 10" . ♀ 67° 33' 25"
2 3 34 0
2 40 34 20
3 10 34 30
9^h 2' 16" 67° 34' 4"

U. C. geg. mittl. Zt. = — 10' 4"
mittl. Schiffsz. d. 13. = 20^h 52' 12"
m. ⊙ AR. = 11^h 33' 43"
✻ Zeit = 8^h 25' 55"
♀ AR. = 8^h 33' 47"
♀ Stundenwinkel = 0^h 7' 52"

I. C. = + 0' 34"
Kimmt. . . = — 3' 35"
67° 31' 3"
Ref. — P. = — 0' 18"
w. H. = 67° 30' 45".

(7' 52")² Tafel XXX. . . . = 61,9
Culm.-Sec. aus Tf. XXIX. = 3",9
5571
1857
Höhen-Correction = 241",41
= 4' 1"
♀ w. Höhe = 67° 30' 45"
♀ M.-H. = 67° 34' 46"
90°
♀ M.-Z.-D. = 22° 25' 14" N.
♀ Declin. = 15° 15' 19" N.
Breite = 37° 40' 33" N.

Mittl. Schiffsz. = 20^h 52' d. 13. Sept.
OL. in Zt. . . . = — 1'
Ung. m. Grw. Zt. = 20^h 51' d. 13. Sept.

m. ⊙ AR. . . . = 11^h 33' 43"
♀ AR. = 8^h 33' 47"
♀ Decl. = 15° 15' 19"

♀ Horizontal-Parallaxe = 15".

§. 171.

Die Breite aus Polarsternhöhen zu bestimmen, welche ausserhalb des Meridians beobachtet sind, wenn die Zeit und ungefähre Länge des Ortes bekannt ist.

Wenn der Polarstern sich im Meridian unter dem Pol befindet, so ist die Breite des Ortes gleich der wahren Höhe + der Poldistanz desselben.

Wenn der Polarstern sich im Meridian über dem Pol befindet, so ist die Breite gleich der wahren Höhe — der Poldistanz desselben.

Wenn sich aber der Polarstern nicht im Meridian befindet, so ist die Breite gleich der wahren Höhe $\pm$ einer Correction, welche kleiner als die Poldistanz sein muss, weil jede Höhe ausserhalb des Meridians grösser als die untere und kleiner als die obere Meridianhöhe ist.

Wenn, wie in §. 169., φ die Polhöhe des Ortes, p die Nordpoldistanz des Polarsterns, h dessen wahre Höhe, t dessen Stundenwinkel vom oberen Meridian nach Westen herumgezählt, vorstellt, so findet im sphärischen Dreieck zwischen Pol, Zenith und Gestirn die Gleichung statt

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \cos p + \cos\varphi \cdot \sin p \cdot \cos t.$$

Setzt man $h - \varphi = x$, so hat man

$\varphi = h - x$, und dies für φ in obige Gleichung gesetzt, giebt

$$\sin h = \sin(h - x) \cdot \cos p + \cos(h - x) \cdot \sin p \cdot \cos t, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned}\sin h = {} & \sin h \cdot \cos x \cdot \cos p - \cos h \cdot \sin x \cdot \cos p \\ & + \cos h \cdot \cos x \cdot \sin p \cdot \cos t \\ & + \sin h \cdot \sin x \cdot \sin p \cdot \cos t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)}.\end{aligned}$$

Da p und auch x höchstens 90 Minuten werden können, so kann man, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, setzen:

$$\sin x = x \cdot \sin 1',$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \sin^2 1',$$

$$\sin p = p \cdot \sin 1',$$

$\cos p = 1 - \frac{1}{2}p^2 \cdot \sin^2 1'$, und wenn man diese Werthe in (I.) setzt, so ergiebt sich, wenn nur die zweiten Potenzen von x und p berücksichtigt werden,

$$\begin{aligned}\sin h = {} & \sin h - \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \sin^2 1' \cdot \sin h - \tfrac{1}{2}p^2 \cdot \sin^2 1' \cdot \sin h - x \cdot \sin 1' \cdot \cos h \\ & + p \cdot \sin 1' \cdot \cos h \cdot \cos t + xp \cdot \sin^2 1' \cdot \sin h \cdot \cos t \quad \ldots \text{(II.)}.\end{aligned}$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\sin 1' \cdot \cos h$, nachdem $\sin h$ gegen $\sin h$ gestrichen worden ist, so erhält man

$$\begin{aligned}0 = {} & -\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h - \tfrac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h - x + p \cdot \cos t \\ & + xp \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h \cdot \cos t,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}x = {} & p \cdot \cos t - \tfrac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h + xp \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h \cdot \cos t \\ & - \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III.)}.\end{aligned}$$

Der Näherungswerth von x ist sonach $= p \cdot \cos t$, also auch

$x^2 = p^2 \cdot \cos^2 t$, und wenn man diese Werthe für x und x^2 in (III.) (auf der rechten Seite) setzt, so geht sie über in

$$x = p \cdot \cos t - \tfrac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h + p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h \cdot \cos^2 t - \tfrac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h \cdot \cos^2 t,$$

woraus folgt

$x = p \cdot \cos t - \frac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h + \frac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h \cdot \cos^2 t$, und wenn man aus den beiden letzten Gliedern die gleichen Factoren auszieht und für $1 - \cos^2 t$ den gleichen Werth $\sin^2 t$ setzt, so ergiebt sich

$$x = p \cdot \cos t - \tfrac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} h \cdot \sin^2 t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV.)},$$

worin p und x in Minuten ausgedrückt sind.

Es ist $p \cdot \cos t$ negativ, wenn $t > 6^h$ und kleiner als 18^h ist, dagegen ist der zweite Theil der Correction stets positiv.

Die Correction (x) algebraisch von der Höhe (h) subtrahirt, giebt die Breite (φ). Ohne Rücksicht auf die Zeichen zu nehmen, ist also

$$\varphi = h \mp p \cdot \cos t + \tfrac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \sin^2 t \cdot \operatorname{tg} h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.)},$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn $t < 6^h$ oder $> 18^h$, und das untere Zeichen, wenn $t > 6^h$ oder $< 18^h$ ist.

Die nautische Tafel XXXI. (Auflage 5. und 6.) enthält den ersten Theil der Correction, oder $p \cdot \cos t$ auf Minuten genau für die Jahre 1870 und 1880,

und dieser muss, dem beigefügten Zeichen gemäss, auf die wahre Höhe angewandt werden.

Das Argument dieser Tafel ist die Sternzeit. Die Correction für Jahre zwischen 1870 und 1880 wird nach einfacher Interpolation gefunden.

Dieselbe Tafel enthält ebenfalls $\frac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \sin^2 t \cdot \text{tg}\,h$, oder die zweite Correction, und hat die Sternzeit und die Höhe zum Argument.

Im Nautical-Almanac, sowie im nautischen Jahrbuche findet man jährlich drei Tafeln zur Bestimmung der Breite aus Polarsternhöhen berechnet.

Im Nautical-Almanac enthält Taf. I. den Ausdruck $p \cdot \cos t$ auf Secunden genau, in welcher für die Poldistanz und für die AR. des Sternes die mittleren Werthe des Jahres angenommen sind; sie hat die Sternzeit zum Argument.

Taf. II. enthält $\frac{1}{2}p^2 \cdot \sin 1' \cdot \sin^2 t \cdot \text{tg}\,h$, worin p ebenfalls die mittlere Grösse der Poldistanz des Sternes für das laufende Jahr bezeichnet und t nach dem mittleren Werthe der AR. berechnet ist.

Die Argumente dieser Tafel sind die Sternzeit und die Höhe.

Taf. III. endlich enthält den Unterschied, der dadurch in der ersten und zweiten Correction entsteht, dass die mittleren Werthe der Poldistanz und AR. des Polarsterns, statt der eigentlichen Werthe, zur Berechnung dieser Correctionen gebraucht sind.

Damit diese dritte Correction stets positiv wird, ist zu derselben eine Minute oder zwei Minuten addirt, welche Grösse von der Höhe des Polarsterns wieder subtrahirt werden muss, wie in der Erklärung dieser Tafel eines jeden Jahrganges angezeigt ist.

Die Tafeln im nautischen Jahrbuche sind nach derselben Formel berechnet, und sind dort zu der Correction in der ersten Tafel, je nachdem dieselbe — oder + ist, eben so viele Minuten (gewöhnlich zwei) addirt, oder davon subtrahirt, als zu der Correction in der dritten Tafel addirt sind, wodurch es umgangen wird, von der Höhe eine oder zwei Minuten abzuziehen. (Siehe Erklärung der Tafel des nautischen Jahrbuches.)

§. 172.

Regel. Nach der nautischen Tafel XXXI. aus Polarsternhöhen die Breite zu finden.

Aus der abgelesenen Höhe finde die wahre Höhe (§. 122.) und aus der wenigstens ungefähr bekannten mittleren oder wahren Zeit der Beobachtung die Sternzeit (§. 108.), für diese entnimm aus der gedachten Tafel, oder, wenn die Jahreszahl zwischen 1870 und 1880 liegt, finde durch Interpolation die erste Correction, wende dieselbe auf die wahre Höhe dem danebenstehenden Zeichen gemäss an, und nenne die Summe oder den Rest die genäherte Breite. Für die Sternzeit und wahre Höhe entnimm ferner aus der gedachten Tafel die zweite Correction und addire dieselbe zu der genäherten Breite, so ist die Summe die gesuchte Nordbreite.

Beispiel. 1872 den 24. September nach dem Besteck auf 38° 27′ NBr. und 8° 41′ OL. von Greenwich, Augeshöhe 15 Fuss Rheinl., U. C. = — 10′ 23″ gegen mittlere Zeit; I. C. = 0′, ist beobachtet

Abends um . .	$6^h 58' 51''$	Polar ✻	$38° 35'$
	59 25		33,5
	7 0 4		33
	0 31		31
	1 16		32
	1 58		33,5
	2 33		33
	$7^h 0' 40''$		$38° 33'$

Ungef. mittl. Zt. =	$6^h 50'$ Ab.
OL. in Zt. . . . =	— 35'
Ungf.Grw.m.Zt. =	$6^h 15'$ d. 24. Abds.
m. ⊙ AR. =	$12^h 15' 32''$.

U. C. g. m. Z. =	— 10' 23''	Kimmt. . . =	— 3',9
Mittl. Zt. . . =	$6^h 50' 17''$	✻ sch. H. =	$38° 29',1$
m. ⊙ AR. . =	$12^h 15' 32''$	Refr. . . . =	— 1',2
Sternzeit . . =	$19^h 5' 49''$	✻ w. H. . =	$38° 27',9$

1ste Corr. aus Taf. XXXI. = + 2',0
Genäherte Breite = $38° 29',9$
2te Corr. = + 0',8
Breite = $38° 30',7$ Nord.

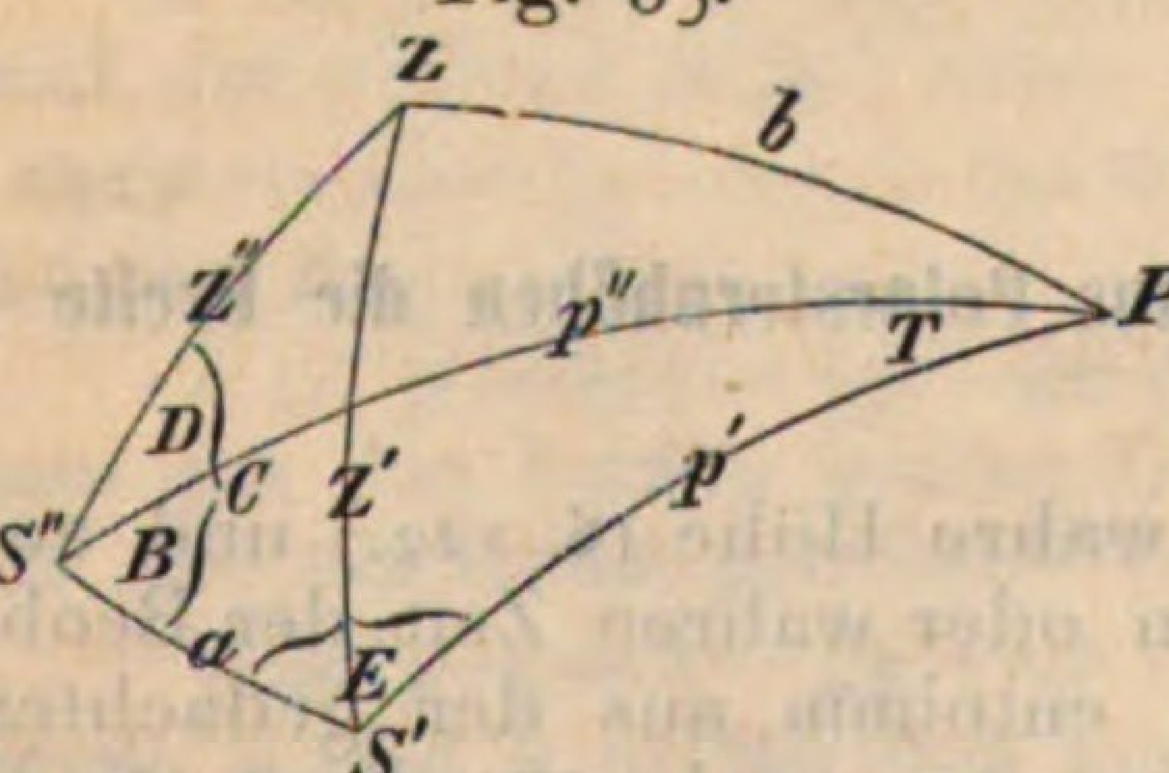
§. 173.

Die Breite und Zeit aus gleichzeitig beobachteten Höhen zweier Himmelskörper, oder aus zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen zweier Himmelskörper, oder eines und desselben Himmelskörpers zu finden, wenn die, den Höhen entsprechenden Zeiten nach einer Uhr, deren Gang und ungefährer Stand bekannt ist, notirt sind und die ungefähre Länge des Ortes bekannt ist.

Aus den ungefähr bekannten Zeiten und der ungefähr bekannten Länge kann nach §. 103. mit Hülfe einer Ephemeride die Declination der beobachteten Gestirne, sowie die Rectascensionen (AR.) derselben für jede Beobachtung gefunden werden.

Es bezeichne Z'' die Zenithdistanz der Höhe, welche am nächsten am Meridian beobachtet, oder deren Azimuth am kleinsten ist; Z' die Zenithdistanz der anderen beobachteten Höhe, sowie p'' die Poldistanz, welche zur Zenithdistanz Z'' und p' die Poldistanz, welche zur Zenithdistanz Z' gehört.

Fig. 85.



In Fig. 85. bezeichne ferner Z das Zenith, P den oberen Pol, S' den Ort des Gestirnes bei der Zenithdistanz Z', sowie S'' den Ort des Gestirnes, welcher zur Zenithdistanz Z'' gehört: so ist

$$ZS' = Z',$$
$$ZS'' = Z'',$$
$$PS' = p',$$
$$PS'' = p''.$$

Man bezeichne noch: $\angle\, S''PS'$ mit T,
$S'S''$ mit a,
$\angle\, S'S''P$ mit B,
$\angle\, S'S''Z$ mit C,
die Differenz der Winkel B und C mit $D = \angle\, ZS''P$, und
$\angle\, S''S'P$ mit E.

1. Wenn zwei verschiedene Gestirne zu gleichen Zeiten beobachtet sind, so ist T gleich der Differenz der Rectascension der Gestirne.

2. Wenn zwei verschiedene Gestirne zu verschiedenen Zeiten beobachtet sind, so ist T gleich der Differenz zwischen der AR. des zuerst

beobachteten Gestirnes + der Zwischenzeit der beiden Höhen in Sternzeit und der AR. des zuletzt beobachteten Gestirnes, welches sich leicht ergiebt, wenn man erwägt, dass die AR. von Westen nach Osten oder gegen die scheinbare Bewegung des Himmels gezählt wird.

3. Wenn ein und dasselbe Gestirn zu verschiedenen Zeiten beobachtet wurde, so ist $T =$ der AR. des Gestirnes zur Zeit der ersten Beobachtung + der Zwischenzeit in Sternzeit minus der AR. desselben Gestirnes zur Zeit der zweiten Beobachtung, oder auch gleich der Zwischenzeit, in Zeit des beobachteten Gestirnes ausgedrückt; also, wenn das beobachtete Gestirn die Sonne ist, gleich der Zwischenzeit in wahrer Zeit, wenn ein Fixstern, in Sternzeit ausgedrückt; ist das beobachtete Gestirn aber ein Planet oder der Mond, so ist die Zwischenzeit in Zeit des Gestirnes ausgedrückt gleich der Zwischenzeit in Sternzeit + oder — der Veränderung der AR. des Gestirnes in der Zwischenzeit, je nachdem die AR. ab- oder zunimmt, also beim Monde immer — der gedachten Veränderung der AR., weil dieselbe immer zunimmt.

Nach der sphärischen Trigonometrie in §. 46. Lösung II. ist im Dreieck $S'S''P$, wenn

$$\operatorname{tang} m = \frac{\sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2} T \cdot \sin p' \cdot \sin p''}}{\sin \tfrac{1}{2}(p' - p'')} \text{ gesetzt wird,}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \operatorname{cosec} m \cdot \sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2} T \cdot \sin p' \cdot \sin p''} \quad \ldots\ldots \quad (\text{I.}),$$

und nach §. 36. Gleichung (4.) der sphärischen Trigonometrie ist

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + p'' + p') \cdot \sin \tfrac{1}{2}(a + p'' - p')}{\sin a \cdot \sin p''}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{II.}),$$

oder wenn $\sin B$ nicht sehr gross ist, ergiebt sich genau genug nach der Sinusregel

$$\sin B = \frac{\sin T \cdot \sin p}{\sin a} \quad \ldots\ldots \quad (\text{II}'.).$$

Im sphärischen Dreieck $S'ZS''$ ist nach §. 36. der sphärischen Trigonometrie

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + Z'' + Z') \cdot \sin \tfrac{1}{2}(a + Z'' - Z')}{\sin a \cdot \sin Z''}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{III.}),$$

$$D = C \mp B \text{ oder } = 360^\circ - (B + C) \quad \ldots\ldots \quad (\text{IV.}).$$

Es ist nämlich, wenn die Seite $S'S''$ oder deren Verlängerung den Meridian auf NBr. in Süden, oder auf SBr. in Norden, oder auch den Meridian unter dem oberen Pol schneidet, immer $D = C - B$; wenn aber die nöthigenfalls verlängerte Seite $S'S''$ den Meridian zwischen dem oberen Pol und Zenith schneidet, so ist $D = C + B$, wenn die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians, oder $= 360^\circ - (B + C)$, wenn die Höhen auf derselben Seite des Meridians beobachtet sind.

Ist man im Zweifel, ob $D = C - B$ oder $= C + B$ oder $= 360^\circ - (B + C)$ ist, so muss die Rechnung nach den beiden zweifelhaften Fällen ausgeführt werden, und die Vergleichung der Resultate mit der ungefähr bekannten Breite entscheiden.

Im sphärischen Dreieck $ZS''P$ ist nach §. 46. der sphärischen Trigonometrie, Gleichung (1) und (4), wenn man

$\operatorname{tang} n = \cos D \cdot \operatorname{tang} Z''$ setzt,

$$\cos b = \sin \varphi = \sec n \cdot \cos Z'' \cdot \cos (p'' - n) \quad \ldots\ldots \quad (\text{V.}).$$

Aus dem Dreieck $ZS'P$, d. h. mit dem Complemente der Höhe, welche am nächsten am ersten Vertical beobachtet ist, der dazugehörigen Poldistanz p' und der nach (V.) gefundenen Breite kann man ferner nach §. 137. den Stundenwinkel sowie die Zeit und Uhrcorrection finden.

Anmerkung. In der vorstehend gegebenen Lösung ist angenommen, dass die Höhen, wenn auch zu verschiedenen Zeiten, doch an ein und demselben Orte beobachtet sind. Wenn dagegen in der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen der Beobachter seinen Ort verändert hat, so muss die eine Höhe auf den anderen Beobachtungsort reducirt werden (§. 130.), für welchen dann ebenso als wenn die Höhen an demselben Orte beobachtet wären, die Breite und die Zeit nach den gegebenen Formeln gefunden werden können.

Ist die Höhe eines und desselben Himmelskörpers zu zwei verschiedenen Zeitpunkten beobachtet und, wie dieses meistens der Fall sein wird, die Aenderung der Declination in der Zwischenzeit so klein, dass $\cos(p' - p'') = 1$ gesetzt werden kann, so lässt a sich leichter aus nachstehender Formel (I''.) ermitteln.

Man findet dieselbe wie folgt.

Im sphärischen Dreieck $S'S''P$ ist nach §. 19. der sphärischen Trigonometrie

$$\cos a = \cos p' \cdot \cos p'' + \sin p' \cdot \sin p'' \cdot \cos T,$$

oder $\cos a = \cos(p' - p'') - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}T \cdot \sin p' \cdot \sin p''$,

folglich $\cos a = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}T \cdot \sin p' \cdot \sin p''$,

und weil $\cos a = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a$ ist,

so auch

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \sin \tfrac{1}{2}T \cdot \sqrt{\sin p' \cdot \sin p''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I''.)}.$$

Beispiel 1. 1844 den 4. October, n. d. Besteck auf 36° 48' NBr. und 9° 54' WL. von Greenw., I. C. = + 0' 28''. Augeshöhe 15 Fuss Rheinl., Barom. = 30'',15 Engl., Therm. = 74° Fahrenheit, ungefähre Uhrcorrection = — 1^h 10' gegen mittlere Zeit, der Gang der Uhr unbedeutend gegen mittlere Zeit, die Breite und Zeit aus nachstehender Beobachtung zu bestimmen.

8^h 38' 5''	⊙	16° 40' 40''
38 32		44 5
38 55		48 50
39 15		52 10
39 30		54 50
39 47		58 0
40 1		17 1 20
40 19		3 30
40 39		8 0
40 55		11 0
8^h 39' 36''		16° 56' 15''

		8^h 56' 9''
Zwischenzeit	=	0^h 16' 33''
Accel. in 16' 33''	=	+ 2'',7
Zwischenzt. in ✱ Zt.	=	0^h 16' 36''
⊙ AR.	=	12^h 41' 8''
⊙ AR. + verfl. ✱ Zt.	=	12^h 57' 44''
♀ AR.	=	9^h 47' 35''
T	=	3^h 10' 9''
$\tfrac{1}{2}T$	=	1^h 35' 4'',5

I. C.	=	+ 0' 28''
Kimmt.	=	— 3' 51''
		16° 52' 52''
m. Refr. = 3' 8''; C. f. Bar. = + 3''; C. f. Thr. = — 8''; Parall. = — 8''		— 2' 55''
⊙ w. H.	=	16° 49' 57''
⊙ Halbm.	=	+ 16' 2''
⊖ w. H.	=	17° 5' 59''
Höhenänd. weg. Segl.	=	— 15''
⊖ w. H.	=	17° 5' 44''
⊙ Z'	=	72° 54'.3

Gesegelt von 7^h bis 8^h N. p. C. 1,3 Seem. ⊕ S. 44° Ost.

8^h 55′ 10″	♀	60° 54′ 40″
55 29		56 20
55 49		59 10
56 5		61 1 10
56 30		4 20
56 51		7 10
57 8		8 50
8^h 56′ 9″		61° 1′ 40″

I. C. . . = + 0′ 28″	— 3′ 23″	
Kimmt. = — 3′ 51″		
		60° 58′ 17″
mittl. Refr. = 0′ 32″		
C. f. Bar. = + 1″	— 0′ 26″	
C. f. Ther. = — 1″		
Parallaxe = — 6″		
♀ w. H.	=	60° 57′ 51″
		60° 57′,8
♀ Z''	=	29° 2′,2.

⊙ beobachtet um		8^h 40′ Morgens den 4. Octbr.,
ungef. U. C.	=	— 1^h 10′ gegen mittl. Zt.,
ungef. mittl. Zt.	=	7^h 30′
WL. in Zeit	=	+ 40′
ungef. mittl. Grw. Zt.	=	8^h 10′ Morgens den 4. Octbr.,
		3^h 50′ vor dem Mittage den 4. Octbr.

⊙ Decl.	=	4° 25′ 49″ S.
⊙ p'	=	94° 25′,8 N.
⊙ AR.	=	12^h 41′ 8″,3.
Zeitgl.	=	— 11′ 18″,68 auf w. Zt.

♀ beobachtet um . .		8^h 56′ Morgens den 4. Octbr.,
ungef. U. C.	=	— 1^h 10′ gegen mittl. Zt.,
ungef. mittl. Zt. . . .	=	7^h 46′
WL. in Zeit	=	+ 40′
ungef. mittl. Grw. Zt.	=	8^h 26′ Morgens den 4. Octbr.
		3^h 34′ vor dem Mittage den 4. Octbr.

♀ Decl.	=	12° 9′ 12″ N.
♀ p''	=	77° 50′,8 N.
♀ AR.	=	9^h 47′ 35″,27
m. ⊙ AR.	=	12^h 52′ 30″,22
♀ Horiz.-Parallaxe . .	=	12″.

$$\operatorname{tang} m = \frac{\sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2}T \cdot \sin p' \cdot \sin p''}}{\sin \tfrac{1}{2}(p'-p'')}$$

$\tfrac{1}{2}T = 1^h\,35'\,4'',5 \quad \log\sin^2 = 9{,}21071$

$p' = 94^\circ\,25',8 \quad \log\sin = 9{,}99870$

$p'' = 77^\circ\,50',8 \quad \log\sin = 9{,}99016$

$^{2)}\;16^\circ\,35',0 \qquad {}^{2)}\;19{,}19957$

$\qquad 9{,}59978$

$\tfrac{1}{2}(p'-p'') = 8^\circ\,17',5 \quad \log\operatorname{cosec} = 0{,}84100$

$\log\operatorname{tang} m = 0{,}44078$

$\tfrac{1}{2}a = 25^\circ\,2',3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a = 50^\circ\,4',6.$

$\sin\tfrac{1}{2}a = \operatorname{cosec} m \cdot \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}T\cdot\sin p'\cdot\sin p''}$

$\ldots\ldots\ldots\; 9{,}59978$

$\log\operatorname{cosec} m = 0{,}02680$

$\log\sin\tfrac{1}{2}a = 9{,}62658$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+p''+p')\cdot\sin\tfrac{1}{2}(a+p''-p')}{\sin a\cdot\sin p''}},$$

oder auch $\sin B = \dfrac{\sin T\cdot\sin p'}{\sin a}$

$a = 50^\circ\,4',6 \;\ldots\; \log\operatorname{cosec} = 0{,}11526$

$T = 3^h\,10'\,9'' \;\ldots\; \log\sin = 9{,}86789$

$p' = 94^\circ\,25',8 \;\ldots\; \log\sin = 9{,}99870$

$B = 106^\circ\,27',0 \;\ldots\; \log\sin = 9{,}98185$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+Z''+Z')\cdot\sin\tfrac{1}{2}(a+Z''-Z')}{\sin a\cdot\sin Z''}}$$

$a = 50^\circ\,4',6 \quad \log\operatorname{cosec} = 0{,}11526$

$Z'' = 29^\circ\,2',2 \quad \log\operatorname{cosec} = 0{,}31393$

$Z' = 72^\circ\,54',3$

$S = 76^\circ\,0',5 \quad \log\sin = 9{,}98692$

$S-Z' = 3^\circ\,6',2 \quad \log\sin = 8{,}73361$

$\qquad {}^{2)}\;19{,}14972$

$\tfrac{1}{2}C = 67^\circ\,55',9 \quad \log\cos = 9{,}57486$

$\qquad 2$

$C = 135^\circ\,51',8$

$B = 106^\circ\,27',0$

$D = 29^\circ\,24',8 \quad \log\cos = 9{,}94007$

$Z'' = 29^\circ\,2',2 \quad \log\operatorname{tang} = 9{,}74441 \quad \log\cos = 9{,}94167$

$n = 25^\circ\,48',5 \quad \log\operatorname{tang} = 9{,}68448 \quad \log\sec = 0{,}04563$

$p'' = 77^\circ\,50',8$

$p''-n = 52^\circ\,2',3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \log\cos = 9{,}78897$

$\varphi = 36^\circ\,41',1$ Nord $\quad \log\sin = 9{,}77627.$

$\sin\varphi = \sec n\cdot\cos Z''\cdot\cos(p''-n)$

und $\operatorname{tg} n = \cos D\cdot\operatorname{tg} Z''$

$$\sin\tfrac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\cos S\cdot\sin(S-h')}{\cos\varphi\cdot\sin p'}}$$

$\odot h' = 17^\circ\,5',7$

$\odot p' = 94^\circ\,25',8 \;\ldots\; \log\operatorname{cosec} = 0{,}00130$

$\varphi = 36^\circ\,41',1 \;\ldots\; \log\sec = 0{,}09586$

$S = 74^\circ\,6',3 \;\ldots\; \log\cos = 9{,}43755$

$S-h' = 57^\circ\,0',6 \;\ldots\; \log\sin = 9{,}92364$

$\qquad {}^{2)}\;19{,}45835$

$\tfrac{1}{2}t = 2^h\,9'\,39'' \;\ldots\; \log\sin = 9{,}72918$

$\frac{1}{2}t = 2^h\ 9'\ 39''$
$t = 4^h\ 19'\ 18''$
12^h
w. Zt. . . $= 7^h\ 40'\ 42''$
Zeitgl. . . $= -\ 11'\ 19''$ auf w. Zt.,
mittl. Zt. $= 7^h\ 29'\ 23''$
Uhrzeit . $= 8^h\ 39'\ 36''$
U.-Corr. $= -\ 1^h\ 10'\ 13''$ geg. mittl. Zt.

Beispiel 2. 1852 den 18. September in Gibraltar auf $5^\circ\ 19'$ WL. von Greenwich ist nachstehende Beobachtung gemacht; man soll die Breite und Zeit bestimmen. Ungefähre Uhrcorrection $= -\ 1^h\ 3'$ gegen mittlere Zeit, Index-Correction $= +\ 0'\ 40''$, Barom. $= 30'',1$ Engl., Therm. $= 76^\circ,5$ Fahrenheit; der Gang der Uhr ungefähr richtig gegen mittlere Zeit.

Im Mittel aus 10 Höhen und Zeiten ist gefunden:

Morg. $11^h\ 12'\ 27''$ ☉̲ $96^\circ\ 35'\ 0''$	Nachmitt. $2^h\ 32'\ 17''$ ☉̲ $97^\circ\ 35'\ 0''$
$14^h\ 32'\ 17''$ I. C. $= +\ 0'\ 40''$	I. C. $= +\ 0'\ 40''$
Verfl. m. Z. $= 3^h\ 19'\ 50''$ ²) $96^\circ\ 35'\ 40''$	²) $97^\circ\ 35'\ 40''$
$48^\circ\ 17'\ 50''$	$48^\circ\ 47'\ 50''$
m. Refr. . . $= 0'\ 51''$; C. f. Barom. $= +\ 1''$; » » Therm. $= -\ 3''$; Parall. . . . $= -\ 6''$ } $-\ 0'\ 43''$	m. Refr. . . $= 0'\ 50''$; C. f. Baro. $= +\ 1''$; » » Ther. $= -\ 3''$; Parall. . . . $= -\ 6''$ } $-\ 0'\ 42''$
☉ Halbm. $= -\ 15'\ 57''$	☉ Halbm. $= +\ 15'\ 57''$
⊖ w. H. $= 48^\circ\ 1'\ 10''$	⊖ w. H. $= 49^\circ\ 3'\ 5''$
$Z = 41^\circ 58'\ 50''$.	$Z' = 40^\circ\ 56'\ 55''$.

Uhrzt. d. 1sten Beob. $= 11^h\ 12'$
ungef. U. C. g. mittl. Zt. $= -\ 1^h\ 3'$
ungef. mittl. Zt. $= 10^h\ 9'$
WL. in Zt. $= +\ 0^h\ 21'$
ungef. mittl. Grw. Zt. $= 10^h\ 30'$ Morg. den 18. Septbr.
$1^h\ 30'$ v. d. Mittage d. 18. Septbr.

☉ Decl. $= 1^\circ\ 44'\ 20''$ N.
$p' = 88^\circ\ 15'\ 40''$
Zeitgl. $= -\ 6'\ 1'',2$ auf w. Zt.

Uhrzt. d. 2ten Beob. $= 2^h\ 32'$ Abends,
ungef. U. C. $= -\ 1^h\ 3'$ g. m. Zt.,
ungef. mittl. Zt. . . . $= 1^h\ 29'$
WL. in Zt. $= +\ 0^h\ 21'$
ungef. mittl. Grw. Zt. $= 1^h\ 50'$ den 18. Septbr. Abends.

☉ Decl. $= 1^\circ\ 41'\ 6''$ N.
$p'' = 88^\circ\ 18'\ 54''$
Zeitgl. $= -\ 6'\ 4'',1$ auf w. Zt.

Verfloss. m. Zt. $= 3^h\ 19'\ 50''$

Diff. Ztgl. $1^h = 0'',88$

$$\begin{array}{r} 3{,}3^h \\ \hline 264 \\ 264 \\ \hline 2'',904 \end{array} \quad + \ 3''$$

Verfloss. w. Zt. . . . $= 3^h\ 19'\ 53'' = T,$

$\tfrac{1}{2} T = 1^h\ 39'\ 56'',5$

$\tfrac{1}{2} T = 1^h\ 39'\ 56'',5$	$\log \sin^2 = 9{,}25142$		
$p' = 88^\circ\ 15'\ 40''$	$\log \sin = 9{,}99980$		
$p'' = 88^\circ\ 18'\ 54''$	$\log \sin = 9{,}99981$		
	²) $19{,}25103$		
$\tfrac{1}{2} a = 24^\circ\ 58'\ 24''$	$\log \sin = 9{,}62552$		
2			
$a = 49^\circ\ 56'\ 48''$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}11609$		
$p'' = 88^\circ\ 18'\ 54''$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}00019$		
$p' = 88^\circ\ 15'\ 40''$			
$S = 113^\circ\ 15'\ 41''$	$\log \sin = 9{,}96318$		
$S - p' = 25^\circ\ 0'\ 1''$	$\log \sin = 9{,}62595$		
	²) $19{,}70541$		
$\tfrac{1}{2} B = 44^\circ\ 34'\ 19''$	$\log \cos = 9{,}85270$		
$B = 89^\circ\ 8'\ 38''$			
$a = 49^\circ\ 56'\ 48''$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}11609$		
$Z'' = 40^\circ\ 56'\ 55''$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}18350$		
$Z' = 41^\circ\ 58'\ 50''$			
$S = 66^\circ\ 26'\ 16'',5$	$\log \sin = 9{,}96219$		
$S - Z' = 24^\circ\ 27'\ 26'',5$	$\log \sin = 9{,}61702$		
	²) $19{,}87880$		
$\tfrac{1}{2} C = 29^\circ\ 34'\ 8''$	$\log \cos = 9{,}93940$		
$C = 59^\circ\ 8'\ 16''$			
$B = 89^\circ\ 8'\ 38''$			
$D = 30^\circ\ 0'\ 22''$	$\log \cos = 9{,}93750$		
$Z'' = 40^\circ\ 56'\ 55''$	$\log \operatorname{tang} = 9{,}93838$	$\log \cos = 9{,}87812$	
$n = 36^\circ\ 55'\ 19''$	$\log \operatorname{tang} = 9{,}87588$	$\log \sec = 0{,}09721$	
$p'' = 88^\circ\ 18'\ 54''$			
$p'' - n = 51^\circ\ 23'\ 35''$		$\log \cos = 9{,}79517$	
	$\varphi = 36^\circ\ 7'\ 24''$ N.	$\log \sin = 9{,}77050.$	
$h' = 48^\circ\ 1'\ 10''$			
$p' = 88^\circ\ 15'\ 40''$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}00020$		
$\varphi = 36^\circ\ 7'\ 24''$	$\log \sec = 0{,}09272$		
$S = 86^\circ\ 12'\ 7''$	$\log \cos = 8{,}82112$		
$S - h' = 38^\circ\ 10'\ 57''$	$\log \sin = 9{,}79111$		
	²) $18{,}70515$		
$\tfrac{1}{2} t = 0^h\ 52'\ 3'',5$	$\log \sin = 9{,}35257$		
$t = 1^h\ 44'\ 7'',0$			
12^h			

w. Zt. . . $= 10^h\ 15'\ 53''$

Zeitgl. . $= -\ 6'\ 1''$ auf w. Zt.

mittl. Zt. $= 10^h\ 9'\ 52''$ den 18. September Morgens,

Uhrzeit. $= 11^h\ 12'\ 27''$ den 18. September Morgens,

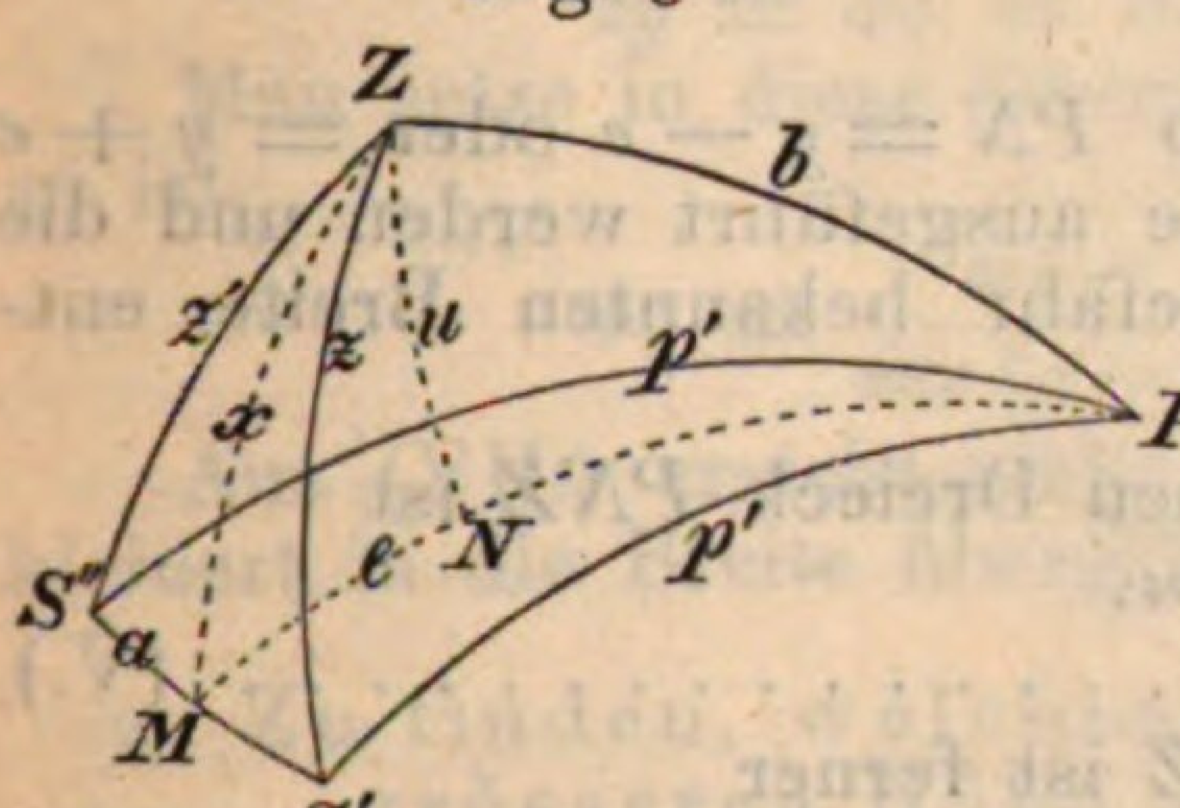
U.-Corr. $= -\ 1^h\ 2'\ 35''$ gegen mittlere Zeit.

Anmerkung. Da diese Berechnung für den practischen Gebrauch zu zeitraubend ist, so enthalten die §§. 174., 177. und 179. indirecte Lösungen, welche leichter auszuführen sind.

§. 174.

Aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen desselben Fixsternes, oder auch eines anderen Gestirnes, dessen Declination in der Zwischenzeit so wenig ändert, dass man ohne erheblichen Fehler eine mittlere Poldistanz bei beiden Höhen annehmen kann, die Breite und Zeit zu finden, wenn die den Höhen entsprechenden Zeiten einer Uhr notirt sind, deren Gang und ungefährer Stand bekannt ist, und wenn man ausserdem die ungefähre Länge des Ortes kennt.

Fig. 86.



Es bezeichne in Fig. 86. Z das Zenith, P den oberen Pol, S' den Ort des beobachteten Gestirnes bei der kleineren und S'' den Ort desselben bei der grösseren Höhe, $PS'' = PS' = p'$ sei die mittlere Poldistanz, welche der Zeit, die in die Mitte der beiden Beobachtungen fällt, entspricht.

Man fälle von P auf den grössten Kreisbogen $S'S''$ die Normale PM, sowie von Z auf PM die Normale ZN, und lege durch M und Z einen grössten Kreisbogen.

Setze ferner $S''M = a$, $PM = y$, $ZM = x$, $ZN = u$, $MN = e$, $\frac{1}{2} \angle S'PS'' = \frac{1}{2} T$, $\angle S'MZ$ oder dessen Supplement $S''MZ = A$, die kleinere Höhe $= h'$ und die grössere Höhe $= h''$, so ist in dem sphärischen bei M rechtwinkligen Dreieck PMS''

$$\sin a = \sin \tfrac{1}{2} T \cdot \sin p', \text{ oder } \operatorname{cosec} a = \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} T \cdot \operatorname{cosec} p' \quad \text{(I.)},$$

$$\cos y = \frac{\cos p'}{\cos a} \quad \text{(II.)}.$$

Aus den sphärischen Dreiecken $MS''Z$ und $MS'Z$ ergiebt sich

$$\sin h' = \cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a \cdot \cos A \text{ und}$$

$$\sin h'' = \cos x \cdot \cos a + \sin x \cdot \sin a \cdot \cos A.$$

Durch Subtrahiren dieser oberen Gleichung von der unteren findet man

$$\sin h'' - \sin h' = 2 \sin a \cdot \sin x \cdot \cos A \quad \text{(a.)};$$

addirt man aber die beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$\sin h'' + \sin h' = 2 \cos x \cdot \cos a \quad \text{(b).}$$

In dem bei N rechtwinkligen sphärischen Dreieck MNZ ist

$$\sin NZ = \sin u = \sin x \cdot \cos A.$$

Man setze $\sin u$ für $\sin x \cdot \cos A$ in (a.), so erhält man

$$\sin h'' - \sin h' = 2 \sin a \cdot \sin u, \text{ und weil}$$

$$\sin h'' - \sin h' = 2 \cos \tfrac{1}{2} (h'' + h') \cdot \sin \tfrac{1}{2} (h'' - h'),$$

so ist auch

$$\sin u = \frac{\cos \frac{1}{2} (h'' + h') \cdot \sin \frac{1}{2} (h'' - h')}{\sin a} \quad \text{(III.)}.$$

In dem bei N rechtwinkligen sphärischen Dreieck MNZ ist

$$\cos x = \cos u \cdot \cos e.$$

Setzt man diesen Werth für $\cos x$ in (b), so erhält man
$\sin h'' + \sin h' = 2 \cos a \cdot \cos u \cdot \cos e$, woraus, weil
$\sin h'' + \sin h' = 2 \sin \frac{1}{2}(h'' + h') \cdot \cos \frac{1}{2}(h'' - h')$ ist,
sich ergiebt

$$\cos e = \frac{\sin \frac{1}{2}(h'' + h') \cdot \cos \frac{1}{2}(h'' - h')}{\cos a \cdot \cos u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{IV.}).$$

Es ist $PN = y - e$, wenn $\angle PMZ$ spitz ist; wenn aber derselbe stumpf ist, so fällt die Normale ZN ausserhalb des Dreiecks MZP, und es ist dann $PN = y + e$; $\angle PMZ$ aber wird nur dann stumpf, wenn die Declination grösser als die gleichnamige Breite und wenn $\cos x > \frac{\cos b}{\cos y}$ ist (siehe §. 136. unter 2). x und b kennt man zwar nicht, aber man kann x nahe $= \frac{z + z'}{2}$ annehmen, b wird immer ungefähr bekannt sein und y kann stets ohne erheblichen Fehler $= p'$ gesetzt werden.

Ist man aber dennoch im Zweifel, ob $PN = y - e$ oder $= y + e$ ist, so muss die Rechnung für beide Fälle ausgeführt werden und die Vergleichung der Resultate mit der ungefähr bekannten Breite entscheidet.

In dem bei N rechtwinkligen sphärischen Dreieck PNZ ist

$$\cos b = \sin \varphi = \cos (y \mp e) \cdot \cos u,$$

oder $\quad \operatorname{cosec} \varphi = \sec (y \mp e) \cdot \sec u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad$ (V.).

In demselben sphärischen Dreieck PNZ ist ferner

$$\operatorname{cotg} \angle NPZ = \operatorname{cotg} (\tfrac{1}{2} T \pm t) = \sin (y \mp e) \cdot \operatorname{cotg} u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{VI.}),$$

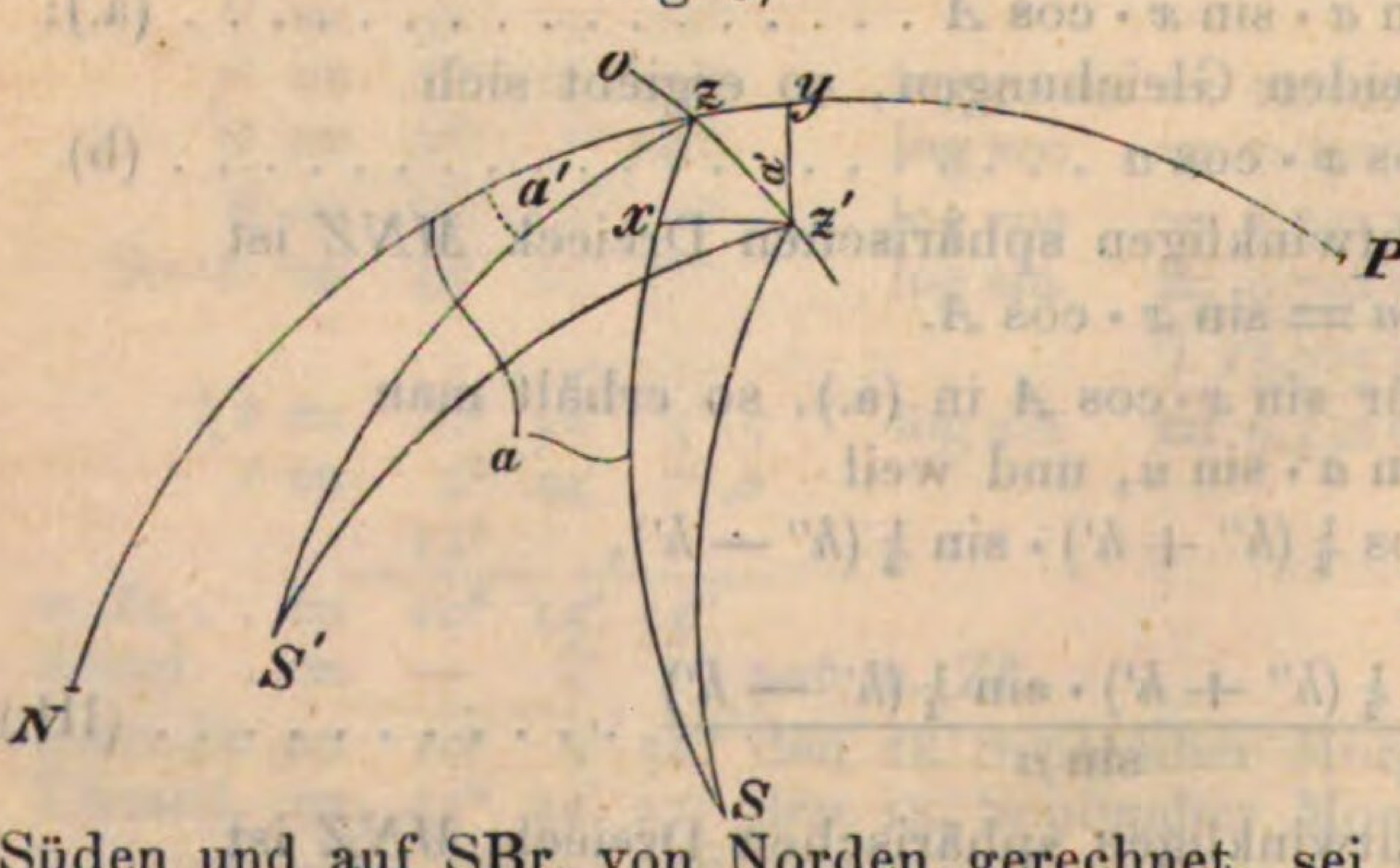
worin t den Stundenwinkel der grösseren Höhe, $\frac{1}{2} T$ die halbverflossene Zeit oder den halben Unterschied der beiden Stundenwinkel bezeichnet, und man erhält $\frac{1}{2} T - t$, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians, hingegen $\frac{1}{2} T + t$, wenn beide Höhen auf derselben Seite des Meridians liegen.

§. 175.

Vom Einfluss eines kleinen Fehlers in einem der gegebenen Theile auf die nach §. 174. berechnete Breite.

1. Zu finden, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der kleineren Höhe auf die berechnete Breite hat.

Fig. 87.



Es sei in Fig. 87. P der obere Pol, z das wirkliche Zenith, S der Ort des Gestirnes bei der kleineren, S' der Ort desselben bei der grösseren Höhe, z' das Zenith, welches die kleinere Höhe um $zx = dh$ fehlerhaft giebt; die grössere Höhe sei aber richtig, also $zS' = z'S'$. $\angle NzS'$, oder das Azimuth der grösseren Höhe auf NBr. von Süden und auf SBr. von Norden gerechnet, sei mit a', sowie das Azimuth der kleineren Höhe, oder der Winkel NzS mit a bezeichnet, und

von z' eine Normale $z'y$ auf den Meridian gefällt; so kann man, weil $z'y$ gegen die Entfernung des Pols vom Zenith immer sehr klein sein muss, ohne erheblichen Fehler annehmen, dass $z'P = yP$, mithin $zy = d\varphi$, der durch den Fehler in der kleineren Höhe entstandene Fehler in der Breite ist.

Man kann ferner, weil $z'S = xS$ und zx gegen zS jedenfalls nur sehr klein ist, das Dreieck zxz' als ein ebenes bei x rechtwinkliges Dreieck ansehen, und es ist in demselben, weil man ebenfalls $\angle S'zz'$ als einen rechten Winkel betrachten kann, $\angle xzz' = 90^\circ - (a - a')$, folglich $\angle xz'z = a - a'$.

Das Dreieck xzz' liefert also

$$zz' = \frac{dh}{\sin(a - a')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a.)}.$$

Es ist ferner $\angle S'zo = 90^\circ$, folglich $\angle Nzo = \angle z'zy = 90^\circ - a'$, und wenn man das Dreieck zyz' als geradlinig und bei y als rechtwinklig betrachtet, so ist $\angle zz'y = a'$ und es ergiebt sich

$$zy = d\varphi = zz' \cdot \sin a'.$$

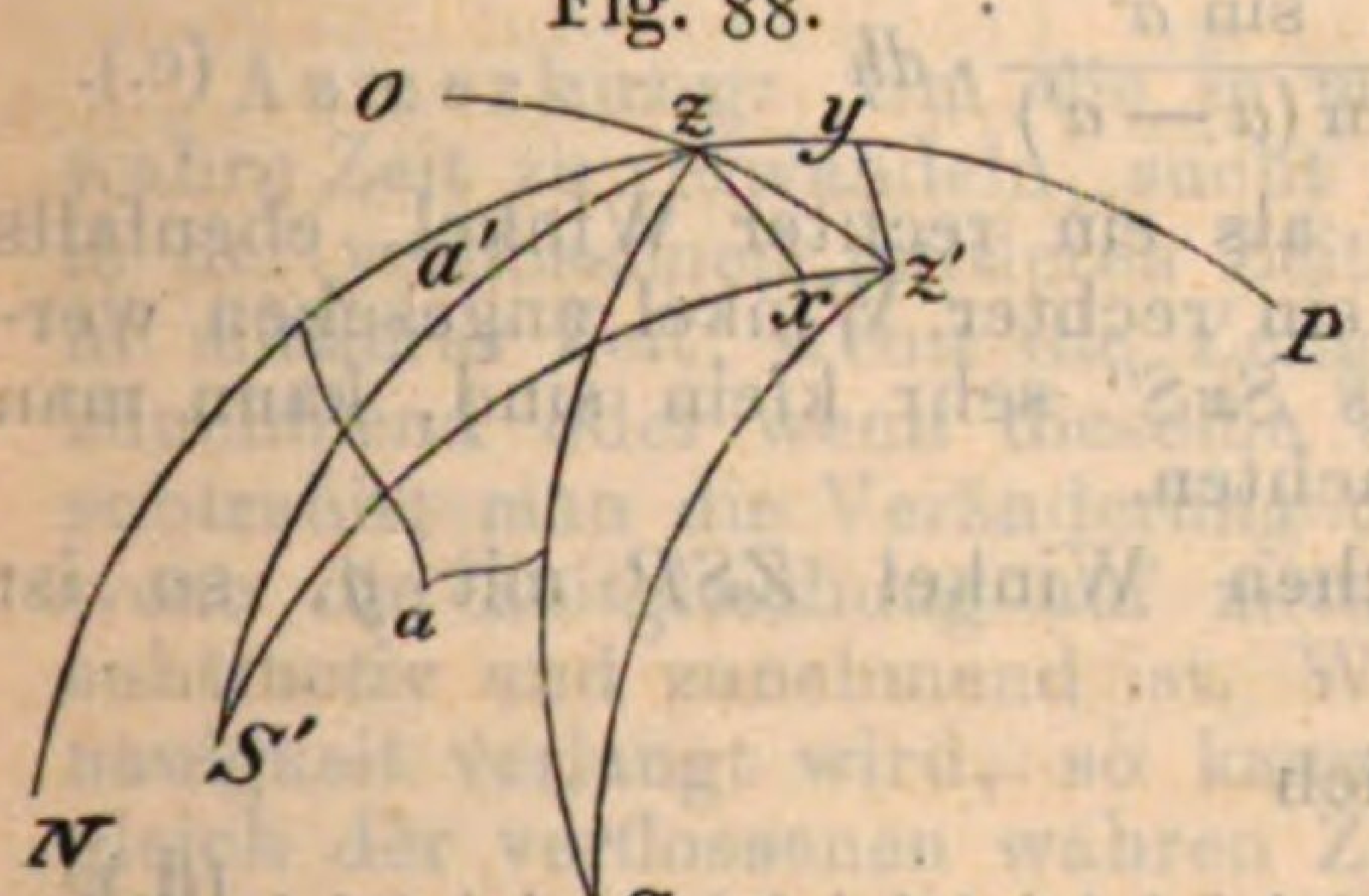
Man setze in diese Gleichung für zz' den in (a.) gefundenen Werth, so ist

$$d\varphi = \frac{\sin a'}{\sin(a - a')} \cdot dh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII.)}.$$

Aus (VII.) ergiebt sich, dass der Fehler der kleineren Höhe verkleinert in die Breite übergeht, wenn $a - a' > a'$ ist.

2. Zu finden, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der grösseren Höhe auf die berechnete Breite hat.

Fig. 88.



Es sei (Fig. 88.) wieder P der obere Pol, z das wirkliche Zenith, S der Ort des Gestirnes bei der kleineren und S' bei der grösseren Höhe, z' aber das Zenith, welches die kleinere Höhe zwar richtig, mithin $zS = z'S$, die grössere Höhe aber um $z'x = dh$ fehlerhaft giebt. $\angle S'zN$, also das Azimuth der grösseren Höhe, sei mit a', und das der kleineren Höhe oder $\angle SzN$ mit a bezeichnet.

Da der Annahme nach $z'x = dh$ nur klein und $S'z = S'x$ gegen dh sehr gross ist, kann man ohne erheblichen Fehler das Dreieck zxz' als ein ebenes bei x rechtwinkliges Dreieck betrachten, in welchem der Winkel $xzz' = (a - a')$ ist; denn der Winkel Szx ist $= \angle S'zx - (a - a') = 90^\circ - (a - a')$, und weil auch $\angle Szz'$ als ein rechter Winkel angesehen werden kann, so ist $\angle xzz' = a - a'$.

Das Dreieck xzz' liefert also

$$zz' = \frac{z'x}{\sin(a - a')} = \frac{dh}{\sin(a - a')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b.)}.$$

Man fälle von z' die Normale $z'y$ auf den Meridian zP, so ist, weil zz' gegen zP jedenfalls sehr klein, $zy = d\varphi =$ dem Fehler in der Breite, entstanden durch $z'x$.

Da ferner $\angle Szz'$ als ein rechter Winkel angesehen werden kann, so ist $\angle ozN = 90^\circ - a = \angle z'zy$ und wenn das Dreieck $z'zy$ als ein ebenes, bei y rechtwinkliges Dreieck betrachtet wird, ergiebt sich aus demselben

$$zy = d\varphi = zz' \cdot \sin a,$$

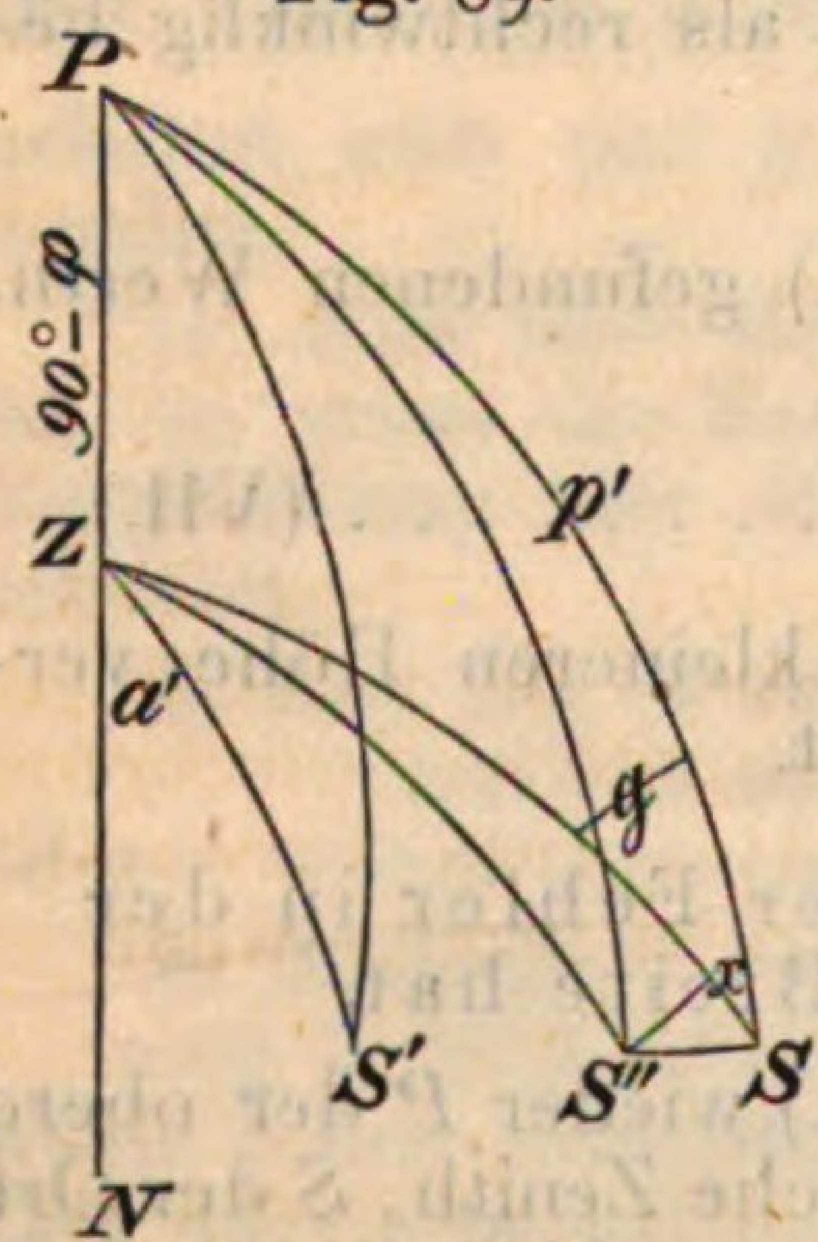
und wenn in diese Gleichung für zz' der in (b.) gefundene Werth gesetzt wird, so ist

$$d\varphi = \frac{\sin a}{\sin(a - a')} \cdot dh \quad \text{(VIII.)}.$$

Aus (VIII.) folgt, dass auch der Fehler in der grösseren Höhe verkleinert in die Breite übergeht, wenn $a - a' > a$ ist, welches nur stattfinden kann, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind.

3. Zu finden, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der zwischen den Beobachtungen verflossenen Zeit auf die berechnete Breite hat.

Fig. 89.



Bezeichnet (Fig. 89.) Z das Zenith, P den oberen Pol, S den Ort des Gestirnes bei der kleineren und S' den bei der grösseren Höhe, so ist $\angle SPS'$, welcher der Kürze wegen mit v bezeichnet werden kann, gleich der zwischen beiden Beobachtungen verflossenen Zeit; ist diese um den kleinen $\angle S''PS = dv$ fehlerhaft, so wird, wenn $Zx = ZS''$ gemacht ist, $Sx = dh =$ dem Fehler in der kleineren Höhe durch den gedachten kleinen Fehler in der Zwischenzeit v bewirkt, wenn man diese Höhe veränderlich setzen will.

Es bezeichne $d\varphi$ den durch dh entstehenden Fehler in der Breite, so ist nach (VII.)

$$d\varphi = \frac{\sin a'}{\sin(a - a')} \cdot dh \quad \text{(c.)}.$$

Da $PS = PS''$, so kann $\angle PSS''$ als ein rechter Winkel, ebenfalls weil $ZS'' = Zx$ ist, auch $\angle SxS''$ als ein rechter Winkel angesehen werden, und da die Seiten des Dreiecks SxS'' sehr klein sind, kann man dasselbe als ein ebenes Dreieck betrachten.

Man bezeichne den parallactischen Winkel ZSP mit g, so ist $\angle S''Sx = 90° - g$ und $\angle SS''x = g$.

Aus dem Dreieck $S''Sx$ ergiebt sich

$$Sx = dh = S''S \cdot \sin g \quad \text{(d.)}.$$

Ferner ergiebt sich aus dem sphärischen Dreieck $S''PS$, $S''S = dv \cdot \sin p'$; also ist, wenn man diesen Werth für SS'' in (d.) setzt

$$dh = dv \cdot \sin p' \cdot \sin g,$$

und wenn man wieder diesen Werth für dh in (c.) setzt, so hat man

$$d\varphi = \frac{\sin a'}{\sin(a - a')} \cdot dv \cdot \sin p' \cdot \sin g \quad \text{(e.)}.$$

Das sphärische Dreieck ZPS liefert aber

$$\cos\varphi \cdot \sin a = \sin p' \cdot \sin g;$$

folglich ist, wenn man diesen Werth für $\sin p' \cdot \sin g$ in (e.) setzt

$$d\varphi = \frac{\sin a' \cdot \sin a}{\sin(a - a')} \cdot dv \cdot \cos\varphi \quad \text{(IX.)}.$$

Aus (IX.) folgt:

1) dass $d\varphi = 0$, wenn $a' = 0$, welches statt hat, wenn die grössere Höhe im Meridian beobachtet ist;
2) dass $d\varphi$ kleiner wird, wenn a' klein und $a - a'$ gross ist;

3) dass $d\varphi$ kleiner wird, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, weil dann $a - a'$ grösser wird;

4) dass $d\varphi$ kleiner wird, wenn die Breite gross ist.

4. In Betreff des Fehlers, der dadurch in der Breite entsteht, dass man die Declination so nimmt, wie dieselbe zur Zeit, welche in der Mitte zwischen beiden Beobachtungen liegt, gewesen ist und damit die Rechnung ausführt, wird auf §. 182. verwiesen.

§. 176.

Regel. Die Breite und Uhrcorrection nach den in §. 174. gegebenen Formeln zu berechnen.

1. Aus den beobachteten Höhen werden die wahren Mittelpunktshöhen gefunden, und wenn der Ort zwischen den Beobachtungen verändert ist, so wird die eine Höhe auf den Ort der anderen Beobachtung reducirt (§. 130.).

2. Die Correction für den Gang der Uhr gegen mittlere Zeit in der Zwischenzeit wird zu dieser addirt, wenn die Uhr zurückbleibt, oder subtrahirt, wenn dieselbe voreilt. Die so gefundene Zwischenzeit in mittlerer Zeit wird in Zeit des beobachteten Gestirnes verwandelt, d. h. wenn die Sonne beobachtet ist, in wahre Sonnenzeit, wenn ein Fixstern in Sternzeit u. s. w.

Anmerkung. Um die in mittlerer Zeit gefundene Zwischenzeit in wahre Zeit zu verwandeln, sucht man die Veränderung der Zeitgleichung in der verflossenen mittleren Zeit und addirt diese zu der Zwischenzeit in mittlerer Zeit, wenn die Zeitgleichung auf mittlere Zeit additiv und zunehmend oder wenn dieselbe subtractiv und abnehmend ist; dagegen subtrahirt man die Veränderung der Zeitgleichung von der Zwischenzeit, wenn die Zeitgleichung auf mittlere Zeit additiv und abnehmend oder subtractiv und zunehmend ist. Wenn indessen nicht eine besondere Genauigkeit verlangt wird, so kann man hier die verflossene mittlere Zeit gleich der verflossenen wahren Zeit annehmen.

Um die Zwischenzeit nach mittlerer Zeit in Sternzeit auszudrücken, wird zu derselben immer die Acceleration (nautische Taf. XXIV.) addirt.

Ist das beobachtete Gestirn aber ein Planet oder der Mond, so ist die Zwischenzeit, in Zeit des Gestirnes ausgedrückt, gleich der Zwischenzeit in Sternzeit + oder — der Veränderung der AR. des Gestirnes in der Zwischenzeit, je nachdem die AR. ab- oder zunimmt; also beim Monde — der Veränderung der AR., weil dieselbe immer zunimmt.

3. Die Poldistanz wird für den Augenblick gesucht, welcher in der Mitte zwischen beiden Beobachtungen liegt. Bei Fixsternen ist dieselbe für den gegebenen Tag zu nehmen.

4. Man addirt log cosec halbe Zwischenzeit und log cosec Poldistanz, die Summe ist log cosec des ersten Bogens a, und a ist stets kleiner als 90° (I.).

5. Demnächst wird log cos Poldistanz und log sec a addirt; die Summe ist log cos des zweiten Bogens y und dieser ist grösser

oder kleiner als 90°, je nachdem die Poldistanz grösser oder kleiner als 90° ist (II.).

6. Darauf addirt man log cosec a, log cos halbe Summe beider Höhen und log sin halbe Differenz derselben; die Summe ist log sin des dritten Bogens u, welcher immer spitz ist (III.).

7. Demnächst wird log sec a, log sec u, log sin halbe Summe und log cos halbe Differenz der Höhen addirt; die Summe ist log cos des vierten Bogens e (IV.).

8. Dann addirt man log sec u und log sec $(y \mp e)$; die Summe ist log cosec der Breite φ *) (V.).

9. Endlich wird log sin $(y \mp e)$ und log cotg u addirt; die Summe ist log cotg der halbverflossenen Zeit $\pm$ des Stundenwinkels der grösseren Höhe, worin das obere Zeichen gilt, wenn die Höhen auf derselben Seite des Meridians liegen, das untere, wenn auf verschiedenen Seiten (VI.).

10. Von dem Stundenwinkel der grösseren Höhe + der halbverflossenen Zeit (wenn beide Höhen auf einer Seite des Meridians liegen) wird die halbverflossene Zeit abgezogen und der Rest ist der Stundenwinkel der grösseren Höhe; die halbverflossene Zeit minus dem Stundenwinkel der grösseren Höhe (wenn beide Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians liegen) von der halbverflossenen Zeit abgezogen, giebt den Stundenwinkel der grösseren Höhe, aus welchem letzteren nach §. 137. die mittlere Zeit und Uhrcorrection gefunden wird.

Anmerkung. Damit der Fehler in der Poldistanz und die Beobachtungsfehler keinen zu erheblichen Einfluss auf das Resultat haben, muss die eine Höhe möglichst nahe am Meridian und die Differenz der Azimuthe beider Höhen grösser als das Azimuth der grösseren Höhe sein.

Am besten ist es, wenn die Differenz der Azimuthe grösser als das Azimuth der kleineren Höhe, und wenn die halbe Zwischenzeit grösser als der Stundenwinkel der grösseren Höhe ist, welches nur statthaben kann, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind.

Beispiel 1. 1852 den 24. October nach dem Besteck auf $55^\circ\ 31'$ NBr. und $17^\circ\ 36'$ OL. v. Greenw., Augeshöhe 15 Fuss Rheinl., I. C. $= + 0'45''$, ungef. U. C. $= + 0^h\ 48'$ gegen mittl. Zeit, Gang der Uhr ungefähr richtig gegen mittl. Zeit, soll aus nachstehender Beobachtung die Breite und Uhrcorrection gefunden werden.

*) Es ist meistens $y - e$ zu nehmen, denn nur, wenn die Declination grösser als die gleichnamige Breite, und wenn der Sinus des Mittels aus den beiden Höhen grösser als $\frac{\sin \varphi}{\cos y}$ ist, wird die Summe genommen. Da man aber die Breite nicht genau kennt und der Sinus des Mittels der Höhen eigentlich der Sinus derjenigen Höhe sein soll, die in der Mitte beider Beobachtungen liegt, so kann es kommen, dass man zweifelhaft ist, ob man $y - e$ oder $y + e$ zu nehmen hat, in welchem Falle die Rechnung mit beiden Grössen auszuführen ist. Aus der Vergleichung dieser beiden Breiten mit der ungefähr bekannten Breite ist dann zu entnehmen, welches die richtige Breite ist.

Wenn die mittlere Poldistanz 90° ist, so ist $a =$ der halbverflossenen Zeit und $y = 90^\circ$.

⦶ S ½ W, gesegelt ONO ¼ O pr. Comp. 4,6 Seemeilen stündlich.

	$10^h\ 2'\ 20''$	$\underline{\odot}$	$21^\circ\ 23'\ 10''$
	$2\ 52$	……	$24\ 10$
	$3\ 22$	$\overline{\odot}$	$21\ 58\ 20$
	$3\ 51$	……	$58\ 40$
	$10^h\ 3'\ 6''$	……	$21^\circ\ 41'\ 5''$
	$10^h\ 48'\ 26''$	I. C. . . = +	$0'\ 45''$
Verfl. Zeit =	$0^h\ 45'\ 20''$	Kimmt. = —	$3'\ 51''$
½ verfl. Zeit =	$0^h\ 22'\ 40''$		$21^\circ\ 37'\ 59''$
	m. Refr. = $2'\ 24''$		
	Parall. = — $8''$	} —	$2'\ 16''$
	⊖ wahre Höhe . . . =		$21^\circ\ 35'\ 43''$
	=		$21^\circ\ 35',7$
	Höhenänd. weg. Segl. = —		$1',5$
	h' =		$21^\circ\ 34',2$.

$10^h\ 47'\ 42''$	$\underline{\odot}$	$22^\circ\ 16'\ 40''$
$48\ 6$		$17\ 10$
$48\ 34$	$\overline{\odot}$	$22\ 50\ 10$
$49\ 21$		$49\ 50$
$10^h\ 48'\ 26''$		$22^\circ\ 33'\ 28''$
I. C. . . . = +		$0'\ 45''$
Kimmt. . = —		$3'\ 51''$
		$22^\circ\ 30'\ 22''$
m. Ref. = $2'\ 18''$		
Parall. = — $8''$	} —	$2'\ 10''$
h'' =		$22^\circ\ 28'\ 12''$
=		$22^\circ\ 28',2$.

Mittel der Uhrzeiten . . = $10^h\ 26'$ Morgens den 24sten,
ungef. U. C. geg. mittl. Zt. = + $48'$
ungef. mittl. Zeit = $11^h\ 14'$ Morgens,
OL. in Zeit = — $1^h\ 11'$
ungef. mittl. Greenw. Zeit = $10^h\ 3'$ Morgens d. 24. Oct.
$1^h\ 57'$ v. d. Mittage d. 24sten,

$\odot$ Decl. = $11^\circ\ 53'\ 26''$ S.
p' = $101^\circ\ 53',4$.
Zeitgl. = — $15'\ 44''$ auf wahre Zeit.

$$\operatorname{cosec} a = \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} T \cdot \operatorname{cosec} p',$$

$$\cos y = \frac{\cos p'}{\cos a},$$

$$\sin u = \frac{\cos \frac{1}{2}(h'' + h') \cdot \sin \frac{1}{2}(h'' - h')}{\sin a},$$

$$\cos e = \frac{\sin \frac{1}{2}(h'' + h') \cdot \cos \frac{1}{2}(h'' - h')}{\cos a \cdot \cos u},$$

$$\operatorname{cosec} \varphi = \sec (y \mp e) \cdot \sec u,$$

$$\operatorname{cotg} (\tfrac{1}{2} T \pm t) = \sin (y \mp e) \cdot \operatorname{cotg} u.$$

$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}$ vfl. Z. = $0^h\ 22'\ 40''$	log cosec	= 1,00550		
$p' = 101^\circ\ 53',4$	log cosec	= 0,00942	log cos	= 9,31396 n
	log cosec a	= 1,01492	log sec	= 0,00204
$h' = 21^\circ\ 34',2$			log sec a	= 0,00204
$h'' = 22^\circ\ 28',2$				
$\frac{h''+h'}{2} = 22^\circ\ 1',2$	log cos	= 9,96710	log sin	= 9,57395
$\frac{h''-h'}{2} = 0^\circ\ 27',0$	log sin	= 7,89509	log cos	= 9,99999
	log sin u	= 8,87711	log sec u	= 0,00124
$e = 67^\circ\ 48',3$			log cos	= 9,57722
$y = 101^\circ\ 56',8$.			log cos	= 9,31600 n
$y - e = 34^\circ\ 8',5$	log sec	= 0,08215	log sin	= 9,74915
	log sec u	= 0,00124	log cotg	= 1,12165
$\varphi = 55^\circ\ 37',1$ N.	log cosec	= 0,08339		0,87080 = log cotg $(\frac{1}{2}T + t)$.

$\frac{1}{2}T + t =$ 0^h 30′ 40″
$\frac{1}{2}T =$ 22′ 40′
t . . . Stundenw. d. gr. Höhe = 0^h 8′ 0″
12^h
w. Zt. = 11^h 52′ 0″
Zeitgl. = — 15′ 44″ a. w. Z.
mittl. Zt = 11^h 36′ 16″
Uhrzeit d. gr. Höhe = 10^h 48′ 26″
U. C. = + 0^h 47′ 50″ g. m. Z.

Anmerkung. Man braucht die Bögen a und u selbst nicht aufzusuchen, sondern kann, um sec a zu finden, schliessen: wie sich die Differenz für 100 Secunden des log cosec zu der Differenz für 100 Secunden des log sec a verhält, so verhält sich die Differenz zwischen dem gegebenen log cosec a und dem nächst grösseren log cosec zu x. Die so gefundene Grösse x wird zum log sec derjenigen Minute addirt, welche zum gedachten nächst grösseren log cosec a gehört, dann erhält man den log sec a. Um z. B. den log sec a zu finden, setzt man:

$$217 : 2 = 89 : x, \text{ giebt } x = 0{,}8.$$

Beispiel 2. 1852 d. 18. Septbr. in Gibraltar auf 5° 19′ WL. von Greenwich, ist nachstehende Beobachtung gemacht; man soll die Breite und Zeit bestimmen. Ungef. U. C. = — 1^h 3′ gegen mittlere Zeit, Gang der Uhr ungefähr 0 gegen mittlere Zeit, I. C. = + 0′ 40″, Barom. 30″,1 Engl., Therm. 76°,5 Fahrenh.

Im Mittel aus 10 Höhen und Zeiten ist gefunden:

Morgens 11^h 12′ 27″ ☉̌ 96° 35′ 0″ Nachm. 2^h 32″ 17″ ☉̌ 97° 35′ 0″
14^h 32′ 17″ I. C. = + 0′ 40″ I. C. = + 0′ 40″
Verfl.m.Zt. = 3^h 19′ 50″ [2]) 96° 35′ 40″ [2]) 97° 35′ 40″
48° 17′ 50″ 48° 47′ 50″

mittl. Refr. = 0′ 51″, C. f. Barom. = + 1″, » » Therm. = — 3″, Parall. . . . = — 6″ } — 0′ 43″ | mittl. Refr. = 0′ 50″, C. f. Barom. = + 1″, » » Therm. = — 3″, Parall. . . . = — 6″ } — 0′ 42″

☉ Halbm. = — 15′ 57″ ☉ Halbm. = + 15′ 57″
h' = 48° 1′ 10″ h'' = 49° 3′ 5″
h'' = 49° 3′ 5″

$\frac{h'' + h'}{2} =$ 48° 32′ 7″,5

$\frac{h'' - h'}{2} =$ 0° 30′ 57″,5.

Mittel der Uhrzeit = 12^h 52′
Ungef. U. C. = — 1^h 3′ gegen mittl. Zeit.
Ungef. mittl. Zeit. . = 11^h 49′
WL. in Zeit = + 0^h 21′
Ung. mittl. Gr. Zt. . = 0^h 10′ d. 18. Septbr. Abends.
☉ Decl. = 1° 42′ 43″ N.
$p' =$ 88° 17′ 17″
Diff. d. Zeitgl. in 1^h = 0″,88
3^h,3
Veränd. der Zeitgl. = 2″,9 in der Zwischenzeit.
Verfl. m. Zt. . . . = 3^h 19′ 50″
Verfl. w. Zt. . . . = 3^h 19′ 53″.

Ungef. mittl. Grw. Zt. zur Mitte d. Beob. = $12^h\ 10'$
halbverflossene Zeit = $1^h\ 40'$
Ungef. mittl. Greenw. Zeit = $1^h\ 50'$ d. 18. Abends.
Zeitgl. = $-\ 6'\ 4'',1$ a. w. Zt.

$\frac{1}{2}$verfl.Z. = 1 39′ 56″,5	log cosec = 0,37429		
$p' = 88^\circ\ 17'\ 17''$	log cosec = 0,00020		log cos = 8,47530
	log cosec a = 0,37449	 log sec a = 0,04263	. . 0,04263
$\frac{h''+h'}{2} = 48^\circ\ 32'\ 7'',5$	log cos = 9,82096	 log sin = 9,87469	
$\frac{h''-h'}{2} = 0^\circ\ 30'\ 57'',5$	log sin = 7,95450	 log cos = 9,99998	
	log sin u = 8,14995	 log sec u = 0,00004	
$e = 34^\circ\ 14'\ 25''$		log cos = 9,91734	
$y = 88^\circ\ 6'\ 41''$			log cos = 8,51793
$y - e = 53^\circ\ 52'\ 16''$	log sec = 0,22944	 log sin = 9,90725	
	log sec u = 0,00004	 log cotg = 1,85001	
$\varphi = 36^\circ\ 7'\ 31''$ N.	log cosec = 0,22948	($\frac{1}{2}$vfl.Z.—t)lg cotg = 1,75726	

$\frac{1}{2}$ verfl. Zeit — Stundenw. d. gr. Höhe = $0^h\ 4'\ 0'',5$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zeit = $1^h\ 39'\ 56'',5$
Stundenw. d. gr. Höhe = $1^h\ 35'\ 56'',0$ = w. Zt. Nachmitt.
Zeitgleich. = $-\ 6'\ 4'',1$ auf w. Zt.
mittl. Zeit = $1^h\ 29'\ 52''$
Uhrzeit = $2^h\ 32'\ 17''$
U.C. = $-\ 1^h\ 2'\ 25''$ geg. mittl. Zt.

§. 177.

Aus gleichzeitig oder auch zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen zweier Gestirne, wovon das eine bedeutend näher am Meridian beobachtet ist als das andere und keines dem Zenith nahe steht; oder auch aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen (eine dem Meridian möglichst nahe) ein und desselben Himmelskörpers die Breite und Zeit näherungsweise zu bestimmen, wenn die ungefähre Breite und Länge des Ortes, sowie der Gang und ungefähre Stand der Beobachtungsuhr bekannt ist.

Wenn die Höhen nicht zu gleicher Zeit beobachtet sind und der Ort des Schiffes in der Zwischenzeit verändert ist, so kann nach §. 130. die erste Höhe auf den zweiten, oder auch die zweite Höhe auf den ersten Beobachtungsort reducirt werden.

Die Poldistanzen des oder der beobachteten Gestirne kann man nach §. 103. für die bekannte Zeit finden.

Es bezeichne ferner h diejenige Höhe, deren Azimuth am grössten ist, p die Poldistanz des Himmelskörpers, φ die ungefähre Breite und t den damit berechneten Stundenwinkel, so ist nach §. 135. (Formel III.), wenn $\frac{\varphi + p + h}{2} = S$ gesetzt wird,

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin (S - h)}{\cos \varphi \cdot \sin p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)}.$$

Nach Formel (XIII.) in §. 136. ist ferner

$$dt = \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos \varphi} \cdot d\varphi, \text{ also } d\varphi = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{cotg} A} \cdot dt = \cos \varphi \cdot \operatorname{tang} A \cdot dt \text{ (a.)},$$

worin dt der Fehler im Stundenwinkel, der aus dem Fehler in der

Breite ($d\varphi$) entsteht, A das Azimuth, auf Nordbreite von Norden und auf Südbreite von Süden gerechnet, φ die ungefähre Breite ist. Es ist $d\varphi$ und dt gleichnamig oder ungleichnamig, je nachdem das Azimuth spitz oder stumpf ist.

Man kann nach §. 173. den Unterschied der Stundenwinkel beider Höhen finden; wenn man auch hier denselben mit T und den Stundenwinkel der am nächsten dem Meridian beobachteten Höhe, welcher mit demselben Fehler dt behaftet ist, mit t_{I} bezeichnet, so ist $t - T = t_{\text{I}}$.

Oder man kann auch für t die entsprechende mittlere Zeit finden und addirt zu derselben oder subtrahirt davon die verflossene mittlere Zeit, je nachdem die zu t gehörige Höhe zuerst oder zuletzt beobachtet ist, so hat man die mit demselben Fehler wie t behaftete mittlere Zeit der zu t_{I} gehörigen Höhe, und aus dieser kann dann t_{I} gefunden werden.

Es sei noch A_{I} das Azimuth (wie vorhin gerechnet) der am nächsten dem Meridian beobachteten Höhe h_{I}, deren Complement z_{I}, und p_{I} die zugehörige Poldistanz, φ_{I} die aus t_{I}, z_{I} und p_{I} berechnete Breite, so ist nach §. 164. Formel (I.)

$$\sin A_{\text{I}} = \frac{\sin t_{\text{I}} \cdot \sin p_{\text{I}}}{\sin z_{\text{I}}} = \sin t_{\text{I}} \cdot \sin p_{\text{I}} \cdot \operatorname{cosec} z_{\text{I}} \;\ldots\ldots\; \text{(II.)}.$$

Nach Formel (II.) §. 164. ist ferner

$$\operatorname{cotg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi_{\text{I}}) = \sin\tfrac{1}{2}(A_{\text{I}} + t_{\text{I}}) \cdot \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(A_{\text{I}} - t_{\text{I}}) \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p_{\text{I}} - z_{\text{I}}) \;\ldots\; \text{(III.)},$$

folglich $\varphi_{\text{I}} = 2\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi_{\text{I}}) - 90^\circ$.

Da aber t_{I} mit demselben Fehler wie t behaftet ist, so ergiebt sich aus (a.), wenn man den Fehler in φ_{I} mit $d\varphi_{\text{I}}$ bezeichnet,

$$d\varphi_{\text{I}} = \cos\varphi_{\text{I}} \cdot \operatorname{tang} A_{\text{I}} \cdot dt \;\ldots\ldots\ldots\; \text{(b.)},$$

und es muss $d\varphi_{\text{I}} < d\varphi$ sein, wenn beide Höhen auf derselben Seite des ersten Verticals liegen, weil der Voraussetzung nach h_{I} näher am Meridian als h beobachtet ist, folglich, wenn die Azimuthe stumpf sind, auch $A < A_{\text{I}}$, oder wenn spitz, $A > A_{\text{I}}$. Liegen aber die Höhen auf verschiedenen Seiten des ersten Verticals, so ist $d\varphi_{\text{I}} < d\varphi$, wenn $\operatorname{tang} A_{\text{I}} < \operatorname{tang} A$ ist.

Es hat also φ_{I} sich um $d\varphi - d\varphi_{\text{I}} = \varphi_{\text{I}} - \varphi$ der richtigen Breite, welche φ_{II} sei, genähert.

Es bezeichne ferner n den Fehler, welcher durch einen Fehler von einer Minute in der ungefähren Breite (φ) im Stundenwinkel t verursacht wird, und n_{I} den Fehler, welcher im Stundenwinkel t_{I} entstehen würde, wenn man denselben durch eine um eine Minute falsche Breite ermitteln wollte; so ist unter der Voraussetzung, dass, für so viele Minuten als die Breite, womit t bestimmt, fehlerhaft sein kann, der Fehler im Stundenwinkel dem in der Breite ($d\varphi$) proportional ist; nämlich:

$$dt = d\varphi \cdot n \text{ und } \frac{d\varphi \cdot n}{n_{\text{I}}} = d\varphi_{\text{I}} = \text{dem durch } dt \text{ in } \varphi_{\text{I}} \text{ ver-}$$

ursachten Fehler.

Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich

$$n \cdot d\varphi = n_{\text{I}} \cdot d\varphi_{\text{I}}, \text{ also}$$
$$n_{\text{I}} : n = d\varphi : d\varphi_{\text{I}} \text{ und}$$
$$n_{\text{I}} - n : n = d\varphi - d\varphi_{\text{I}} : d\varphi_{\text{I}}.$$

Demnach ist

$$d\varphi_{\text{I}} = \frac{n \cdot (d\varphi - d\varphi_{\text{I}})}{n_{\text{I}} - n} = \frac{n \cdot (\varphi_{\text{I}} - \varphi)}{n_{\text{I}} - n} \;\ldots\ldots\ldots\; \text{(IV.)},$$

wonach $d\varphi_{\text{I}}$ gefunden werden kann, wobei jedoch auf die algebraischen Zeichen Rücksicht genommen werden muss und zu beachten ist, dass n_{I}

das entgegengesetzte Zeichen erhält, als dasjenige, welches ihm zukommt, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind. $d\varphi$ mit Rücksicht auf das algebraische Zeichen, auf φ_{I} angewandt, giebt φ_{II}.

Um zu finden, ob n und n_{I} positiv oder negativ, kann man annehmen, dass der Fehler von einer Minute in φ stets positiv sei; denn es kommt nur darauf an, zu wissen, ob n und n_{I} gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

Hat man diesemnach φ_{II} gefunden, so ist, wenn t' den der ersten Höhe entsprechenden richtigen Stundenwinkel bezeichnet, $t' = t + n \cdot d\varphi$, wobei auf die Zeichen von n und $d\varphi$ Rücksicht zu nehmen ist.

Will man aber $n \cdot d\varphi$ auf die nach t gefundene, ungefähr richtige Zeit anwenden, so hat man, wenn der Stundenwinkel westlich vom Meridian ist, ebenfalls die algebraische Summe zu nehmen; ist der Stundenwinkel aber östlich, so giebt die algebraische Differenz der ungefähr richtigen Zeit und $n \cdot d\varphi$ die richtige Zeit.

Diese Methode ist stets anzuwenden, wenn die Differenz zwischen tang A und tang A_{I} bedeutend und wenn keine der Höhen nahe am Zenith beobachtet ist.

Wenn aber $A = A_{\text{I}}$, oder wenn eine Höhe nahe am Zenith beobachtet ist, so findet im ersten Falle keine Annäherung der Breite statt, und im zweiten Falle ist die bei dieser Methode gemachte Annahme (nämlich, wenn n für eine Minute der Breite gefunden ist, dass dann der durch $d\varphi$ entstehende Fehler im Stundenwinkel $= n \cdot d\varphi$ sei) nicht ohne erheblichen Fehler gestattet.

Je kleiner also die Differenz der Tangenten der Azimuthe, oder je näher eine Höhe am Zenith beobachtet ist, desto kleiner muss der Fehler in der ungefähren Breite sein, um ein zuverlässiges Resultat erhalten zu können.

Die günstigsten Umstände der Beobachtung sind, wenn eine Höhe nahe am ersten Vertical und die andere nahe am Meridian beobachtet ist. Dann aber ist es das Beste, erstere zur Zeit- und letztere zur Breitenbestimmung zu benutzen.

§. 178.

Regel. Zur Berechnung der Breite und Uhrcorrection nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Methode.

1. Aus den beobachteten Höhen finde die wahren Höhen, und wenn der Beobachtungsort in der Zwischenzeit verändert ist, reducire die eine Höhe auf den Ort der anderen Beobachtung (§. 130.). Zu dieser Reduction ist es erforderlich, dass das Azimuth des Gestirnes bei derjenigen Höhe, welche reducirt werden soll, durch Peilung mit dem Compass ermittelt ist, wenn man es nicht durch Rechnung finden will, und dass man ausserdem den Gesammt-Curs und die Distanz in der Zwischenzeit kennt (siehe §. 130.).

2. Die Poldistanzen und die Rectascensionen des oder der beobachteten Gestirne suche für die Zeiten der Beobachtung*) (§. 103.).

3. Suche nach §. 135. Formel (III.) den Stundenwinkel derjenigen Höhe, welche am weitesten vom Meridian (am nächsten am ersten Vertical) beobachtet ist und nach der in §. 140. unter 2. gegebenen Regel die Wirkung von einer Minute zu grossen Breite auf den Stundenwinkel.

*) Wenn das beobachtete Gestirn die Sonne oder ein Fixstern ist, braucht man nicht AR. zu finden, indem man, wie später erklärt werden wird, ohne dieselbe leichter zum Ziel kommen kann.

4. Finde für den gefundenen Stundenwinkel der kleineren Höhe (der Höhe, welche am weitesten vom Meridian beobachtet ist) die entsprechende mittlere Zeit und addire zu oder subtrahire von derselben die verflossene mittlere Zeit zwischen den beobachteten Höhen, je nachdem die grössere Höhe (Höhe, welche am nächsten am Meridian beobachtet ist) später oder früher als die am weitesten vom Meridian gemessene Höhe beobachtet wurde. Für diese ungefähre mittlere Zeit der am nächsten dem Meridian beobachteten Höhe suche den Stundenwinkel (§. 134.).

5. Addire log sin ungefähren Stundenwinkel der am nächsten dem Meridian beobachteten Höhe, log sin zugehörige Poldistanz und log cosec Zenithdistanz, die Summe ist log sin Azimuth, welches, vom Meridian des oberen Pols gerechnet, stets stumpf ist, wenn die Poldistanz $> 90°$ ist, auch wenn die Poldistanz $< 90°$ und die Declination kleiner als die Breite ist.*)

Das Azimuth wird in Zeitmaass aufgesucht.

6. Addire ferner log sin der halben Summe des Azimuths und Stundenwinkels der am nächsten dem Meridian beobachteten Höhe, log cosec der halben Differenz des Azimuths und Stundenwinkels und log tang für die halbe Differenz der Poldistanz und Zenithdistanz der am nächsten dem Meridian beobachteten Höhe; die Summe ist log cotg von (45° + der halben genäherten Breite); der entsprechende Bogen doppelt genommen weniger 90° giebt die genäherte Breite des Ortes, an welchem die Höhen beobachtet oder auf welchen sie reducirt sind.

7. Neben log sin des Azimuths schreibe log cotg auf vier Decimalstellen und darunter den bei Berechnung des Stundenwinkels schon gefundenen log sec der ungefähren Breite; für die Summe dieser Logarithmen suche die Zahl, welche gleich der Veränderung in Bogenminuten ist, die im Stundenwinkel der am nächsten dem Meridian beobachteten Höhe durch einen Fehler von einer Minute in der Breite verursacht wird. Diese Grösse wird immer, wenn beide Höhen auf einer Seite des Meridians beobachtet sind, mit + bezeichnet, wenn das Azimuth kleiner als 90°, mit —, wenn dasselbe grösser als 90°; erhält aber das umgekehrte Zeichen, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, also +, wenn das Azimuth grösser als 90°, und —, wenn dasselbe kleiner als 90° ist.

8. Multiplicire die nach 3. gefundene Veränderung des Stundenwinkels der am nächsten dem ersten Vertical beobachteten Höhe mit der genäherten minus der ungefähren Breite, gieb dem Product das ihm zukommende algebraische Zeichen, und dividire dieses Product mit der algebraischen Differenz der Veränderung des Stundenwinkels der am nächsten dem Meridian beobachteten minus der Veränderung des Stundenwinkels der am nächsten dem ersten Vertical beobachteten Höhe, und gieb dem Quotienten ebenfalls das ihm zukommende algebraische Zeichen. Dieser Quotient wird algebraisch zu der genäherten Breite addirt (d. h. addirt, wenn mit + und subtrahirt, wenn mit — bezeichnet); so ist das Resultat die richtige Breite des Ortes der Beobachtung.

9. Multiplicire ferner die nach 3. für eine Minute zu grosse Breite gefundene Veränderung des Stundenwinkels der kleineren Höhe mit der richtigen minus der ungefähren Breite, mal 4, und gieb dem Producte das

*) Wenn die Declination kleiner als die Breite und beide gleichnamig sind, so kann das Azimuth zwar spitz oder stumpf sein; wenn jedoch die Beobachtung günstig liegen soll, muss das Azimuth immer stumpf sein, wenn nicht etwa die Höhe nahe am Meridian unter dem Pol beobachtet ist.

ihm zukommende algebraische Zeichen. Dieses Product, mit Rücksicht auf das Zeichen, zu dem gefundenen Stundenwinkel der am nächsten dem ersten Vertical beobachteten Höhe addirt, giebt den richtigen Stundenwinkel, wonach die Uhrcorrection gefunden wird (§. 137.).

Hat man aber für den Stundenwinkel die ungefähre richtige Zeit gefunden, so giebt das gedachte Product, mit Rücksicht auf das Zeichen, von dieser Zeit abgezogen, wenn der Stundenwinkel östlich vom Meridian ist, oder zu der ungefähren richtigen Zeit addirt, wenn der Stundenwinkel westlich vom Meridian lag, ebenfalls die richtige Zeit der Höhe entsprechend.

Beispiel. Die Aufgabe sei dieselbe wie im Beispiel 1. in §. 173. Es ist also

Morgens $8^h\,39'\,36''$ ⊖ w. Höhe bericht. für Zenithänd. $= 17°\;5'\,44''$
und um $8^h\,56'\;9''$ ♀ w. Höhe $= 60°\,57'\,51''$
♀ Z. D. $= 29°\;2'\;9''$.

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin (S-h)}{\cos \varphi \cdot \sin p}}.$$

$$\sin A = \sin t_1 \cdot \sin p_1 \cdot \operatorname{cosec} z_1.$$
$$\operatorname{cotg} (45° + \tfrac{1}{2}\varphi_1) = \sin \tfrac{1}{2}(A_1 + t_1) \cdot \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(A_1 - t_1) \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p_1 - z_1).$$
$$\varphi_1 = 2\,(45° + \tfrac{1}{2}\varphi_1) - 90°.$$
$$n_1 = +1' \cdot \operatorname{cotg} A_1 \cdot \sec \varphi.$$
$$d\varphi_1 = \frac{n \cdot (\varphi_1 - \varphi)}{n_1 - n}.$$

h . . ⊖ wh. H. $= 17°\;5',7$

p . . ⊙ P. D. $= +94°\,25',8$ log cosec $= 0{,}00130$

φ . . ungef. Br. $= +36°\,48',0$ log sec $= 0{,}09651$ Diff. für $100'' = +157$

$S = 74°\;9',8$ log cos $= 9{,}43600$ ½ » » » $= -371$

$S-h = 57°\;4',1$ log sin $= 9{,}92392$ ½ » » » $= +68$

²) $19{,}45773$

$\tfrac{1}{2}t = 2^h\;9'\,33''$ log sin $= 9{,}72886$ Diff. für $100'' = 332\,|\,-146\,| = -0',44 = n.$

2 — 1328 — $-6',9 = \varphi_{II} - \varphi.$

$t = 4^h\,19'\;6''$ — 1320 — 396

12^h — 264

wahre Zeit $= 7^h\,40'\,54''$ — $3',036$ Bog.

Zeitgl. $= -\;11'\,19''$ auf wahre Zeit, — 4

mittl. Zeit $= 7^h\,29'\,35''$. — $dt = +12'',144$ Zeit, weil φ zu gross ist.

Verfl. mittl. Zeit $= 0^h\,16'\,33''$

m. ast. Z. als ♀ beob. $= 19^h\,46'\;8''$

m. ⊙ AR. $= 12^h\,52'\,30''$

✱ Zeit $= 8^h\,38'\,38''$

♀ AR. $= 9^h\,47'\,35''$

♀ t_1 Ost v. Merid. $= 1^h\;8'\,57''$ log sin $= 9{,}47178$

z_1 ♀ Z. D. $= 29°\;2',1$ log cosec $= 0{,}31395$

p_1 ♀ P. D. $= 77°\,50',8$ log sin $= 0{,}99016$

A_1 ♀ Azim. $=$ N. $9^h\,33'\,25''$ O. log sin $= 9{,}77589$ log cotg $= 0{,}1284$

♀ $t_1 = 1^h\;8'\,57''$ log sec Br. $= 0{,}0965$

$\tfrac{1}{2}(A_1 + t_1)$ $S = 5^h\,21'\,11''$ log sin $= 9{,}99374$ log Vrd. d. Stw. $= 0{,}2249$ Zl. $= -1',68 = n_1$

$\tfrac{1}{2}(A_1 - t_1)$. . ½ Diff. $= 4^h\,12'\,14''$ log cosec $= 0{,}04989$ Vrd. d. Stw. d. ⊙ $= -0',44$ — $-0',44 = n$

Diff. d. Pol- u. Z. D. $= 48°\,48',7$ — $-5',1$ — $-1',24 = n_1 - n$

$\tfrac{1}{2}(p_1 - z_1) = 24°\,24',35$ log tang $= 9{,}65681$ — 44

$(45° + \tfrac{1}{2}\varphi_1) = 63°\,21',45$ log cotg $= 9{,}70044$ — 220

2 — $-1{,}24\,|\,2{,}244\,| = -1',8$ Corr. d. Breite.

φ_I . . genäherte Br. $= 36°\,42',9$ Nord ($-\,36°\,48' = -5',1 = \varphi_I - \varphi$). — 1,24

$d\varphi_I$ Correction $= -\;1',8$ — 1004

φ_{II} . . . richtige Br. $= 36°\,41',1$ Nord ($-\,36°\,48' = -6',9 = \varphi_{II} - \varphi$). — 992

Ungef. mittl. Zeit wie vor =	$7^h\ 29'\ 35''$
Correction = +	$12''$ auf den Stundenw.; also hier — auf d. Zeit.
Richtige mittl. Zeit =	$7^h\ 29'\ 23''$
Die Uhr zeigte =	$8^h\ 39'\ 36''$
U. C. =	$-1^h\ 10'\ 13''$ gegen mittl. Zeit.

§. 179.

Aus, zu gleichen oder verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen zweier Gestirne, deren Azimuthe bedeutend differiren und wovon keine Höhe dem Zenith und dem Meridian nahe, oder beide auf verschiedenen Seiten des Meridians, dem ersten Vertical nicht nahe, beobachtet sind; oder auch aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen eines Gestirnes, wenn ebenfalls keine der Höhen dem Zenith und dem Meridian, wie auch, wenn auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet, nicht beide Höhen dem ersten Vertical nahe liegen, näherungsweise die Breite und Zeit zu bestimmen, wenn die ungefähre Breite und Länge des Ortes, sowie der Gang und ungefähre Stand der Uhr, nach welcher die den Höhen entsprechenden Zeiten notirt sind, bekannt ist.

Ist der Beobachtungsort in der Zwischenzeit verändert, so kann man die eine Höhe auf den Ort der anderen Beobachtung reduciren (§. 130.), für welchen dann auch die ungefähre Breite und Länge zu berechnen ist.

Nach Formel (III.) in §. 135. kann man ferner mit Hülfe der ungefähr bekannten Breite und mit den nach der ungefähr bekannten Zeit ermittelten Poldistanzen der Gestirne aus den wahren Höhen den Stundenwinkel für jede Beobachtung und ausserdem, nach der in §. 140. unter 2. gegebenen Regel, durch die Differenzen der zur Berechnung des Stundenwinkels gebrauchten Logarithmen der trigonometrischen Functionen den Fehler des Stundenwinkels für eine Minute zu grosse Breite finden, und es ergiebt sich zugleich aus den algebraischen Zeichen dieser Fehler, ob der berechnete Stundenwinkel dadurch unter Annahme, dass die Breite zu gross war, zu gross oder zu klein gefunden ist.

Liegen nun die berechneten Stundenwinkel an derselben Seite des Meridians, so ist ihre Differenz, liegen sie aber an verschiedenen Seiten des Meridians, so ist ihre Summe der Winkel am Pol, welchen die Stundenkreise des oder der beobachteten Gestirne in den Beobachtungsmomenten mit einander machten, der jedoch mit der Summe oder Differenz der Fehler, welche durch die etwa verkehrt angenommene Breite in den Stundenwinkeln entstanden sind, behaftet ist.

Es ergiebt sich, dass der Einfluss der Fehler in den berechneten Stundenwinkeln auf den gedachten Winkel am Pol gleich der algebraischen Differenz des Fehlers im östlicher liegenden Stundenwinkel minus des Fehlers im westlichern Stundenwinkel ist, wobei aber zu beachten, dass die Fehler der Stundenwinkel, welche auf der westlichen Seite des Meridians liegen, das entgegengesetzte Zeichen erhalten.

Unter Voraussetzung, dass die Uhrzeiten der Beobachtungen richtig notirt sind und man den Gang der Uhr kennt, findet man den richtigen Winkel am Pol, welchen die Stundenkreise beider Beobachtungen mit einander machen, gleich der verflossenen Zeit nach der Uhr für den bekannten Gang corrigirt und in Zeit des beobachteten Gestirnes ausgedrückt, oder gleich der Differenz der Rectascension bei der zuerst beobachteten Höhe plus der verflossenen Zeit in Sternzeit ausgedrückt und der AR. des Gestirnes bei der zuletzt beobachteten Höhe.

Subtrahirt man nun den durch die berechneten Stundenwinkel gefundenen Winkel am Pol von dem durch die verflossene Zeit und die Rectascensionen des Gestirnes oder der beobachteten Gestirne gefundenen richtigen Winkel am Pol, so muss ersterer zu gross oder zu klein sein, je nachdem das algebraische Zeichen der Differenz — oder + wird.

Hat man ferner, wie vorher erklärt, für eine Minute zu grosse Breite den dadurch im gedachten Winkel am Pol entstandenen Fehler (mit + oder — bezeichnet, je nachdem der Winkel am Pol zu klein oder zu gross ist) schon gefunden, so giebt (unter Voraussetzung, dass der Einfluss der etwa fehlerhaft angenommenen Breite auf die berechneten Stundenwinkel dem für eine Minute zu grosser Breite gefundenen Einfluss proportional sei), wenn man den Fehler im berechneten Winkel am Pol durch den in diesem Winkel für eine Minute zu grosse Breite entstehenden Fehler dividirt, der Quotient an, um wie viele Minuten die ungefähre Breite zu klein oder zu gross gewesen ist, je nachdem derselbe das Zeichen + oder — erhält. Folglich erhält man die richtige Breite, wenn man zu der ungefähren Breite (diese positiv betrachtet) den gedachten Quotienten algebraisch addirt.

Aus dem Vorhergehenden ist ferner klar, dass man den richtigen Stundenwinkel erhält, wenn man zu dem nach der ungefähren Breite berechneten Stundenwinkel (östlich als positiv und westlich als negativ betrachtet) das Product aus der auf die ungefähre Breite anzuwendenden Correction mit dem für eine Minute zu grosse Breite im Stundenwinkel ermittelten Fehler*) algebraisch addirt.

Von der vortheilhaftesten Zeit zur Beobachtung der Höhen.

Weil nach dieser Methode der Fehler in der ungefähren Breite durch den Einfluss, welchen dieser auf die berechneten Stundenwinkel hat, ermittelt wird, so folgt daraus, dass man, um von dieser Methode Anwendung machen zu dürfen, nie beide Höhen beobachten darf, wenn der etwaige Fehler in der Breite keinen oder einen nur sehr geringen Einfluss auf die Differenzen der Stundenwinkel hat. Da indessen angenommen wird, dass der Einfluss des Fehlers von einer Minute zu grosser Breite auf die Stundenwinkel dem Einfluss eines Fehlers von mehreren Minuten zu grosser oder zu kleiner Breite proportional sei, und dieses sich bei Stundenwinkeln, deren Azimuth 0 oder 180° ist, nicht ohne erheblichen Fehler voraussetzen lässt, so folgt daraus, dass keine der Höhen nahe am Meridian beobachtet sein darf, um daraus die Breite ohne öftere Wiederholung mit Sicherheit nach dieser Methode ermitteln zu können.

Liegen beide Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians, aber auf derselben Seite des ersten Verticals, so ist es am vortheilhaftesten, wenn beide Azimuthe 135° oder auch 45° sind.

Sind beide Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians und des ersten Verticals beobachtet, so muss eine Höhe nahe am ersten Vertical liegen und die andere circa 45° von demselben entfernt sein, oder jedenfalls nicht nahe daran liegen.

Diese Methode ist nicht anzuwenden:

1. Wenn die Differenz der Tangenten der Azimuthe sehr klein ist.
2. Wenn beide Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians und

*) Der Fehler im westlichen Stundenwinkel behält hier, wie vorher bemerkt, das entgegengesetzte Zeichen, das ein Fehler im östlichen Stundenwinkel unter denselben Umständen erhalten würde.

ersten Verticals liegen und das Supplement des spitzen Azimuths gleich oder nahe gleich dem stumpfen Azimuth ist.

3. Wenn beide Höhen nahe am ersten Vertical beobachtet sind.

4. Zur Ermittelung des Stundenwinkels ist es besser, wenn eine Höhe möglichst nahe am ersten Vertical beobachtet ist. Man findet den Stundenwinkel auch am richtigsten aus der Höhe, welche am nächsten dem ersten Vertical liegt.

§. 180.

Regel. Die Breite und Uhrcorrection nach der in §. 179. beschriebenen Methode zu finden.

1. Aus den beobachteten Höhen finde die wahren Mittelpunktshöhen, sowie mittelst der ungefähr bekannten Zeiten die Poldistanzen der oder des beobachteten Gestirnes.

2. Ist der Ort der Beobachtung in der Zwischenzeit verändert, so reducire die eine Höhe auf den Ort der anderen Beobachtung, wozu erforderlich ist, dass das Gestirn bei der Höhe, welche reducirt werden soll, gepeilt wird, und dass man den General-Curs und die Distanz in der Zwischenzeit kennt (§. 130.). Auch das Besteck ist für den Ort aufzumachen, auf welchen die eine Höhe reducirt ist, für den dann auch die Breite und Uhrcorrection gefunden wird.

3. Aus der ungefähr bekannten Breite, den wahren Höhen und Poldistanzen finde nach Formel (III.) in §. 135. den Stundenwinkel für jede Höhe.

Neben log sec Breite schreibe zugleich die Differenz dieser Logarithmen für 100 Secunden und bezeichne dieselbe mit +; ferner neben log cos der halben Summe schreibe die halbe Differenz des log für 100 Secunden und bezeichne dieselbe mit — oder +, je nachdem dieser Logarithme mit dem Bogen ab- oder zunimmt, und gegen den log sin der Differenz von der halben Summe und der Höhe schreibe die halbe Differenz des log sin von 100 Secunden und bezeichne dieselbe mit +. Diese aufgeschriebenen drei Differenzen addire bei jedem Stundenwinkel algebraisch, multiplicire die Summe mit 4 und dividire jedes Product mit der dazu gehörigen Differenz für 100 Secunden vom log sinus des halben Stundenwinkels, welche stets mit + zu bezeichnen ist, und gebe dem Quotienten das ihm zukommende algebraische Zeichen.

Dieser Quotient ist der Einfluss in Zeitsecunden, welchen eine Minute zu grosse Breite auf den Stundenwinkel hat. Liegen aber beide Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians, so erhält der Einfluss von einer Minute zu grosser Breite auf den westlichen Stundenwinkel das entgegengesetzte Zeichen, welches auch der Fall ist mit beiden Stundenwinkeln, wenn beide westlich vom Meridian liegen, weil man die westlichen Stundenwinkel selbst hier immer als negativ betrachtet.

4. Liegen beide Stundenwinkel auf derselben Seite des Meridians, so nimm ihre Differenz; liegen sie aber auf verschiedenen Seiten des Meridians, so addire dieselben und nenne diese Differenz oder Summe den ungefähren Winkel am Pol.*)

*) Diese Regel lässt sich auch wie folgt geben: Bezeichne die östlich vom Meridian liegenden Stundenwinkel mit + und die westlich vom Meridian liegenden mit —; subtrahire stets algebraisch den westlichen Stundenwinkel von dem östlichen und nenne den Rest den ungefähren Winkel am Pol.

5. Zu oder von der verflossenen Zeit nach der Uhr zwischen beiden Höhen addire oder subtrahire die Correction für den Gang der Uhr gegen mittlere Zeit, je nachdem die Uhr zurückbleibt oder voreilt, und drücke diese verflossene mittlere Zeit in Zeitmaass des beobachteten Gestirns aus. Sind aber zwei verschiedene Gestirne beobachtet, so addire zu der AR. des zuerst beobachteten Gestirns die verflossene Zeit in Sternzeit, nimm die Differenz zwischen dieser Summe und der AR. des zuletzt beobachteten Gestirns, und nenne diesen den genauen Winkel am Pol.

6. Von dem genauen Winkel am Pol subtrahire den ungefähren Winkel am Pol algebraisch, und drücke den Rest in Zeitsecunden aus.

7. Subtrahire den nach 3. gefundenen Einfluss von einer Minute zu grosser Breite des westlicheren von dem des östlicheren Stundenwinkels, und gieb der Differenz das ihr zukommende algebraische Zeichen. (Der Stundenwinkel, dessen Azimuth auf der östlichen Seite des Meridians, vom Meridian des oberen Pols gerechnet, am kleinsten ist, wird als der östlichere Stundenwinkel, sowie der Stundenwinkel, dessen Azimuth auf der westlichen Seite des Meridians am kleinsten ist, als der westlichere Stundenwinkel angesehen.)

8. Mit der nach 7. gefundenen Differenz des Einflusses von einer Minute zu grosser Breite auf den Winkel am Pol dividire in die nach 6. gefundene Differenz des genauen Winkels am Pol und des ungefähren Winkels am Pol, und gieb dem Quotienten das ihm zukommende algebraische Zeichen, so ist dieser die Correction in Minuten, welche zur ungefähren Breite (die Breite als positiv betrachtet) algebraisch addirt, die genäherte Breite giebt.

9. Weicht die genäherte Breite mehr als 10 Minuten von der ungefähren Breite ab, so muss die Rechnung wiederholt werden, indem man die genäherte Breite als die ungefähre Breite annimmt.

10. Mit der zuletzt gefundenen Correction der ungefähren Breite in Minuten multiplicire den Einfluss von einer Minute zu grosser Breite auf den Stundenwinkel, welcher am nächsten dem ersten Vertical liegt, gieb dem Product, welches man in Secunden erhält, das ihm zukommende algebraische Zeichen und addire dasselbe algebraisch zu dem Stundenwinkel, so ist die Summe der richtige Stundenwinkel, wonach die mittlere Zeit und die Uhrcorrection gefunden wird (§. 137.).

Hierbei ist zu bemerken, dass, wenn dem nach 3. gefundenen Einfluss von einer Minute zu grosser Breite auf den westlich vom Meridian liegenden Stundenwinkel das entgegengesetzte Zeichen gegeben ist, man diesen Stundenwinkel als negativ zu betrachten hat.

Beispiel 1. Die Aufgabe sei dieselbe wie Beispiel 1. in §. 173., also:

$8^h\,39'\,36''$ ⊖ w. H. $= 17^\circ\,5'\,44''$ und $8^h\,56'\,9''$ ♀ w. H. $= 60^\circ\,57'\,51''$

⊙ AR. $= 12^h\,41'\,8''$	$8^h\,39'\,36''$
Verfl. ✻ Zeit $= 0^h\,16'\,36''$	Verfl. mittl. Zeit $= 0^h\,16'\,33''$
$12^h\,57'\,44''$	Accel. $16'$ $= +\,2'',63$
♀ AR. $= 9^h\,47'\,35''$	» $33''$ $= +\,0'',09$
Genauer ∠ am Pol $= 3^h\,10'\,9''$.	Verfl. ✻ Zeit $= 0^h\,16'\,36''$.

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin (S - h)}{\cos \varphi \cdot \sin p}}.$$

h ⊖w. H. = 17° 5′,7
p . . ☉N. P. D. = 94° 25′,8 log cosec = 0,00130
φ . . ungef. Br. = 36° 48′,0 log sec = 0,09651 Diff. für 100″ . . . = + 157
S = 74° 9′,8 log cos = 9,43600 ½ » » » = − 371
$S - h$ = 54° 4′,1 log sin = 9,92392 ½ » » » = + 68
2) 19,45773 − 146
4

½t = 2h 9′ 33″ log sin = 9,72886 Diff. für 100″ = + 332|− 584|− 1″,76
2 332 − 6′,9
☉t = 4h 19′ 6″ Ost vom Meridian. 2520 1584
2324 1056
196
Correct. ☉t = + 12″,144 in Zeit.

h ♀ w. H. = 60° 57′,8
p . . ♀N. P. D. = 77° 50′,8 log cosec = 0,00984
φ Br. = 36° 48′,0 log sec = 0,09651 Diff. für 100″ = + 157
S = 87° 48′,3 log cos = 8,58320 ½ » » » = − 2751
$S - h$ = 26° 50′,5 log sin = 9,65468 ½ » » » = + 208
2) 18,34423 − 2386
4

½t = 0h 34′ 11″ log sin = 9,17211 Diff. für 100″ = + 1402|− 9544| = − 6″,81
2 8412
♀t = 1h 8″ 22″ Ost vom Meridian, 11320
☉t = 4h 19′ 6″ 11216
ungef. Winkel am Pol = 3h 10′ 44″ − 1″,76 1040
genauer Winkel am Pol = 3h 10′ 9″ − 6″,81
gen. ∠ − ungef. ∠ a. Pol = − 0′ 35″. Veränd. d. ∠ am Pol = + 5″,05.
+ 5″,05 | − 35″,00 | − 6′,9 gleich Correct. d. ungef. Breite.
3030
470

Ungefähre Br. = 36° 48′,0
Correct. = − 6′,9
Br. = 36° 41′,1 Nord.

Ungef. ☉t = 4h 19′ 6″ Ost vom Merid.
Correction = + 12″
☉t = 4h 19′ 18″
12h
wahre Zeit = 7h 40′ 42″
Zeitgleichung = − 11′ 19″ auf wahre Zeit.
mittlere Zeit = 7h 29′ 23″
Uhrzeit = 8h 39′ 36″
U. C. = − 1h 10′ 13″ gegen mittl. Zeit.

Beispiel 2. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 2. §. 173., aber die ungefähre Breite werde zu 36° 0′ Nord angenommen, also

um 11h 12′ 27″ ⊖w. Höhe = 48° 1′ 10″ und um 2h 32′ 17″ ⊖ w. H. = 49° 3′ 5″
14h 32′ 17″
verfloss. mittl. Zeit = 3h 19′ 50″
Diff. d. Zeitgl. in Zwischenzt. = + 3″
verfloss. wahre Zeit = 3h 19′ 53″ = dem genauen Winkel am Pol.

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \sin (S-h)}{\cos \varphi \cdot \sin p}}.$$

h .. ⊖ w. Höhe = 48° 1′ 10″
p N. P. D. = 88° 15′ 40″ log cosec = 0,00020
φ Br. = 36° 0′ 0″ log sec = 0,09204 Diff. für 100″ .. = + 153
S = 86° 8′ 25″ log cos = 8,82810 ½ » » » .. = − 1561
$S - h$ = 38° 7′ 15″ log sin = 9,79051 ½ » » » .. = + 134
²) 18,71085 − 1274
4
½ t = 0ʰ 52′ 24″,5 log sin = 9,35543 Diff. f. 100″ = + 904 | − 5096 | − 5″,64.
2 4520
t = 1ʰ 44′ 49″ Ost vom Meridian, − 5″,64 5760
Correct. = − 42″ + 7′,4 5424
genau t = 1ʰ 44′ 7″ 2256 3360
12ʰ 3948
wahre Zeit = 10ʰ 15′ 53″ Correct. d. Stund. ∠ − 41″,736.
Zeitgl. = − 6′ 1″ auf w. Zeit,
mittl. Zeit = 10ʰ 9′ 52″
Uhrzeit = 11ʰ 12′ 27″
U. C. = − 1ʰ 2′ 35″ geg. mittl. Zeit (ist auf directem Wege ebenso gefunden).

h .. ⊖ w. Höhe = 49° 3′ 5″
p N. P. D. = 88° 18′ 54″ log cosec = 0,00019
φ NBr. = 36° 0′ 0″ log sec = 0,09204 Diff. für 100″ .. = + 153
S = 86° 40′ 59″,5 log cos = 8,76234 ½ » » » .. = − 1812
$S - h$ = 37° 37′ 54″,5 log sin = 9,78575 ½ » » » .. = + 136,5
²) 18,64032 − 1522,5
4
½ t = 0ʰ 48′ 15″,5 log sin = 9,32016 Diff. f. 100″ = + 986 | − 6090,0 | + 6″,18
2 5916 weil der
t = 1ʰ 36′ 31″ West vom Merid. 1740 Stundenw.
t = 1ʰ 44′ 49″ Ost » » 986 West vom Merid. ist.
ungef. Winkel am Pol = 3ʰ 21′ 20″ − 5″,64 7540
genauer Winkel am Pol = 3ʰ 19′ 53″ + 6″,18 7838
gen. ∠ − ungef. ∠ a. Pol = − 1′ 27″ − 11″,82 in Zeit Veränd. des Winkels am Pol.

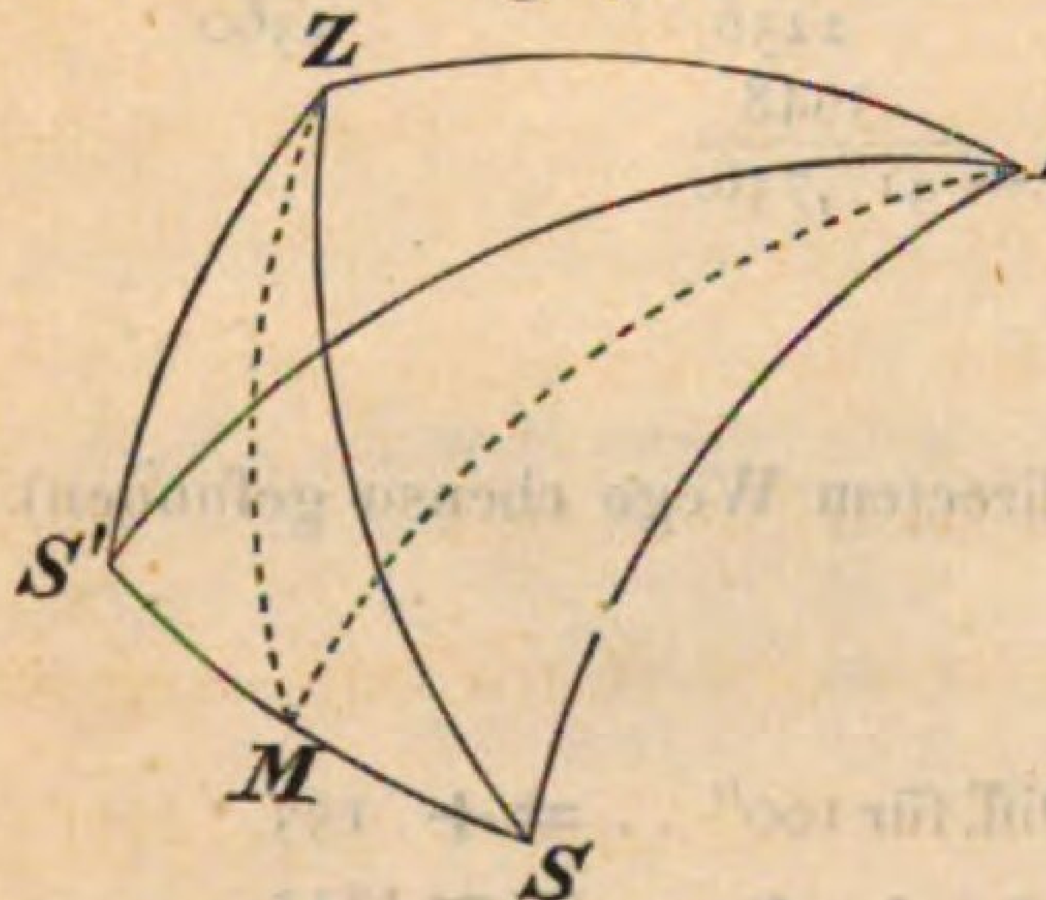
− 11″,82 | − 87″,00 | + 7′ 22″ = Correct. der Breite.
8274
426
60
25560
2394
1920

Ungefähre Br. = 36° 0′ 0″
Correct. » = + 7′ 22″
Br. = 36° 7′ 22″ Nord; auf directem Wege ist sie nur 2″ anders gefunden.

§. 181.

Aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Höhen der Sonne, deren Declination in der Zwischenzeit so wenig verändert, dass man ohne erheblichen Fehler dieselbe bei beiden Beobachtungen gleich annehmen kann, nebst der verflossenen Zeit zwischen beiden Beobachtungen, die Zeit und Breite näherungsweise nach der Douwes'schen Methode zu bestimmen, wenn man die ungefähre Breite und Länge, sowie den ungefähren Stand der Beobachtungsuhr kennt.

Fig. 90.



Es bezeichne in Fig. 90. S den Ort der Sonne, als die kleinere, und S' den Ort derselben, als die grössere Höhe beobachtet wurde, Z das Zenith, P den oberen Pol, so sind, wenn die Declination in der Zwischenzeit unverändert angenommen wird, $PS = PS'$ die Poldistanzen, ZS und ZS' die Zenithdistanzen, $\angle\, SPZ$ und $\angle\, S'PZ$ die Stundenwinkel, vom oberen Meridian ostwärts und westwärts gezählt, und ZP das Complement der Breite.

Man ziehe den grössten Kreisbogen SS' und durch die Mitte desselben (M) die grössten Kreisbögen PM und ZM, so ist das sphärische Dreieck SMP bei M rechtwinklig.

Man bezeichne ferner die kleinere Höhe $= 90° - ZS$ mit h, die grössere Höhe $= 90° - ZS'$ mit h', den grösseren Stundenwinkel $= \angle\, SPZ$ mit t, den kleineren Stundenwinkel $= \angle\, S'PZ$ mit t', die Declination, welche in der Zwischenzeit unverändert angenommen ist, mit δ, also $PS = PS' = 90° \pm \delta$, worin das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem Breite und Declination ungleiche oder gleiche Zeichen haben, und die Breite $= 90° - ZP$ mit φ, so ist

$$\angle\, MPS = \angle\, MPS' = \frac{t \mp t'}{2} = \text{der halbverflossenen Zeit}$$

zwischen beiden Höhen in wahrer Zeit, oder die halbe Differenz oder halbe Summe der beiden Stundenwinkel, je nachdem die Höhen an derselben oder an verschiedenen Seiten des Meridians liegen; $\angle\, MPZ = \frac{t \pm t'}{2}$, je nachdem beide Höhen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, gleich dem Stundenwinkel der Mitte zwischen den Beobachtungen, Mittelzeit genannt.

Die sphärischen Dreiecke ZPS und ZPS' liefern nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t. \\ 2. & \sin h' = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t'. \end{array}\right\} \text{(Sphär. Trig. §. 19.)}$$

Die erste Gleichung von der letzten subtrahirt giebt

$$\sin h' - \sin h = \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot (\cos t' - \cos t) = \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot 2 \sin\frac{t+t'}{2} \cdot \sin\frac{t-t'}{2},$$

also

$$2\sin\frac{t+t'}{2}=\frac{\sin h'-\sin h}{\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\sin\frac{t-t'}{2}},\ \text{oder}\ 2\sin\frac{t-t'}{2}=\frac{\sin h'-\sin h}{\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\sin\frac{t+t'}{2}} \quad \text{(I.)}.$$

Diese Gleichung macht den ersten Theil der Rechnung aus, und es kann nach derselben, wenn für φ die ungefähr bekannte Breite gesetzt wird, die ungefähre Mittelzeit $\frac{t+t'}{2}$, oder $\frac{t-t'}{2}$, je nachdem die Höhen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, gefunden werden.

Aus der ungefähren Mittelzeit findet man ferner, da auch die halbverflossene Zeit, je nachdem die Höhen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Meridians liegen $=\frac{t-t'}{2}$, oder $=\frac{t+t'}{2}$ bekannt ist, den Stundenwinkel der grösseren Höhe; derselbe ist:

1. wenn die Höhen auf derselben Seite des Meridians liegen:

$$\frac{t+t'}{2}-\frac{t-t'}{2} = \text{der Mittelzeit weniger der halbverfloss. Zeit} \quad \text{(II.)},$$

2. wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians liegen:

$$\frac{t+t'}{2}-\frac{t-t'}{2} = \text{der halbverflossenen Zeit — der Mittelzeit} \quad \text{(III.)}.$$

Aus der obigen zweiten Gleichung ergiebt sich ferner, wenn darin für $\cos t'$ der gleiche Werth $1-2\sin^2\frac{1}{2}t'$ gesetzt wird:

$$\sin h' = \sin\varphi\cdot\sin\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta-2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta,$$
$$= \cos(\varphi-\delta)-2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta,$$

folglich

$$\cos(\varphi-\delta) = \sin h'+2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta \quad \text{(IV.)}.$$

Aus der obigen ersten Gleichung ergiebt sich auf ähnliche Art

$$\cos(\varphi-\delta) = \sin h+2\sin^2\tfrac{1}{2}t\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta \quad \text{(IV'.)}.$$

$\varphi-\delta$ ist die Meridian-Zenithdistanz, wobei jedoch zu beachten, dass φ und δ als entgegengesetzte Grössen zu betrachten sind, wenn die eine Nord und die andere Süd ist, und man findet, wenn man $\varphi-\delta$ die entgegengesetzte Benennung des Meridians giebt, worin das Gestirn culminirt

$$\varphi = (\varphi-\delta)+\delta \quad \text{(V.)}.$$

Die Gleichungen (IV.) und (V.) machen den letzten Theil der Rechnung aus, welche mit der nach §. 166. zu machenden Rechnung übereinstimmt.

Zur Erleichterung der Rechnung enthält die nautische Tafel XXXVII. Logarithmen der halbverflossenen Zeit $\left(\log\operatorname{cosec}\frac{t\mp t'}{2}\right)$ für den Radius $=1$, Taf. XXXVIII. enthält Logarithmen Mittelzeit $\left[\log\left(2\sin\frac{t\pm t'}{2}\right)\right]$ für den Radius $=100000$, und Taf. XXXIX. enthält log Stundenwinkel $=\log(2\sin^2\frac{1}{2}t)=\log\operatorname{sinvers} t$ (ebenfalls für den Radius $=1$) mal 100000.

Da nach dieser Methode sowohl im ersten als im letzten Theile derselben die ungefähre Breite und eine Declination der Sonne, welche der Mitte der Beobachtungen entspricht, gebraucht wird, oder wenn man im letzten Theile der Rechnung auch die Declination, welche der grösseren Höhe entspricht, brauchen wollte, so würde doch wegen der nur ungefähr

bekannten Breite, welche auf See manchmal bis ein Grad fehlerhaft sein kann, und des Umstandes, dass im ersten Theile der Rechnung die Declination für die Zeit, welche für die Mitte der Beobachtungen gilt, gebraucht ist, stets ein mehr oder weniger fehlerhaftes Resultat geben, wenn die gedachten Fehler sich nicht etwa gegenseitig aufheben, oder auch zufällig nicht stattfinden sollten.

Was nun den nach obiger Annahme der Declination in der Breite entstehenden Fehler betrifft, so lässt dieser sich nicht beseitigen. In Bezug auf die angenommene Breite hat die Methode aber die Eigenschaft, dass, wenn man die durch die letzte Rechnung gefundene Breite als die ungefähre Breite annimmt und die Rechnung damit wiederholt, das Resultat sich in vielen Fällen der Wahrheit nähert, aber auch zuweilen davon entfernen kann. Wenn indessen eine Annäherung stattfindet, so muss die Differenz der Breiten nach der ersten und zweiten Rechnung kleiner sein, als die Differenz zwischen der angenommenen Breite und der durch die erste Rechnung gefundenen, denn ein kleiner Fehler in der ungefähren Breite muss einen noch kleineren Fehler im Resultat geben, wenn eine Annäherung stattfindet; wogegen, wenn die gefundene Breite sich durch die Wiederholung von der richtigen Breite mehr entfernt, die gedachten Differenzen der gefundenen Breiten wachsen müssen.

Wenn daher durch die Wiederholung der Rechnung eine Annäherung wirklich statthat, so ist es klar, dass durch öftere Wiederholungen der Fehler in der letzten Breite, welcher durch die in Rechnung genommene Breite entsteht, zuletzt ganz verschwinden muss, welches leicht zu erkennen ist, indem dann die zuletzt gefundene Breite gar nicht mit der zuletzt in Rechnung genommenen Breite differirt.

Ist die Beobachtung unter günstigen Umständen gemacht, so wird meistens gar keine Wiederholung der Rechnung nöthig sein.

Es wird bei der folgenden Untersuchung über die Brauchbarkeit dieser Methode auf die günstigsten Umstände zur Beobachtung der Höhen aufmerksam gemacht werden.

§. 182.

Vom Einfluss der Fehler in den gegebenen Theilen auf die nach §. 181. berechnete Zeit und Breite.

I. Den Fehler zu finden, welcher in der Mittelzeit, mithin in jedem der Stundenwinkel t und t' durch den Fehler in der ungefähren Breite entsteht, wenn man die halbe Zwischenzeit als richtig annimmt.

Es bezeichne der Kürze wegen m die Mittelzeit und v die halbe Zwischenzeit, so ist nach Formel (I.)

$$2 \sin m = \frac{\sin h' - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin v},$$

und

$$\sin m \cdot \cos \varphi = \frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \delta \cdot \sin v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (a.).$$

Wenn man in dieser Gleichung $\sin m$ und $\cos \varphi$ veränderlich setzt, so ergiebt sich nach den Differentialformeln in §. 68., §. 69. und §. 62.

$$dm \cdot \cos m \cdot \cos \varphi = d\varphi \cdot \sin m \cdot \sin \varphi,$$

folglich

$$dm = \operatorname{tang} m \cdot \operatorname{tang} \varphi \cdot d\varphi,$$

und

$$dm = dt = dt' = \operatorname{tang} m \cdot \operatorname{tang} \varphi \cdot d\varphi \quad \ldots\ldots\ (1.).$$

In Bezug auf die fehlerhafte Breite findet man also die Mittelzeit, mithin auch die Stundenwinkel richtiger, wenn Mittelzeit und Breite beide klein sind.

Für die Zeitbestimmung nach dieser Methode ist es daher am vortheilhaftesten, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians und zwar gleich weit von demselben beobachtet sind.

II. Den Fehler zu finden, der in der Mittelzeit durch einen Fehler in den Höhen entsteht.

Es ist nach (a.)

$$\sin m = (\sin h' - \sin h) \cdot \tfrac{1}{2} \sec \varphi \cdot \sec \delta \cdot \operatorname{cosec} v,$$

und wenn man hierin h' und h, sowie m veränderlich setzt, so ergiebt sich nach den Differentialformeln in §. 68., §. 61. und §. 62.

$$\cos m \cdot dm = \frac{\cos h' \cdot dh' - \cos h \cdot dh}{2 \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin v},$$

oder $dm = \dfrac{\cos h' \cdot dh' - \cos h \cdot dh}{2 \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin v \cdot \cos m} = \dfrac{\cos h' \cdot dh' - \cos h \cdot dh}{\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot (\sin t - \sin t')}$ (2.),

worin dm den Fehler in der Mittelzeit = dem Fehler, der in den Stundenwinkeln durch die fehlerhaften Höhen entsteht, bezeichnet, und worin die Fehler in den Höhen gleichartig angenommen sind; wenn man aber diese Fehler ungleichartig, nämlich eine Höhe zu gross und die andere zu klein annimmt, so kommt über dem Strich + statt — zu stehen.

Hieraus folgt, dass es in Bezug auf die fehlerhaften Höhen für die Zeitbestimmung am vortheilhaftesten ist:

1. wenn beide Höhen gleich oder nahe gleich, die Mittelzeit klein und die halbe Zwischenzeit gross, jedoch nicht über 6^h ist; also wenn die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians und beide gleich weit von demselben beobachtet sind, welches ebenfalls in Bezug auf die fehlerhafte Breite in I. nachgewiesen ist;

2. dass es besser ist, die Zeit nach dieser Methode zu bestimmen, wenn Breite und Declination klein ist;

3. dass der Fehler in der Mittelzeit sehr gross wird, wenn diese $= 6^h$, also wenn eine Höhe in der Nähe des oberen und die andere in der des unteren Meridians beobachtet ist;

4. dass sich ebenfalls nicht mit Zuverlässigkeit die Zeit nach dieser Methode bestimmen lässt, wenn die Zwischenzeit sehr klein ist;

5. dass die Fehler der Höhen einen geringeren Einfluss haben, wenn beide Höhen zu gross oder beide zu klein beobachtet sind, als wenn eine Höhe zu gross und die andere zu klein gemessen ist.

III. Den Einfluss zu finden, welchen ein Fehler in der ungefähren Breite auf die berechnete Breite hat.

Es ist nach Gleichung (IV.) in §. 181., wenn man die ungefähre Breite mit φ, die durch die erste Rechnung gefundene genäherte Breite mit φ', die zweite genäherte Breite mit φ'' bezeichnet,

$$\cos(\varphi' - \delta) = \sin h' + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta.$$

Wenn man hierin die Breite und den Stundenwinkel veränderlich setzt und für $2 \sin^2 \frac{1}{2} t'$ den gleichen Werth $1 - \cos t'$, so ergiebt die Differentiation

$$- \sin(\varphi' - \delta) \cdot d(\varphi' - \delta)$$
$$= - \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot d\varphi + \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot d\varphi \cdot \cos t' + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin t' \cdot dt' \quad (3.).$$

Hierin für dt' den in (1.) gefundenen Ausdruck, nämlich $\operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot d\varphi$ gesetzt, giebt, wenn man die Mittelzeit, welche mit m bezeichnet ist, durch $\dfrac{t + t'}{2}$ ausdrückt,

$$- \sin(\varphi' - \delta) \cdot d(\varphi' - \delta) =$$

$$= -\frac{\sin\varphi\cdot\cos\delta\left\{\cos\frac{t+t'}{2}-\left[\cos\frac{t+t'}{2}\cdot\cos t'+\sin t'\cdot\sin\frac{t+t'}{2}\right]\right\}}{\cos\frac{t+t'}{2}}\cdot d\varphi \quad (4.).$$

Setzt man hierin für $\cos\frac{t+t'}{2}\cdot\cos t'+\sin t'\cdot\sin\frac{t+t'}{2}$ den gleichen Werth, nämlich $\cos\left(\frac{t+t'}{2}-t'\right)=\cos\frac{t-t'}{2}$, so erhält man:

$$-\sin(\varphi'-\delta)\cdot d(\varphi'-\delta)=\frac{\sin\varphi\cdot\cos\delta\left[\cos\frac{t-t'}{2}-\cos\frac{t+t'}{2}\right]}{\cos\frac{t+t'}{2}}\cdot d\varphi, \text{ und}$$

wenn hierin für $\cos\frac{t-t'}{2}-\cos\frac{t+t'}{2}$ der gleiche Werth $2\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t'}{2}$ gesetzt wird, so ergiebt sich

$$-\sin(\varphi'-\delta)\cdot d(\varphi'-\delta)=\frac{2\sin\varphi\cdot\cos\delta\cdot\sin\frac{1}{2}t'\cdot\sin\frac{1}{2}t}{\cos\frac{t+t'}{2}}\cdot d\varphi, \text{ mithin}$$

$$d(\varphi'-\delta)=-\frac{2\sin\varphi\cdot\cos\delta\cdot\sin\frac{1}{2}t'\cdot\sin\frac{1}{2}t}{\sin(\varphi'-\delta)\cdot\cos\frac{t+t'}{2}}\cdot d\varphi \quad (5.).$$

In dieser Gleichung ist $d(\varphi'-\delta)$ der Fehler in der berechneten Meridian-Zenithdistanz gleich dem Fehler in der berechneten Breite, und $d\varphi$ der Fehler in der ungefähren Breite. Es ist ferner $d\varphi$, δ und t positiv angenommen; wenn aber δ und φ ungleichnamig sind, so wird δ negativ, und wenn die Beobachtungen auf verschiedenen Seiten des Meridians gemacht sind, wird t oder t' negativ.

Aus Gleichung (5.) folgt:

1. Dass, wenn die Breite grösser als die Declination und beide gleichnamig, der Fehler in der berechneten Breite gleichnamig oder ungleichnamig mit dem Fehler in der ungefähren Breite ist, je nachdem die Beobachtungen auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite des Meridians gemacht sind: denn im ersten Fall ist $\sin\frac{1}{2}t'$ negativ. Ist die Breite kleiner als die Declination, so findet das Entgegengesetzte statt.

2. Dass der Fehler in der berechneten Breite kleiner ist, wenn die Beobachtungen auf verschiedenen Seiten des Meridians gemacht sind, alsdann ist t' negativ, in den Devisor kommt daher, ohne Rücksicht auf die Zeichen, $\frac{t-t'}{2}$ statt $\frac{t+t'}{2}$ zu stehen, und $\cos\frac{t-t'}{2}>\cos\frac{t+t'}{2}$.

In Folge dessen ist es vortheilhafter, die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians zu beobachten, wenn die Stundenwinkel gleich sind.

3. Dass der Fehler in der berechneten Breite $=0$ ist, wenn die eine Höhe im Meridian beobachtet wird; dann ist $\sin\frac{1}{2}t$ oder $\sin\frac{1}{2}t'=0$.

Hiernach sollte man die eine Höhe möglichst nahe am Meridian beobachten.

4. Dass der Fehler in der berechneten Breite kleiner wird, wenn beide Beobachtungen nahe am Meridian gemacht sind; denn je kleiner

$\frac{1}{2}t$ und $\frac{1}{2}t'$ ist, desto kleiner wird $\sin\frac{1}{2}t$ und $\sin\frac{1}{2}t'$, und desto grösser der Cosinus der Mittelzeit oder $\cos\frac{t+t'}{2}$, wenn beide Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians sind.

5. Dass der Fehler in der berechneten Breite grösser wird, wenn die Sonne dem Zenith näher culminirt, weil dann $\sin(\varphi - \delta)$ abnimmt. Hieraus folgt, dass je kleiner die Meridian-Zenithdistanz, desto fehlerhafter ist es, nach dieser Methode die Breite zu bestimmen, und umgekehrt; mithin ist diese Methode anwendbarer auf hohen als auf niederen Breiten.

6. Dass die Methode besser ist, wenn Declination und zugleich Meridian-Zenithdistanz gross; dann ist $\cos\delta$ klein und $\sin(\varphi' - \delta)$ gross.

Hiernach ist die Methode auf niederen Breiten am besten, wenn Breite und Declination ungleichnamig und letztere gleich dem Complemente der Breite ist; dann nähert $\sin(\varphi' - \delta)$ sich der Einheit und $\cos\delta$ ist möglichst klein.

IV. Den Fehler zu finden, der im Stundenwinkel durch einen Fehler in der verflossenen Zeit entsteht.

Man setze in Formel (I.) m = der Mittelzeit und v = der halbverflossenen Zeit, so ist

$$2\sin m = \frac{\sin h' - \sin h}{\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\sin v},$$

$$\text{und}\quad \sin m\cdot\sin v = \frac{\sin h' - \sin h}{2\cos\varphi\cdot\cos\delta}.$$

Setzt man m und v veränderlich, so giebt diese Gleichung nach den Differentialformeln in §. 68. und §. 62.

$$\sin v\cdot\cos m\cdot dm + \cos v\cdot\sin m\cdot dv = 0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

$$\text{oder}\quad dm = -dv\cdot\operatorname{tang} m\cdot\operatorname{cotg} v \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

woraus sich ergiebt, dass der Fehler in v stets entgegengesetzt sein muss mit dem dadurch in m entstehenden Fehler, und weil $m - v$ oder $v - m = t'$ ist, so folgt, dass der Fehler im Stundenwinkel immer gleich dem Fehler der halbverflossenen Zeit + dem Fehler der Mittelzeit ist, weshalb der Fehler der halbverflossenen Zeit immer vergrössert in den Stundenwinkel übergeht.

Aus (7) ergiebt sich:

1. Dass der Fehler in der Mittelzeit, welcher durch einen Fehler in der halbverflossenen Zeit entsteht, = 0 wird, wenn die Mittelzeit = 0 ist, welches stattfindet, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet und beide gleich gross sind.

2. Dass der Fehler in der Mittelzeit sehr gross wird, wenn die halbverflossene Zeit sehr klein ist, weil dann $\operatorname{cotg} v$ sehr gross wird.

Ein Fehler in der halbverflossenen Zeit hat also den geringsten Einfluss auf die Mittelzeit, wenn die halbverflossene Zeit = 6^h und die Mittelzeit = 0 ist.

V. Vom Fehler, der in der Breite durch einen Fehler in der halbverflossenen Zeit entsteht.

Setzt man in (6) für dm den gleichen Werth $dt' + dv$ (siehe IV.), so ergiebt sich

$$dt' = -\frac{dv\cdot\sin m\cdot\cos v + dv\cdot\cos m\cdot\sin v}{\cos m\cdot\sin v}.$$

Wird in diese Gleichung für $\sin m \cdot \cos v$ der gleiche Werth $\frac{1}{2}\sin(m+v) + \frac{1}{2}\sin(m-v)$ und für $\cos m \cdot \sin v$ der gleiche Werth $\frac{1}{2}\sin(m+v) - \frac{1}{2}\sin(m-v)$ gesetzt, so ergiebt sich

$$dt' = -\frac{\sin(m+v)\cdot dv}{\cos m \cdot \sin v},$$

und weil $m+v=t$ ist, so erhält man

$$dt' = -\frac{\sin t \cdot dv}{\cos m \cdot \sin v}.$$

Wird hierin für m und v wieder $\frac{t+t'}{2}$ und $\frac{t-t'}{2}$ gesetzt, und unter und über dem Strich mit 2 multiplicirt, so ergiebt sich

$$dt' = -\frac{2\sin t \cdot dv}{2\cos\frac{t+t'}{2}\cdot\sin\frac{t-t'}{2}} = -\frac{\sin t \cdot 2 \cdot dv}{\sin t - \sin t'} \;\ldots\ldots\; (8).$$

Man setze in (IV.) (§. 181.) für $2\sin^2\frac{1}{2}t'$ den gleichen Werth $1-\cos t'$, so ist, wenn die ungefähre Breite mit φ und die genäherte Breite mit φ' bezeichnet wird

$\cos(\varphi'-\delta) = \sin h + (1-\cos t')\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta$, und wenn man hierin $(\varphi'-\delta)$ und t' veränderlich setzt, so ist nach den Differentialgleichungen in §. 69. und §. 62.

$$-\sin(\varphi'-\delta)\cdot d(\varphi'-\delta) = \sin t'\cdot dt'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta \;\ldots\ldots\ldots\; (9).$$

Setzt man in (9) den für dt' in (8) gefundenen Werth und dividirt mit $-\sin(\varphi'-\delta)$, so ergiebt sich

$$d(\varphi'-\delta) = \frac{2\sin t\cdot\sin t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot dv}{\sin(\varphi'-\delta)\cdot(\sin t - \sin t')}.$$

Man setze hierin für $\sin(\varphi'-\delta)$ den gleichen Werth $\sin\varphi'\cdot\cos\delta - \cos\varphi'\cdot\sin\delta$ und dividire unter und über dem Strich mit $\cos\varphi'\cdot\cos\delta$, indem $\cos\varphi' = \cos\varphi$ angenommen wird, so erhält man

$$d(\varphi'-\delta) = d\varphi' = \frac{2\sin t\cdot\sin t'\cdot dv}{(\tang\varphi' - \tang\delta)\cdot(\sin t - \sin t')} \;\ldots\ldots\ldots\; (10).$$

Aus (10) ergiebt sich:

1. Dass $d\varphi' = 0$ ist, wenn eine der Höhen im Meridian beobachtet wird; dann ist $\sin t' = 0$.

2. Dass $d\varphi'$ kleiner wird, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind; dann kommt unter den Strich $(\sin t + \sin t')$ für $(\sin t - \sin t')$ zu stehen.

3. Dass $d\varphi'$ grösser wird, wenn die Sonne sich dem Zenith nähert, denn $(\tang\varphi' - \tang\delta)$ wird dann kleiner.

4. Dass $d\varphi'$ kleiner wird, wenn die Zwischenzeit gross ist; dann ist $(\sin t - \sin t')$ grösser.

VI. Vom Fehler, der in der berechneten Breite durch einen Fehler in den Höhen entsteht.

Man setze in Gleichung (IV.) (§. 181.) für $2\sin^2\frac{1}{2}t'$ den gleichen Werth $1-\cos t'$, so ergiebt sich:

$$\cos(\varphi'-\delta) = \sin h' + \cos\varphi\cdot\cos\delta - \cos t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta \;\ldots\ldots\; (a.),$$

und wenn man diese Gleichung differentiirt, indem $(\varphi'-\delta)$, h' und t' veränderlich gesetzt werden, so ergiebt sich nach den Differentialformeln in §. 68., §. 61. und §. 62.

$$-\sin(\varphi'-\delta)\cdot d(\varphi'-\delta) = \cos h'\cdot dh' + \sin t'\cdot dt'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn man für dt' den unter II., Gleichung (2) in diesem Paragraphen gefundenen Werth setzt,

$$d(\varphi'-\delta)=\frac{\cos h'\cdot dh'}{-\sin(\varphi'-\delta)}+\frac{\sin t'\cdot\cos h'\cdot dh'-\sin t'\cdot\cos h\cdot dh}{-\sin(\varphi'-\delta)\cdot(\sin t-\sin t')},$$

$$=\frac{\cos h'\cdot dh'(\sin t-\sin t')}{-\sin(\varphi'-\delta)\cdot(\sin t-\sin t')}+\frac{\sin t'\cdot\cos h'\cdot dh'-\sin t'\cdot\cos h\cdot dh}{-\sin(\varphi'-\delta)\cdot(\sin t-\sin t')},$$

$$=\frac{\sin t'\cdot\cos h\cdot dh-\sin t\cdot\cos h'\cdot dh'}{\sin(\varphi'-\delta)\cdot(\sin t-\sin t')}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(11).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

dass, wenn die Fehler in den beiden Höhen h' und h entweder beide positiv oder beide negativ sind, dieselben mit einander oder gegen einander auf die berechnete Breite wirken, je nachdem die Höhen an verschiedenen oder derselben Seite des Meridians beobachtet sind; denn im ersten Falle sind t und t' entgegengesetzter, im zweiten Falle aber gleicher Art.

Es ergiebt sich aus der Gleichung (IV'.) (§. 181.), wenn man damit dieselben Umformungen vornimmt, wie vorstehend mit der Gleichung (IV.) geschehen ist, weil $dt = dt'$ ist:

$$d(\varphi'-\delta)=\frac{\sin t'\cdot\cos h\cdot dh-\sin t\cdot\cos h'\cdot dh'}{\sin(\varphi'-\delta)\cdot(\sin t-\sin t')},$$

welche Gleichung übereinstimmend mit (11) ist, woraus sich ergiebt, dass es in Hinsicht der Genauigkeit dieser Methode gleichgültig ist, ob man die Breite nach (IV.) oder (IV'.) berechnet, das ist, ob man im letzten Theile der Rechnung die grössere Höhe und den kleineren Stundenwinkel oder die kleinere Höhe und den grösseren Stundenwinkel braucht.

VII. Vom Fehler, der in der Mittelzeit und in der Breite entsteht, wenn man die Declination für die Zeit, welche der Mitte beider Beobachtungen entspricht, reducirt und diese zur Berechnung der Mittelzeit gebraucht; im letzten Theile der Rechnung aber die richtige Declination, wie dieselbe zur Zeit der grösseren Höhe gewesen ist, annimmt.

Es ist bei Entwickelung der Formel zur Berechnung der Zeit und Breite (§. 181.) die Declination in der Zwischenzeit der Beobachtungen unveränderlich angenommen und demnach

1. $\sin h=\sin\varphi\cdot\sin\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos t,$
2. $\sin h'=\sin\varphi\cdot\sin\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos t'.$

Wenn nun aber nicht, wie in diesen Gleichungen angenommen, die Declination bei beiden Höhen dieselbe ist, sondern diejenige Declination, welche zu der Zeit stattfand, die in die Mitte zwischen beide Beobachtungen fällt, mit δ bezeichnet wird und $d\delta$ die Veränderung derselben in der halben Zwischenzeit ist, so ist die Declination bei der kleineren Höhe $h=\delta\mp d\delta$ und bei der grösseren Höhe $h'=\delta\pm d\delta$. Setzt man diese Werthe statt δ in obige Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\sin h=\sin\varphi\cdot\sin(\delta\mp d\delta)+\cos\varphi\cdot\cos(\delta\mp d\delta)\cdot\cos t,$$
$$\sin h'=\sin\varphi\cdot\sin(\delta\pm d\delta)+\cos\varphi\cdot\cos(\delta\pm d\delta)\cdot\cos t'.$$

Hierin für $\sin(\delta\mp d\delta)$ und für $\cos(\delta\pm d\delta)$ die bekannten gleichen Werthe gesetzt und darin $\cos d\delta = 1$ und $\sin d\delta = d\delta$ angenommen, giebt:

$$\sin h=\sin\varphi\cdot\sin\delta\mp\sin\varphi\cdot\cos\delta\cdot d\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos t\pm\cos\varphi\cdot\sin\delta\cdot d\delta\cdot\cos t,$$
$$\sin h'=\sin\varphi\cdot\sin\delta\pm\sin\varphi\cdot\cos\delta\cdot d\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos t'\mp\cos\varphi\cdot\sin\delta\cdot d\delta\cdot\cos t'.$$

Durch Subtraction der 1sten Gleichung von der letzten ergiebt sich
$$\sin h' - \sin h = \pm 2 \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot d\delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta\, (\cos t' - \cos t)$$
$$\mp \cos \varphi \cdot \sin \delta \cdot d\delta\, (\cos t' + \cos t).$$

Setzt man hierin für $\cos t' - \cos t$ und für $\cos t' + \cos t$ die gleichen Werthe, nämlich $2 \sin \tfrac{1}{2}(t+t') \cdot \sin \tfrac{1}{2}(t-t')$ und $2 \cos \tfrac{1}{2}(t+t') \cdot \cos \tfrac{1}{2}(t-t')$ und drückt, wie vorher schon geschehen, $\tfrac{1}{2}(t-t')$ durch v und $\tfrac{1}{2}(t+t')$ durch m aus, so ist
$$\sin h' - \sin h = \pm 2 \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot d\delta + 2 \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin m \cdot \sin v$$
$$\mp 2 \cos \varphi \cdot \sin \delta \cdot d\delta \cdot \cos m \cdot \cos v.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $2 \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin v$, so ergiebt sich:
$$\frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin v} = \pm \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot d\delta}{\sin v} + \sin m \mp \operatorname{tg} \delta \cdot d\delta \cdot \cos m \cdot \operatorname{cotg} v,$$
folglich
$$\sin m = \frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin v} \mp \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin v} \cdot d\delta \pm \operatorname{tg} \delta \cdot \cos m \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta \quad \ldots \quad (12).$$

Man setze diejenige Mittelzeit, welche gefunden wird, wenn man bei beiden Höhen die Declination so annimmt, wie dieselbe zur Zeit der Mitte zwischen beiden Beobachtungen gewesen ist, $= m'$, und subtrahire den nach (I.) (§. 181.) gefundenen Werth für m' von dem in (12) gefundenen richtigen Werth, so ergiebt sich:
$$\sin m - \sin m' = \mp \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot d\delta}{\sin v} \pm \operatorname{tg} \delta \cdot \cos m \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta,$$
oder weil
$$\sin m - \sin m' = \cos \frac{m + m'}{2} \cdot 2 \sin \frac{m - m'}{2}$$
ist, so auch, wenn man $\sin \frac{m - m'}{2}$ dem Bogen gleich, mithin
$$2 \sin \frac{m - m'}{2} = 2 \frac{m - m'}{2} = m - m' = dm$$
setzt und $\cos \frac{m + m'}{2}$, weil m von m' nur wenig verschieden sein kann, $= \cos m$, oder $= \cos m'$ annimmt
$$dm = \mp \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot d\delta}{\cos m' \cdot \sin v} \pm \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$
worin die oberen Zeichen gelten, wenn die kleinere Höhe die erste ist und das Gestirn sich dem oberen Pol nähert, der letzte Theil oder $\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta$ aber das entgegengesetzte Zeichen erhält, wenn φ und δ ungleichnamig sind.

Aus (13) ergiebt sich:

1. Dass es in Hinsicht des in Rede stehenden Fehlers in der Declination für die Zeitbestimmung nach dieser Methode am vortheilhaftesten ist, wenn Breite und Declination beide klein und gleichnamig sind, weil dann beide Theile ungleiche Zeichen haben und der eine also den anderen verkleinert.

Ist sowohl die Breite als auch die Declination $= 0$, so wird $dm = 0$.

2. Wenn φ und δ gleichnamig sind und $\frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot d\delta}{\cos m' \cdot \sin v} > \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta$ ist, so ist es vortheilhaft, wenn m möglichst klein ist, welches stattfindet, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten und beide gleichweit vom Meridian beobachtet sind.

3. Dass der Fehler in der Zeitbestimmung am grössten werden kann, wenn φ und δ möglichst gross und beide ungleichnamig sind.

Es ist ferner nach §. 167. Formel (VI.)

$$\mp dZ = \pm \frac{\sin t \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin Z} \cdot dt,$$

oder, weil im Vorhergehenden der Stundenwinkel, welcher im letzten Theil der Rechnung gebraucht wurde, mit t' bezeichnet ist, und wenn man das Complement der Meridianhöhe durch $\varphi' - \delta$ ausdrückt, im letzten Theil der Rechnung die richtige Declination $= (\delta \pm d\delta)$ braucht und diese mit δ' bezeichnet, so erhält man

$$d(\varphi' - \delta') = - \frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta'}{\sin (\varphi' - \delta')} \cdot dt',$$

worin $d(\varphi' - \delta')$ den Fehler in der Breite bezeichnet und sich das Zeichen der Gleichung ändert, wenn $\delta' > \varphi'$ und beide gleichnamig sind.

Da der Fehler in der Mittelzeit gleich dem Fehler im Stundenwinkel ist, der jedoch das entgegengesetzte Zeichen erhält, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, so kann man für dt' den in (13) für dm gefundenen Werth setzen, und es ist dann

$$d(\varphi' - \delta') = \left(- \frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta'}{\sin (\varphi' - \delta')}\right) \cdot \left(\mp \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot d\delta}{\cos m' \cdot \sin v} \pm \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta\right),$$

oder da $\cos \delta' \cdot \operatorname{tg} \delta' = \sin \delta'$ und $\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi$, so ergiebt sich

$$d(\varphi' - \delta') = \pm \frac{\sin t' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta'}{\sin(\varphi' - \delta') \cdot \cos m' \cdot \sin v} \cdot d\delta \mp \frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \operatorname{cotg} v}{\sin (\varphi' - \delta')} \cdot d\delta \quad (14),$$

worin die oberen Zeichen gelten, wenn beide Höhen an derselben Seite des Meridians beobachtet sind, die kleinere Höhe die erste ist und die Sonne sich dem oberen Pol nähert; entfernt sie sich vom oberen Pol, so gelten die unteren Zeichen, und jedenfalls werden die Zeichen der Gleichung umgekehrt, wenn die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, wie auch, wenn die grössere Höhe die erste ist, oder wenn die Declination grösser als die Breite und beide gleichnamig sind. Ist Breite und Declination ungleichnamig, so erhält der letzte Theil, nämlich $\frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \operatorname{cotg} v}{\sin (\varphi' - \delta')}$, die entgegengesetzten Zeichen; folglich erhalten beide Theile dann gleiche Zeichen und vergrössern den Fehler.

In dem Falle, wenn $\delta = 0$ ist, wird auch der zweite Theil in (14) $= 0$ und es wird dann

$$d(\varphi' - \delta') = \pm \frac{\sin t'}{\cos m' \cdot \sin v} \cdot d\delta.$$

Da $t' = m - v$ ist, ergiebt sich, wenn man $\sin (m - v)$ für $\sin t'$ und dafür den gleichen Werth $\sin m \cdot \cos v - \cos m \cdot \sin v$ setzt,

$$d(\varphi' - \delta') = \pm \left(\frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} v} - 1\right) \cdot d\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15),$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert, die kleinere Höhe die erste ist und beide auf derselben Seite des Meridians beobachtet sind.

Ist aber $\varphi = 0$, so wird der erste Theil der Gleichung (14) $= 0$, und es ist dann:

$$d(\varphi' - \delta') = \mp \sin t' \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta \quad \ldots\ldots\ldots (16),$$

worin ebenfalls das obere Zeichen gilt, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert und die kleinere Höhe die erste ist.*)

Aus (14) kann man entnehmen:

1. Dass der in Rede stehende Fehler der Declination einen bedeutenden Fehler in der Breite verursachen kann, wenn Breite und Declination nahe gleich gross, beide gleichnamig und möglichst gross sind.

2. Dass der Fehler in der Breite $= 0$ wird, wenn $t' = 0$ ist, also eine Höhe im Meridian beobachtet.

3. Dass der Fehler in der Breite $= 0$ ist, wenn Breite und Declination $= 0$.

In dem speciellen Falle, wenn die Declination $= 0$ ist, ergiebt sich aus (15):

1. Dass der in Rede stehende Fehler der Declination, wenn man dieselbe nämlich im 1sten Theil der Rechnung für das Mittel der Zeiten beider Höhen, im letzten Theil aber zur Zeit der grösseren Höhe als richtig annimmt, einen desto kleineren Fehler in der Breite verursacht, je mehr Mittelzeit und halbverflossene Zeit einander gleich sind, und dass der Fehler $= 0$, wenn $m = v$, welches stattfindet, wenn eine Höhe im Meridian beobachtet ist.

2. Dass der Fehler in der Breite nicht die Veränderung der Declination in der halben Zwischenzeit übersteigen kann, wenn die Tangente der Mittelzeit, dividirt durch die Tangente der halbverflossenen Zeit, kleiner als 2 ist.

3. Dass der Fehler in der berechneten Breite gleich dem Fehler in der Declination wird, wenn die Mittelzeit $= 0$ ist, welches stattfindet, wenn beide Höhen gleichweit und auf verschiedenen Seiten vom Meridian beobachtet sind.

Aus (16) folgt, wie aus (14), dass der Fehler in der Breite $= 0$ wird, wenn $t' = 0$ ist.

VIII. Vom Fehler, der in der Mittelzeit und in der Breite entsteht, wenn man, wie dieses gebräuchlich ist, die Declination in beiden Theilen der Rechnung so nimmt, wie dieselbe zur Zeit der grösseren Höhe gewesen ist.

Es sei die Declination zur Zeit der grösseren Höhe $= \delta'$ und die Veränderung derselben in der halben Zwischenzeit $= \mp d\delta$, also in der Zwischenzeit $= \mp 2\, d\delta$, so ist

$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin (\delta' \mp 2\, d\delta) + \cos \varphi \cdot \cos (\delta' \mp 2\, d\delta) \cdot \cos t$, oder, wenn man für $\sin (\delta' \mp 2\, d\delta)$, sowie für $\cos (\delta' \mp 2\, d\delta)$ die bekannten gleichen Werthe setzt, und $\cos 2\, d\delta = 1$ annimmt,

$$(1.) \quad \sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta' \mp \sin \varphi \cdot \cos \delta' \cdot 2\, d\delta + \cos \varphi \cdot \cos t \cdot \cos \delta' \pm \cos \varphi \cdot \cos t \cdot \sin \delta' \cdot 2\, d\delta$$

und $$(2.) \quad \sin h' = \sin \varphi \cdot \sin \delta' + \cos \varphi \cdot \cos \delta' \cdot \cos t'.$$

Subtrahirt man Gleichung (1.) von Gleichung (2.), so bleibt

$$\sin h' - \sin h = \pm \sin \varphi \cdot \cos \delta' \cdot 2\, d\delta + (\cos t' - \cos t) \cos \varphi \cdot \cos \delta' \mp \cos \varphi \cdot \cos t \cdot \sin \delta' \cdot 2\, d\delta,$$ oder

weil $\cos t' - \cos t = 2 \sin \frac{t + t'}{2} \cdot \sin \frac{t - t'}{2} = 2 \sin m \cdot \sin v$ ist,

$$\sin h' - \sin h = \pm \sin \varphi \cdot \cos \delta' \cdot 2\, d\delta + 2 \cos \varphi \cdot \cos \delta' \cdot \sin v \cdot \sin m \mp \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot 2\, d\delta \cdot \cos t.$$

*) Wenn auch die Breite $= 0$ angenommen ist, so wird doch stets die berechnete Breite irgend eine Grösse haben und daher bestimmt sein, welcher Pol der obere ist.

Dividirt man diese Gleichung durch $2 \cos \varphi \cdot \cos \delta' \cdot \sin v$, so erhält man

$$\frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \varphi \cdot \cos \delta' \cdot \sin v} = \pm \frac{\operatorname{tang} \varphi \cdot d\delta}{\sin v} + \sin m \mp \frac{\operatorname{tang} \delta' \cdot \cos t \cdot d\delta}{\sin v},$$ mithin

$$\sin m = \frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \varphi \cdot \cos \delta' \cdot \sin v} \mp \frac{\operatorname{tang} \varphi \cdot d\delta}{\sin v} \pm \frac{\operatorname{tang} \delta' \cdot \cos t \cdot d\delta}{\sin v} \quad \ldots (17.).$$

Nimmt man aber die Declination bei beiden Höhen $= \delta'$ an, so ergiebt sich nach Formel (I.) in §. 181., wenn man die damit gefundene Mittelzeit mit m' bezeichnet

$$\sin m' = \frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \varphi \cdot \cos \delta' \cdot \sin v};$$

und es bleibt, wenn diese Gleichung von (17.) subtrahirt wird,

$$\sin m - \sin m' = \mp \frac{\operatorname{tang} \varphi \cdot d\delta}{\sin v} \pm \frac{\operatorname{tang} \delta' \cdot \cos t \cdot d\delta}{\sin v},$$

oder

$$\cos \frac{m + m'}{2} \cdot 2 \sin \frac{m - m'}{2} = \mp \frac{\operatorname{tang} \varphi \cdot d\delta}{\sin v} \pm \frac{\operatorname{tang} \delta' \cdot \cos t \cdot d\delta}{\sin v}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn $\sin \frac{m - m'}{2} = \frac{m - m'}{2}$ und $2 \frac{m - m'}{2} = dm$ gesetzt, und die Gleichung mit $\cos \frac{m + m'}{2}$ dividirt wird, indem man $\frac{m + m'}{2} = m = m'$ annimmt:

$$dm = m - m' = \mp \frac{\operatorname{tang} \varphi \cdot d\delta}{\cos m \cdot \sin v} \pm \frac{\operatorname{tang} \delta' \cdot \cos t \cdot d\delta}{\cos m \cdot \sin v} \quad \ldots\ldots (18.),$$

$$\text{oder } dm = \mp \frac{\operatorname{tang} \varphi \cdot d\delta}{\cos m \cdot \sin v} \pm \operatorname{tang} \delta' \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta \mp \operatorname{tang} \delta' \cdot \operatorname{tang} m \cdot d\delta \quad (19.),$$

worin die oberen Zeichen gelten, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert und die kleinere Höhe die erste ist.

Wenn aber φ und δ' ungleichnamig sind, so erhalten die letzten Theile in Gleichung (18.) und (19.), oder diejenigen, worin $\operatorname{tang} \delta'$ vorkommt, die entgegengesetzten Zeichen.

Aus (18.) ergiebt sich:

1. Ein ähnlicher Schluss, wie unter VII. aus Gleichung (13.) in 1.

2. Dass es vortheilhaft ist, wenn m möglichst klein, welches stattfindet, wenn die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians und beide gleich weit von demselben beobachtet sind.

3. Dass es, wenn φ und δ ungleichnamig sind, vortheilhaft ist, wenn t (der Stundenwinkel der kleineren Höhe) nahe 90° beträgt.

4. Dass der Fehler in der Zeitbestimmung durch den in Rede stehenden Fehler der Declination am grössten werden kann, wenn φ sowie δ möglichst gross und beide ungleichnamig sind.

Vergleicht man Formel (13.) und (19.), so ergiebt sich, wenn φ und δ gleichnamig sind und $\operatorname{tang} \delta' \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta - \operatorname{tang} \delta' \cdot \operatorname{tang} m \cdot d\delta > \frac{\operatorname{tang} \varphi \cdot d\delta}{\cos m \cdot \sin v}$ ist, dass der Fehler, welcher in der Zeitbestimmung dadurch entsteht, wenn man die Declination zur Zeit der grösseren Höhe braucht, um $\operatorname{tang} \delta' \cdot \operatorname{tang} m \cdot d\delta$ kleiner werden muss, als wenn man die Declination für die Zeit, welche in der Mitte der Beobachtung liegt, nimmt; ist aber unter den gedachten Umständen $\operatorname{tang} \delta' \cdot \operatorname{cotg} v = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos m \cdot \sin v}$,

so findet das Entgegengesetzte statt. Ist φ und δ ungleichnamig, so ist es vortheilhafter, die Declination für die Zeit der grösseren Höhe zu nehmen, wenn nicht tang $\delta' \cdot$ tang $m \cdot d\delta$ mehr wie zweimal grösser als $\frac{\text{tang}\,\varphi \cdot d\delta}{\cos m \cdot \sin v}$ $+$ tang $\delta' \cdot$ cotg $v \cdot d\delta$ ist.

Es ist diesemnach für die Zeitbestimmung nach dieser Methode in den meisten Fällen vortheilhafter, die Declination auch im ersten Theil der Rechnung für die Zeit der grösseren Höhe, statt für die Zeit, welche in der Mitte beider Höhen liegt, zu nehmen.

Um den Fehler in der Breite zu finden, drücke man die Formel (VI.) in §. 167., wie unter VII. dieses Paragraphen geschehen, aus, so ist

$$d(\varphi' - \delta') = -\frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta'}{\sin (\varphi' - \delta')} \cdot dt',$$

worin sich das Zeichen ändert, wenn $\delta' > \varphi'$ ist und beide gleichnamig sind.

Da der Fehler in der Mittelzeit gleich dem Fehler im Stundenwinkel ist, so kann man für dt' den in (18.) oder (19.) für dm gefundenen Werth substituiren und es wird dann

$$d(\varphi' - \delta') = \pm \frac{\sin t' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta'}{\sin(\varphi' - \delta') \cdot \cos m \cdot \sin v} \cdot d\delta \mp \frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \cos t}{\sin(\varphi' - \delta') \cdot \cos m \cdot \sin v} \cdot d\delta \; (20.),$$

oder

$$d(\varphi' - \delta') = \pm \frac{\sin t' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta'}{\sin(\varphi' - \delta') \cdot \cos m \cdot \sin v} \cdot d\delta \mp \frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \text{cotg}\, v}{\sin(\varphi' - \delta')} \cdot d\delta$$
$$\pm \frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \text{tang}\, m}{\sin(\varphi' - \delta')} \cdot d\delta \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (21.),$$

worin die oberen Zeichen gelten, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert und die kleinere Höhe die erste ist. Die Gleichungen erhalten jedoch die entgegengesetzten Zeichen, wenn die Declination grösser als die Breite ist und beide gleichnamig sind. Ist Breite und Declination ungleichnamig, so erhalten diejenigen Theile, worin tang δ' vorkommt, die entgegengesetzten Zeichen.

In dem Falle, wenn $\delta' = 0$ ist, wird auch der letzte Theil in (20.) $= 0$ und es ist dann

$$d(\varphi' - \delta') = \pm \frac{\sin t'}{\cos m \cdot \sin v} \cdot d\delta = \pm \left(\frac{\text{tang}\, m}{\text{tang}\, v} - 1\right) \cdot d\delta \; \ldots\ldots\ldots \; (22.),$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn die Sonne sich dem oberen Pol nähert und die kleinere Höhe die erste ist.

Ist aber $\varphi = 0$, so wird der erste Theil der Gleichung (20.) $= 0$ und es ist dann

$$d(\varphi' - \delta') = \mp \frac{\sin t' \cdot \cos t \cdot d\delta}{\cos m \cdot \sin v} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (23.).$$

Aus den Gleichungen (20.), (22.) und (23.) sind ganz dieselben Schlüsse zu ziehen, wie unter VII. aus (14.), (15.) und (16.).

Es ist einleuchtend, dass in den Fällen, in welchen man die Mittelzeit genauer oder ungenauer findet, wenn auch im ersten Theil der Rechnung die Declination gebraucht wird, welche zur Zeit der grösseren Höhe statthat, auch die Breite genauer oder ungenauer gefunden werden muss; denn im letzten Theil der Rechnung entsteht durch die Declination kein Fehler, wenn diese entsprechend der Zeit der grösseren Höhe gebraucht ist.

Die Vergleichung der Formeln (21.) und (14.) ergiebt, dass der Fehler in der Breite um den Ausdruck $\frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \text{tang}\, m}{\sin(\varphi' - \delta')} \cdot d\delta$ grösser

oder kleiner werden kann, wenn die Declination auch im ersten Theil der Rechnung so genommen wird, wie dieselbe zur Zeit der grösseren Höhe war, als wenn man im ersten Theil der Rechnung dieselbe für die Zeit, welche in der Mitte beider Beobachtungen liegt, brauchte, im letzten Theil aber in beiden Fällen die Declination zur Zeit der grösseren Höhe nimmt.

Es kann dieser angeführte Unterschied bedeutend werden, wenn φ und δ gleichnamig, sehr nahe gleich gross und möglichst gross sind; wenn aber dann

$$\left[\frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \operatorname{cotg} v}{\sin(\varphi' - \delta')} \cdot d\delta - \frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \operatorname{tang} m}{\sin(\varphi' - \delta')} \cdot d\delta\right] > \frac{\sin t' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta' \cdot d\delta}{\sin(\varphi' - \delta') \cdot \cos m \cdot \sin v}$$

ist, so muss der Fehler in der Breite um das Erwähnte, nämlich $\frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \operatorname{tang} m}{\sin(\varphi' - \delta')} \cdot d\delta$, kleiner werden, wenn die Declination auch im ersten Theil der Rechnung so genommen wird, wie dieselbe zur Zeit der grösseren Höhe war.

Es ist übrigens in den erwähnten Fällen, nämlich, wenn φ und δ' gleichnamig und beide gleich gross sind, die Methode schon aus anderen, vorher angeführten Gründen, nicht zu brauchen.

Ist φ und δ' ungleichnamig, so ist es, wenn nicht

$$\frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \operatorname{tang} m \cdot d\delta}{\sin(\varphi' - \delta')}$$

mehr wie zweimal grösser als

$$\frac{\sin t' \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta' \cdot \operatorname{cotg} v \cdot d\delta}{\sin(\varphi' - \delta')} + \frac{\sin t' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta' \cdot d\delta}{\sin(\varphi' - \delta') \cdot \cos m \cdot \sin v}$$

ist, stets besser, die Declination in beiden Theilen der Rechnung so zu nehmen, wie dieselbe zur Zeit der grösseren Höhe war.

Es bleibt der gedachte Unterschied indessen jedenfalls klein, wenn der Stundenwinkel der grösseren Höhe, die Declination oder die Mittelzeit klein ist.

Da es nun bequemer ist, eine Declination statt zwei Declinationen in der Rechnung zu gebrauchen, so nimmt man gewöhnlich die Declination so, wie dieselbe zur Zeit der grösseren Höhe war, welches man sich um so viel mehr erlauben kann, als im Vorhergehenden bewiesen ist, dass der dadurch entstehende Fehler in der Breite und Zeit in den meisten Fällen kleiner wird, als wenn man im ersten Theile der Rechnung die mittlere Declination anwendet, und weil in dem Falle, wenn der gedachte Fehler bedeutend werden kann, die Methode schon ausserdem nicht zur Breitenbestimmung taugt.

IX. Vom Fehler, der in der Breite entsteht, wenn die Declination sowohl im ersten wie im zweiten Theile der Rechnung so genommen wird, wie dieselbe zur Zeit, welche in der Mitte beider Beobachtungen liegt, gewesen ist.

Da diese Methode zur Bestimmung der Breite fast ausschliesslich nur gebraucht wird, um aus zwei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Sonnenhöhen die Breite zu finden, und die halbverflossene Zeit selten grösser als 2 Stunden ist, so kann die Declination in dieser Zeit höchstens 2 Minuten verändern, welches nur stattfinden kann, wenn die Declination klein ist; ferner, da die Declination der Sonne höchstens $23\frac{1}{2}°$

werden kann, in welchem Falle die Veränderung derselben aber bedeutend geringer, als die angeführte ist, und weil die Cosinusse kleiner Bögen, bei einer Minute oder zwei Minuten Unterschied, nicht viel mit einander differiren, indem das Differential $\cos\delta = -\sin\delta \cdot d\delta$ ist (§. 69. der Differentialrechnung), so kann man ohne erheblichen Fehler annehmen, dass nach Formel (IV.) in §. 181., nämlich:

$$\cos(\varphi-\delta) = \sin h' + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t' \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta = \sin h' + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t' \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\delta \pm d\delta)$$

ist; also, dass der Fehler, welcher in der Meridian-Zenithdistanz durch die um $\pm d\delta$ verkehrt angenommene Declination entsteht, $= 0$ ist.

Es ist daher der, durch Anwendung der mittleren Declination in beiden Theilen der Auflösung in der Meridian-Zenithdistanz entstehende Fehler auch derselbe, wie in Formel (14.) dieses Paragraphen, oder

$$d(\varphi'-\delta') = \pm \frac{\sin t' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\delta'}{\sin(\varphi'-\delta') \cdot \cos m' \cdot \sin v} \cdot d\delta \mp \frac{\sin t' \cdot \cos\varphi \cdot \sin\delta' \cdot \operatorname{cotg} v}{\sin(\varphi'-\delta')} \cdot d\delta.$$

Es ist aber die Breite gleich der Meridian-Zenithdistanz $\pm (\delta \pm d\delta)$, mithin ist, wenn $d\varphi$ den Fehler in der Breite bezeichnet, der durch die gedachte Annahme der Declination entsteht

$$d\varphi = \pm d\delta \pm \frac{\sin t' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\delta'}{\sin(\varphi'-\delta') \cdot \cos m' \cdot \sin v} \cdot d\delta \mp \frac{\sin t' \cdot \cos\varphi \cdot \sin\delta' \cdot \operatorname{cotg} v}{\sin(\varphi'-\delta')} \cdot d\delta \quad \ldots (24.),$$

worin für $d\delta$ das obere Zeichen gilt, wenn die kleinere Höhe die erste ist und die Sonne sich dem oberen Pol nähert, oder, wenn die grössere Höhe die erste ist und die Sonne sich vom oberen Pol entfernt; dagegen gilt das untere Zeichen, wenn die kleinere Höhe die erste ist und die Sonne sich vom oberen Pol entfernt, oder, wenn die grössere Höhe die erste ist und die Sonne sich dem oberen Pol nähert. Von den beiden letzten Theilen der Gleichung ist das Nöthige unter VII. dieses Paragraphen (nach Formel (14.) stehend) gesagt, und da demnach die Zeichen dieser Formel, wenn

$$\frac{\sin t' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\delta'}{\sin(\varphi'-\delta') \cdot \cos m' \cdot \sin v} \cdot d\delta > \frac{\sin t' \cdot \cos\varphi \cdot \sin\delta' \cdot \operatorname{cotg} v}{\sin(\varphi'-\delta')} \cdot d\delta,$$

sowie, wenn φ und δ ungleichnamig sind, in welchem Falle die Zeichen des letzten Theils umgekehrt werden, übereinstimmend mit $\pm d\delta$ sind, wenn die Höhen auf einer und derselben Seite des Meridians beobachtet wurden: so folgt daraus, dass beide Fehler sich dann vergrössern und dass es mithin besser ist, die Declination, welche zur Zeit der grösseren Höhe stattfindet, im letzten Theil der Rechnung zu brauchen. Sind dagegen die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet, oder, wenn die Declination grösser als die Breite und beide gleichnamig, so werden die Zeichen in den letzten Theilen von (24.) umgekehrt und sind dann unter den gedachten Umständen entgegengesetzt mit $\pm d\delta$, vermindern folglich einander; mithin ist es dann besser, die mittlere Declination in beiden Theilen der Rechnung zu gebrauchen. Es ist jedoch, wenn der Stundenwinkel der grösseren Höhe nicht mehr als 1^h beträgt, fast immer richtiger, auch wenn die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, die Declination, wie dieselbe zur Zeit der grösseren Höhe gewesen, im letzten Theil der Rechnung zu gebrauchen; denn bei kleinen Stundenwinkeln macht $\pm d\delta$ fast immer mehr als $\frac{2}{3}$ des nach (24.) berechneten Fehlers der Breite aus.

Ist die Declination $= 0$, so ist der letzte Theil in (24.) $= 0$ und es ist dann $d\varphi = \pm d\delta \pm \frac{\sin t' \cdot d\delta}{\cos m' \cdot \sin v}$. Nimmt man noch an, dass die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet und beide gleich gross sind, so ist $m = 0$ und $v = t$; mithin ist dann $d\varphi = 0$.

In VIII. ist auseinandergesetzt, dass es, wenn Breite und Declination ungleichnamig sind, immer besser ist, diejenige Declination in beiden Theilen der Rechnung anzuwenden, welche zur Zeit der grösseren Höhe stattfand, welches überhaupt in den meisten Fällen, die sich besonders zur Breitenbestimmung nach dieser Methode eignen, der Fall ist, woraus in Verbindung mit dem Vorstehenden folgt:

1. Dass es, wenn die Höhen an derselben Seite des Meridians beobachtet sind, in den meisten Fällen, und immer, wenn φ und δ ungleichnamig sind, unzweckmässiger ist, die mittlere Declination als die Declination, welche zur Zeit der grösseren Höhe stattfand, zu gebrauchen, welches auch der Fall ist, wenn die Höhen zwar auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind, der Stundenwinkel der grösseren Höhe jedoch kleiner als 1^h ist.

2. Dass es, wenn die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind und der Stundenwinkel der grösseren Höhe 1^h übersteigt, besser ist, die mittlere Declination als diejenige, welche zur Zeit der grösseren Höhe stattfand, in beiden Theilen der Rechnung zu benutzen.

3. Dass es besser ist, die mittlere Declination zu nehmen, wenn dieselbe $= 0$ ist, die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet und die Stundenwinkel gleich gross sind; dann wird der Fehler in der Breite $= 0$.

§. 183.

Breite und Zeit nach der Methode von Douwes zu bestimmen. [§. 181.].

Regel.

1. Man beobachte eine Höhe möglichst nahe am oberen Meridian und die andere so weit davon entfernt, dass die halbe Zwischenzeit wenigstens eben so gross, als der Stundenwinkel der grösseren Höhe ist, oder im äussersten Falle, dass die Zwischenzeit grösser als der Stundenwinkel der grösseren Höhe. Diesen Bedingungen kann man am ersten nachkommen, wenn die Höhen an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet sind.

2. Bei der Höhe, welche auf den Ort der anderen Höhe reducirt werden soll, peile man mittelst des Compasses die Sonne, oder auch kurz vor- oder nachher, notire den in der Zwischenzeit gesegelten Curs nach demselben Compasse und die Distanz so genau als möglich.

3. Das Besteck wird für die Zeit derjenigen Höhe aufgemacht, auf deren Beobachtungsort die andere Höhe reducirt werden soll.

4. Finde aus den gemessenen Höhen die wahren Mittelpunktshöhen und reducire diejenige, bei welcher die Sonne gepeilt ist, auf den Ort der anderen Beobachtung (§. 130.).

5. Finde die Declination für die Zeit der grösseren und für den Ort der Höhe, auf welchen die andere Höhe reducirt ist, oder wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet und nahe gleich gross sind, für die Zeit, welche in der Mitte beider Beobachtungen liegt und für den gedachten Ort.

6. Addire die Logarithmen der Secanten für den Radius $= 1$ von Declination und Besteckbreite, und nenne die Summe „log A".

7. Halbire die Zeit zwischen beiden Beobachtungen und suche dafür den Logarithmen der halbverflossenen Zeit (nautische Tafel XXXVII.).

8. Subtrahire den natural sinus der kleineren von dem natural sinus der grösseren Höhe (beide fünfstellig) und suche für die Differenz den Logarithmen (nautische Tafel XXXII.).

9. Addire diese 3 Logarithmen, nämlich, log A, log halbverflossene Zeit und log Differenz der natural sinusse der Höhen, so ist die Summe log Mittelzeit, wofür in der nautischen Tafel XXXVIII. die Mittelzeit aufgesucht wird.

10. Nimm die Differenz zwischen der gefundenen Mittelzeit und der halbverflossenen Zeit, welche der Stundenwinkel der grösseren Höhe und wofür der Logarithme in der nautischen Tafel XXXIX. aufzusuchen ist.

11. Von log Stundenwinkel der grösseren Höhe subtrahire log A; der Rest ist der Logarithme einer Zahl, die zum vorher schon gefundenen natural sinus der grösseren Höhe addirt, den natural cosinus der Meridian-Zenithdistanz giebt.

12. Die Meridian-Zenithdistanz $\pm$ Declination, je nachdem dieselben gleichnamig oder ungleichnamig sind, ist gleich der genäherten Breite für den Augenblick und Ort derjenigen Höhe, auf welchen die andere Höhe reducirt ist.

13. Weicht die so gefundene Breite mehr als 4 Minuten von der Besteckbreite ab, so wird, wenn die Meridian-Zenithdistanz klein, hauptsächlich aber, wenn der Stundenwinkel der grösseren Höhe nicht sehr klein ist, die Rechnung wiederholt, indem man die genäherte Breite ebenso gebraucht, wie vorher die Besteckbreite gebraucht wurde.

Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis die zuletzt gefundene Breite mit der zu ihrer Berechnung gebrauchten übereinstimmt, oder wenigstens beide keine 4 Minuten mit einander differiren.

14. Ist die Mittelzeit grösser als die halbverflossene Zeit, so sind die Höhen auf einer Seite des Meridians, wenn aber die Mittelzeit kleiner als die halbverflossene Zeit ist, so sind dieselben an verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet.

Wenn daher die grössere Höhe die letzte und die Mittelzeit grösser als die halbverflossene Zeit ist, so liegt der Stundenwinkel der grösseren Höhe östlich vom Meridian; wenn aber die grössere Höhe die erste und die Mittelzeit grösser als die halbverflossene Zeit ist, so liegt der Stundenwinkel der grösseren Höhe westlich vom Meridian; ist dagegen die Mittelzeit kleiner als die halbverflossene Zeit und die grössere Höhe die erste, so liegt der Stundenwinkel der grösseren Höhe östlich vom Meridian; wenn aber unter dieser Voraussetzung die grössere Höhe die zuletzt beobachtete ist, so liegt der Stundenwinkel derselben westlich vom Meridian.

Hiernach kann man aus dem so ermittelten letzten Stundenwinkel der grösseren Höhe leicht die wahre oder mittlere Zeit finden. Wenn, wie gewöhnlich, die Sonne beobachtet wurde, so ist nämlich die wahre Zeit gleich dem westlichen Stundenwinkel oder gleich 12^h — dem östlichen Stundenwinkel.

Die so gefundene wahre Zeit mit der Uhrzeit der grösseren Höhe verglichen, giebt die Uhrcorrection gegen wahre Zeit.

Ist nach dem Chronometer beobachtet oder die Beobachtungsuhr bei jeder Höhe mit dem Chronometer, dessen Stand und Gang man kennt, verglichen worden, so kann die mittlere Greenwicher Zeit für den Augenblick der grösseren Höhe leicht gefunden werden. Die mittlere Ortszeit

aus dem Stundenwinkel dieser grösseren Höhe ermittelt und mit der eben erwähnten mittleren Greenw. Zeit verglichen, giebt auch die Länge des Ortes, auf den die eine Höhe reducirt ist, für den also beide Höhen gelten. An Bord empfiehlt es sich, die erste Höhe immer auf den Ort der zweiten zu reduciren, also stets die Sonne bei der ersten Höhe mit dem Compasse zu peilen, nach dem der Curs angegeben wird, denn man will wissen, wo man bei der letzten Höhe mit dem Schiffe gewesen ist.

Weicht bei Wiederholung der Rechnung die gefundene Breite von der zur Berechnung derselben gebrauchten (vorhin berechneten) Breite mehr ab, wie in der vorhergehenden Rechnung, so zeigt dieses an, dass die Beobachtung unter ungünstigen Umständen gemacht ist, also nichts taugt. Die halbverflossene Zeit in mittl. Zeit kann man als halbverfl. wahre Zeit $= \frac{t - t'}{2}$ annehmen.

Beispiel 1. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 1. in §. 176.

Uhrzeit der gr. H. $= 10^h\ 48'$
Uhr-Cor. g. mittl. Zt. . . $= +\ 48'$
OL. v. Greenw. $= -\ 1^h\ 10'$

ungef. mittl. Greenw. Zt. $= 10^h\ 26'$ Morgens,
$= 1^h\ 34'$ vor d. Mittg. d. 24sten.

23. Octbr. $\odot\ \delta = 11^\circ\ 34'\ 13''$ S.
24. Octbr. $\odot\ \delta = 11^\circ\ 55'\ 7''$ »

$24^h : 1^h\ 34' = 20'\ 54'' : x$

4^h	6	$3'\ 29''$
1^h	4	$52''$
$30'$	2	$26''$
3	10	$3''$
1	3	$1''$
	$x =$	$1'\ 22''$

$\odot\ \delta = 11^\circ\ 53',8$ S.

$$2 \sin \frac{t + t'}{2} = \frac{\sin h' - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \frac{t - t'}{2}},$$

$$\cos(\varphi' - \delta) = \sin h' + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta.$$

φ . . . Besteckb. $= 55^\circ\ 31'$ log sec $= 0{,}24706$
δ . . . Decl. $= 11^\circ\ 53',8$ log sec $= 0{,}00944$
log A $= 0{,}25650$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zt. $= 0^h\ 22'\ 40''$ log $\frac{1}{2}$ verfl. Zt. $= 1{,}00550$
h' . . . gr. Höhe $= 22^\circ\ 28',2$ n. sin $= 38220$
h . . . kl. Höhe $= 21^\circ\ 34',2$ n. sin $= 36764$
1456 log $= 3{,}16316$
Mittelzeit $= 0^h\ 30'\ 36''$ log Mittelzeit $= 4{,}42516$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zt. $= 0^h\ 22'\ 40''$
t' . . . Stundenw. $= 0^h\ 7'\ 56''$ log Stundw. $= 1{,}77744$
log A $= 0{,}25650$
Zahl $=$ 33 log $= 1{,}52094$
n. sin der gr. Höhe $= 38220$
n. cos M.Z.D. $= 38253$
M.Z.D. $= 67^\circ\ 30',6$ N.
$\odot$ Decl. $= 11^\circ\ 53',8$ S.
Breite $= 55^\circ\ 36',8$ Nord.

Wiederholung.

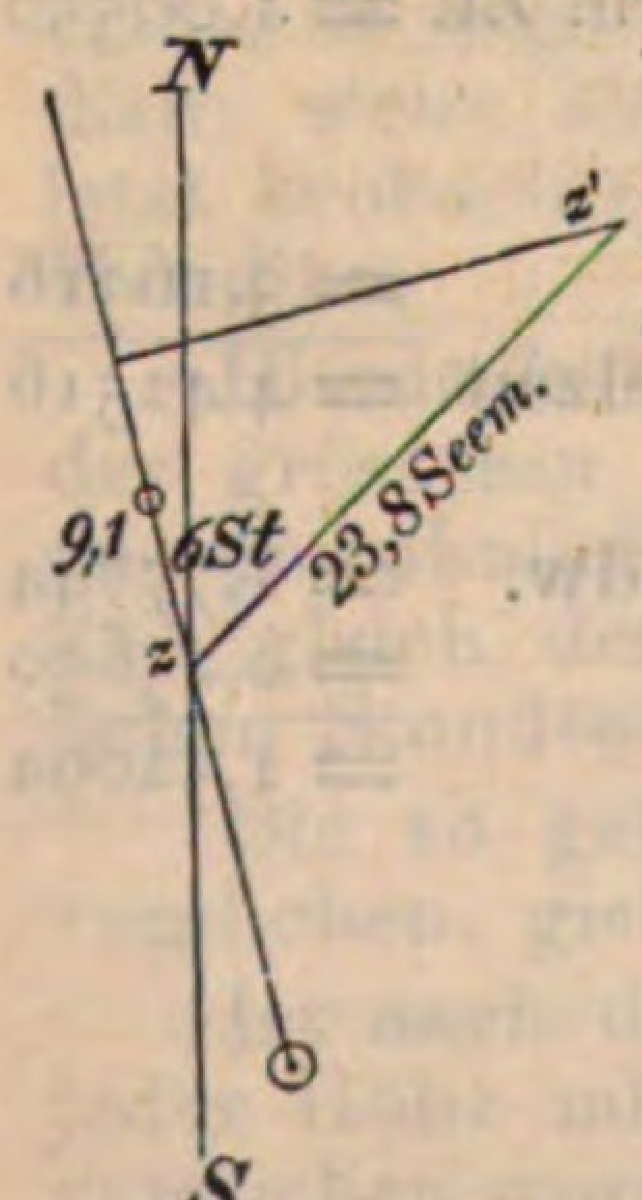
Breite = 55° 36',8 log sec = 0,24812
Declin. = 11° 53',8 log sec = 0,00944
log A' = 0,25756
log ½ verfl. Zt. = 1,00550
log Diff. d. n. sin d. Höhen = 3,16316
Mittelzeit = 0^h 30' 40" log Mittelzeit = 4,42622
½ verfl. Zt. = 0^h 22' 40"
Stundenw. = 0^h 8' 0" log Stundenwink. = 1,78474
log A' = 0,25756
Zahl = 34 log = 1,52718
n. sin d. gr. Höhe = 38220
n. cos M.Z.D. = 38254, also M.-Z.-D. = 67° 30',6 N.
⊙ Decl. = 11° 53',8 S.
Breite = 55° 36',8 Nord.

Stundenw. = 0^h 8' 0" = Zeit vor d. w. Mittage,
12^h
wahre Zeit = 11^h 52' 0" Morgens,
Uhrzeit = 10^h 48' 26"
Uhr-Corr. = + 1^h 3' 34" gegen w. Zt.

Beispiel 2. 1852 den 10. Octb. nach dem Besteck auf 45° 48' NBr. und 9° 40' WL. von Greenw., sind aus mehreren Höhen und Zeiten nachstehende Mittel gefunden, woraus die Breite und Zeit bestimmt werden soll, wobei jedoch die Besteckbreite zu 45° 0' angenommen ist. Augeshöhe 15 Fuss Rheinl., I. C. = + 0' 30", ungef. U. C. — 1^h 8' geg. mittl. Zt.

⏀ bei der ersten Höhe SSO ½ O, gesegelt in der Zwischenzeit pr. Cp. NO ½ N. 23,8 Seem.

8^h 49' 49" ⊙ 14° 11' 44" 11^h 59' 47" ⊙ 35° 42' 21"
11^h 59' 47" I. C. = + 0' 30" I. C. = + 0' 30"
3^h 9' 58" Kimmt. = — 3' 51" Kimmt. = — 3' 51"
½ verfl. Zt. = 1^h 34' 59" 14° 8' 23" 35° 39' 0"
Refr. — Parall. . . = — 3' 37" Ref. — Pr. = — 1' 13"
Fig. 90a. ⊙ Halbm. = + 16' 3" ⊙ Halbm. = + 16' 3"
⊖ w. H. = 14° 20' 49" ⊖ w. H. = 35° 53' 50"
= 14° 20',8 auf volle Minuten
Höhenänd.wg.Sgl. = — 9',1 (Fig. 90a.) h' = 35° 54'.
⊖ reduc. H. . . . = 14° 11',7
oder auf volle Minuten
h = 14° 12'.



Zeit der gr. Höhe	$=$	$12^h\ 0'$
Ungef. U. C. g. mittl. Zt. . .	$= -$	$1^h\ 8'$
WL. in Zeit	$= +$	$39'$
ungef. mittl. Greenw. Zeit .	$=$	$11^h\ 31'$ Morgens,
	$=$	$0^h\ 29'$ vor d. Mttg. d. 10. Octbr.

$\odot$ Decl. . . $= 6^\circ\ 48'\ 11''$ S.
Zeitgl. $= -\ 13'\ \ 3''$ auf w. Zt.

$$2 \sin \frac{t+t'}{2} = \frac{\sin h' - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \frac{t-t'}{2}},$$

$$\cos(\varphi' - \delta) = \sin h' + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta.$$

φ . . Besteckb.	$= 45^\circ\ 0'$	log sec	$= 0{,}15051$
δ . . S. Decl.	$= 6^\circ\ 48'$	log sec	$= 0{,}00307$
		log A	$= 0{,}15358$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zt.	$= 1^h\ 34'\ 59''$	log $\frac{1}{2}$ verfl. Zt.	$= 0{,}39504$
h' . . gr. Höhe	$= 35^\circ\ 54'$ n. sin $= 58637$		
h . . kl. Höhe	$= 14^\circ\ 12'$ n. sin $= 24531$		
	34106	log	$= 4{,}53283$
Mittelzeit	$= 2^h\ 28'\ 23''$	log Mittelzeit	$= 5{,}08145$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zt.	$= 1^h\ 34'\ 59''$		
t' . . Stundenw.	$= 0^h\ 53'\ 24''$	log Stundw.	$= 3{,}43172$
		log A	$= 0{,}15358$
	Zahl $= 1897$	log	$= 3{,}27814$

n. sin der gr. Höhe $= 58637$
n. cos M. Z. D. $= 60534$
$\varphi' - \delta$ M. Z. D. $= 52^\circ\ 44',8$ N.
δ $\odot$ Decl. $= 6^\circ\ 48',2$ S.
φ' Breite $= 45^\circ\ 56',6$ Nord.

1. Wiederholung.

$\varphi' = 45^\circ\ 57'$	log sec	$= 0{,}15784$
$\delta = 6^\circ\ 48'$	log sec	$= 0{,}00307$
	log A'	$= 0{,}16091$
	log $\frac{1}{2}$ verfl. Zt.	$= 0{,}39504$
	log Diff. d. n. sin der Höhen	$= 4{,}53283$
Mittelzeit $= 2^h\ 31'\ 21''$	log Mittelzeit	$= 5{,}08878$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zt. $= 1^h\ 34'\ 59''$		
$t' = 0^h\ 56'\ 22''$	log Stundnw.	$= 3{,}47845$
	log A'	$= 0{,}16091$
Zahl $= 2077$	log	$= 3{,}31754$

n. sin d. gr. Höhe $= 58637$
n. cos M. Z. D. $= 60714$

$\varphi'' - \delta = 52^\circ\ 37'$ N.
$\delta = 6^\circ\ 48',2$ S.
φ'' Breite $= 45^\circ\ 48',8$ Nord.

2. Wiederholung.

$\varphi'' = 45^\circ\ 49'$	log sec $= 0{,}15679$
$\delta\ = 6^\circ\ 48'$	log sec $= 0{,}00307$
	log A'' $= 0{,}15986$
	log $\frac{1}{2}$ verfl. Zt. $= 0{,}39504$
	log Diff. d. n. sin d. Höhen $= 4{,}53283$
Mittelzeit $= 2^h\ 30'\ 55''$	log Mittelzeit $= 5{,}08773$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zt. $= 1^h\ 34'\ 59''$	
$t' = 0^h\ 55'\ 56''$	log Stundnw. $= 3{,}47178$
	log A'' $= 0{,}15986$
Zahl $=$ 2051	log $= 3{,}31192$
n. sin d. gr. Höhe $= 58637$	
n. cos M. Z. D. $= 60688$	

$\varphi''' - \delta = 52^\circ\ 38',1$ N.
$\delta = 6^\circ\ 48',2$ S.
$\varphi''' = 45^\circ\ 49',9$ Nord.

Stundenw. d. gr. H. östlich v. Merid. $=$	$0^h\ 55'\ 56''$	
	12^h	
wahre Zeit $=$	$11^h\ 4'\ 4''$	
Zeitgl. $=$	$-\ 13'\ 3''$	auf w. Zt.,
mittl. Zeit $=$	$10^h\ 51'\ 1''$	
Uhrzeit d. gr. H. . $=$	$11^h\ 59'\ 47''$	
Uhr-Correction . $=$	$-\ 1^h\ 8'\ 46''$	gegen mittl. Zt.

Beispiel 3. 1852 den 15. Juni nach dem Besteck auf $46^\circ\ 57'$ NBr. und $7^\circ\ 25'$ WL.; Augeshöhe 15 Fuss Rheinl.; I. C. $= +\ 3'\ 44''$; ungefähre U. C. $= -\ 1^h\ 26'$ gegen wahre Zeit.

⏀ bei der ersten Höhe SO½S, geseg. SW½W 4.5 Seem. stündlich.

$10^h\ 41'\ 0''$	⨀	$49^\circ\ 22'\ 10''$	$1^h\ 29'\ 56''$	⨀	$66^\circ\ 14'\ 30''$
41 30		27 0	30 39		14 30
41 46		29 0	31 19		14 0
42 2		32 10	32 7		13 20
$10^h\ 41'\ 34''$	⨀	$49^\circ\ 27'\ 35''$	$1^h\ 31'\ 0''$	⨀	$66^\circ\ 14'\ 5''$
$13^h\ 31'\ 0''$	I. C.	$= +\ 3'\ 44''$		I. C.	$= +\ 3'\ 44''$
²) $2^h\ 49'\ 26''$	Kimmt.	$= -\ 3'\ 51''$		Kimmt	$= -\ 3'\ 51''$
$1^h\ 24'\ 43''$		$49^\circ\ 27'\ 28''$			$66^\circ\ 13'\ 58''$
	Refr. — Par.	$= -\ 0'\ 43''$		Refr. — Par.	$= -\ 0'\ 23''$
	⊙ Halbm.	$= +\ 15'\ 46''$		⊙ Halbm.	$= +\ 15'\ 46''$
	⊖ w. Höhe	$= 49^\circ\ 42'\ 31''$		⊖ w. Höhe	$= 66^\circ\ 29'\ 21''$
		$h = 49^\circ\ 42',5.$			$h' = 66^\circ\ 29',4.$

$\varphi = 46^\circ\ 57'$	log sec $= 0{,}16581$
$\delta = 23^\circ\ 20',5$	log sec $= 0{,}03708$
	log A $= 0{,}20289$

log A = 0,20289

$\frac{1}{2}$ verfl. Zeit = $1^h\ 24'\ 43''$ log = 0,44216

$h' = 66^\circ\ 29',4$ n. sin = 91699

$h = 49^\circ\ 42',5$ n. sin = 76276

15423 log = 4,18817

Mittelzeit = $1^h\ 19'\ 39''$ log = 4,83322

$\frac{1}{2}$ verfl. Zeit = $1^h\ 24'\ 43''$

$t' = 0^h\ 5'\ 4''$ log Stundw. = 1,38801

log A = 0,20289

Zahl = 15 log = 1,18512

n. sin h' = 91699

n. cos $(\varphi' - \delta)$ = 91714

$\varphi' - \delta = 23^\circ\ 29',3$ N.

$\delta = 23^\circ\ 20',5$ N.

$\varphi' = 46^\circ\ 49',8$ Nord.

Uhrzeit der gr. Höhe . . = $1^h\ 31'$

ungefähre U. C. = $-1^h\ 26'$ geg. w. Zeit,

WL. in Zeit = $+\ 30'$

Zeitgleichung = $0'$ auf w. Zeit,

ungef. mittl. Greenw. Zeit = $0^h\ 35'$ den 15. Juni.

15. Juni ⊙ Decl. = $23^\circ\ 20'\ 30''$ N.

16. Juni ⊙ Decl. = $23^\circ\ 22'\ 42''$ »

$24^h : 0^h\ 35' = 2'\ 12'' : x$

4^h | 6 $22''$

$30'$ | 8 $x = 3''$

5 | 6

⊙ Decl. = $23^\circ\ 20'\ 33''$

= $23^\circ\ 20',5$ N.

Wiederholung.

$\varphi' = 46^\circ\ 50'$ log sec = 0,16487

$\delta = 23^\circ\ 20',5$ log sec = 0,03708

log A' = 0,20195

log $\frac{1}{2}$ verfl. Zt. = 0,44216

log Diff. d. n. sin d. Höhen = 4,18817

Mittelzeit = $1^h\ 19'\ 28''$ log Mittelzeit = 4,83228

$\frac{1}{2}$ verfl. Zeit = $1^h\ 24'\ 43''$

$t' = 0^h\ 5'\ 15''$ log Stundw. = 1,41890

log A' = 0,20195

Zahl = 17 log = 1,21695

n. sin h' = 91699

n. cos $(\varphi'' - \delta)$ = 91716

$\varphi'' - \delta = 23^\circ\ 29',2$ N.

$\delta = 23^\circ\ 20',5$ N.

$\varphi'' = 46^\circ\ 49',7$ Nord.

$t' = 0^h\ 5'\ 15''$ wahre Zeit,

Uhrzeit der gr. Höhe = $1^h\ 31'\ 0''$

U. C. = $-1^h\ 25'\ 45''$ gegen wahre Zeit.

Beispiel 4. 1852 den 2. Juli nach dem Besteck auf 38° 45′ NBr. und 0° 12′ OL. von Greenwich; Augeshöhe 11 Fuss Rheinl.; ungefähre U. C. = — 55′ geg. wahre Zeit; I. C. = + 3′ 35″ und + 0′ 35″; der Gang der Uhr ungefähr richtig gegen mittl. Zeit.

Gesegelt von 11^h bis 12^h NO½O 6,0 Seem.
» » 12^h » 1^h ONO½O 5.5 Seem.
» » 1^h » 2^h NO½O 9,6 Seem.

$12^h\,24'\,6''$	⊙ $72^\circ\,43'\,20''$	$2^h\,55'\,48''$	⊙	$59^\circ\,36'\,0''$ ⦶W½S.
24 35	 45 40	56 25		28 50
24 57	 47 50	56 51		24 30
25 16	 50 0	57 5		22 0
25 41	 53 50	57 23		18 40
$12^h\,24'\,55''$	$72^\circ\,48'\,8''$	$2^h\,56'\,42''$		$59^\circ\,26'\,0''$
$14^h\,56'\,42''$	I. C. = + $3'\,35''$		I. C. = +	$0'\,35''$
$2^h\,31'\,47''$	Kimt. = — $3'\,18''$		Kimt. = —	$3'\,18''$
½verfl. Zt. = $1^h\,15'\,53''$	$72^\circ\,48'\,25''$			$59^\circ\,23'\,17''$

Refr. — Par. = — $0'\,15''$ Refr. — Par. = — $0'\,30''$
⊙ Halbm. = + $15'\,45''$ ⊙ Halbm. = + $15'\,45''$
h' . . . ⊖ w. Höhe = $73^\circ\,3'\,35''$. $59^\circ\,38'\,32''$
Höhenänd. wg. Sgl. = + $16'\,18''$
h . . . ⊖ red. w. H. = $59^\circ\,54'\,50''$.

	N.	O.
Bis 12^h NO½O . . 3,0 Seem.	1,9	2,3
» 1^h ONO½O . 5,5 »	1,6	5,3
» 2^h NO½O . . 9,6 »	6,1	7,4
	9,6	15,0

mw. G. C. = N. 5¼ Str. Ost,
Dist. = 18 Seem.

$\varphi = 38^\circ\,45'$	 log sec		= 0,10797
$\delta = 23^\circ\,2'$	 log sec		= 0,03608
	log A		= 0,14405
½verfl. Zeit = $1^h\,15'\,53''$	 log ½verfl. Zeit		= 0,48801
$h' = 73^\circ\,4'$	n. sin = 95664		
$h = 59^\circ\,55'$	n. sin = 86530		
	9134 log		= 3,96066
Mittelzeit = $0^h\,45'\,9''$	 log Mittelzeit		= 4,59272
½verfl. Zeit = $1^h\,15'\,53''$			
$t' = 0^h\,30'\,44''$	 log Stundenw.		= 2,95319
	log A		= 0,14405
Zahl =	644 log		= 2,80914
n. sin h' =	95664		
n. cos $(\varphi' - \delta)$ =	96308		

$\varphi' - \delta = 15^\circ\,37'$ N.
$\delta = 23^\circ\,1',9$ N.
$\varphi' = 38^\circ\,38',9$ Nord.

Zeit der gr. Höhe $= 12^h\ 25'$ den 2. Juli,
ungef. U. C. $= -\ 55'$ geg. w. Zeit,
OL. in Zeit $= -\ 1'$

ungef. w. Greenw. Zeit . . $= 11^h\ 29'$,
$= 0^h\ 31'$ vor dem Mittage d. 2. Juli.

1. Juli $\odot\ \delta = 23^\circ\ 6'\ 8''$ N.
2. Juli $\odot\ \delta = 23^\circ\ 1'\ 45''$ »

$24^h : 0^h\ 31' = 4'\ 23'' : x$

4^h	6	$44''$
$30'$	8	$x = 6''$
1	30	

$\odot$ Decl. $= 23^\circ\ 1'\ 51''$ N.
$= 23^\circ\ 1',9$ N.

Wiederholung.

$\varphi' = 38^\circ\ 39'$ log sec $= 0{,}10736$
$\delta = 23^\circ\ 2'$ log sec $= 0{,}03608$
log $A' = 0{,}14344$
log $\frac{1}{2}$ verfl. Zeit $= 0{,}48801$
log Diff. d. n. sin d. Höhen $= 3{,}96066$

Mittelzeit $= 0^h\ 45'\ 5''$ log Mittelzeit $= 4{,}59211$
$\frac{1}{2}$ verfl. Zeit $= 1^h\ 15'\ 53''$
$t' = 0^h\ 30'\ 48''$ log Stundenw. $= 2{,}95505$
log $A' = 0{,}14344$

Zahl $= 648$ log $= 2{,}81161$
n. sin $h' = 95664$
n. cos $(\varphi'' - \delta) = 96312$
$\varphi'' - \delta = 15^\circ\ 36',5$ N.
$\delta = 23^\circ\ 1',9$ N.

$\varphi'' = 38^\circ\ 38',4$ Nord.
$t' = 0^h\ 30'\ 48''$ ostwärts vom Meridian,
12^h

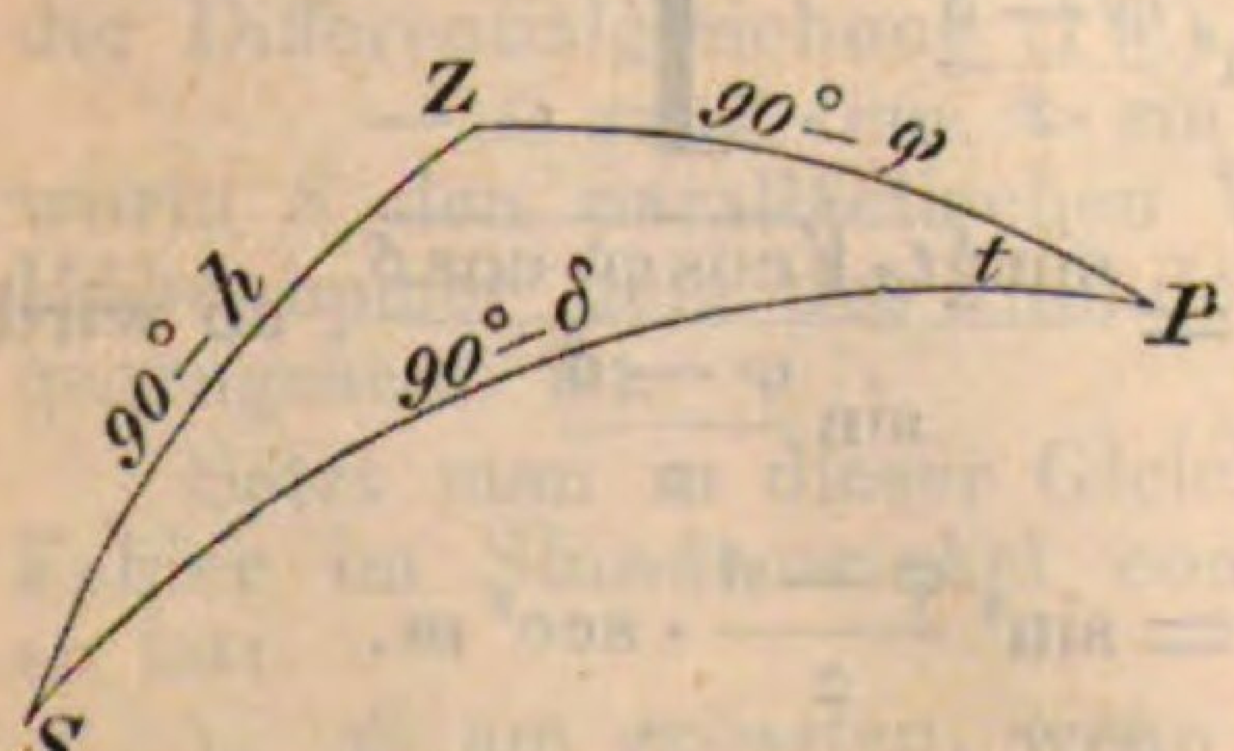
w. Zeit $= 11^h\ 29'\ 12''$
Uhrzeit d. gr. H. $= 12^h\ 24'\ 55''$

U. C. $= -\ 55'\ 43''$ gegen wahre Zeit.

§. 184.

Die wahre Höhe eines Himmelskörpers zu berechnen, wenn die Breite des Ortes, die ungefähre Länge desselben und die Zeit bekannt ist.

Fig. 91.



Es sei in Fig. 91.
Z das Zenith,
P der obere Pol und
S der Ort eines Gestirns, so ist
ZP das Complement der Breite,
PS die Poldistanz,
$\angle P$ der Stundenwinkel und
ZS das Complement der Höhe.

Die Declination des Himmelskörpers kann mit Hülfe einer Ephemeride gefunden werden (§. 103.) und der Stundenwinkel wird nach §. 134. ermittelt.

Dieses sphärische Dreieck giebt, wenn die Höhe mit h, die Breite mit φ, die Declination mit δ und der Stundenwinkel vom oberen Meridian östlich und westlich gezählt mit t bezeichnet wird,

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)}.$$

Setzt man $\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}t$, so ergiebt sich aus (I.)

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \ldots\ldots\ldots \text{(II.)},$$

nach welcher Formel die wahre Höhe sich leicht berechnen lässt.

Es ist δ negativ, wenn φ und δ ungleichnamig sind, entgegengesetzten Falles aber positiv zu nehmen.

Wenn man in (I.) für $\cos\delta$ den gleichen Werth $\sin\delta \cdot \operatorname{cotg}\delta$ setzt, wird

$\sin h = \sin\delta\,(\sin\varphi + \cos\varphi \cdot \operatorname{cotg}\delta \cdot \cos t)$, und wenn man hierin $\operatorname{cotg}\delta \cdot \cos t = \operatorname{tang} m$ setzt, ergiebt sich

$$\sin h = \sin\delta\,(\sin\varphi + \cos\varphi \cdot \operatorname{tang} m),$$

$$= \frac{\sin\delta}{\cos m}(\sin\varphi \cdot \cos m + \cos\varphi \cdot \sin m),$$

$$= \frac{\sin\delta}{\cos m} \cdot \sin(m + \varphi),$$

$$= \sin\delta \cdot \sec m \cdot \sin(m + \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III.)},$$

worin $\operatorname{cotg}\delta$ negativ zu nehmen ist, wenn φ und δ ungleichnamig sind, und $\cos t$ negativ, wenn $t > 6^h$ ist.

Nach dieser Formel lässt sich, durch die in den Tafeln gegebenen Differenzen der Logarithmen trigonometrischer Functionen leicht der Unterschied der geographischen und geocentrischen Höhe eines Gestirns finden, welches später gezeigt werden wird.

Subtrahirt man die Gleichung (II.) von $1 = 1$, so ist

$1 - \sin h = 1 - \cos(\varphi - \delta) + 2\sin^2 \frac{1}{2}t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta$, und wenn man nach §. 7. der ebenen Trigonometrie für $1 - \sin h$ den gleichen Werth $2\sin^2 \frac{90^\circ - h}{2}$ und für $\cos(\varphi - \delta)$ den gleichen Werth $1 - 2\sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2}$ setzt, diese Gleichung demnächst durch 2 dividirt, so findet man

$$\sin^2 \frac{90^\circ - h}{2} = \sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2} + \sin^2 \tfrac{1}{2}t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta,$$

$$= \sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2}\left[1 + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2}}\right].$$

Setzt man in dieser Gleichung $\operatorname{tang} m = \dfrac{\sin \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{\cos\varphi \cdot \cos\delta}}{\sin \frac{\varphi - \delta}{2}}$, so wird

$$\sin^2 \frac{90^\circ - h}{2} = \sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2}(1 + \operatorname{tang}^2 m) = \sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2} \cdot \sec^2 m,$$

und wenn man hieraus die Quadratwurzel zieht, so ergiebt sich

$$\sin\frac{90^\circ - h}{2} = \sin\frac{\varphi - \delta}{2} \sec m \ldots\ldots\ldots\ldots (IV.),$$

worin δ negativ zu nehmen ist, wenn φ und δ ungleichnamig sind.

Wenn das Gestirn nicht wenigstens 3 bis 4° vom Zenith entfernt ist, so findet man nach (II.) und (III.) kein genaues Resultat, wenn man mit Logarithmen von nur fünf Decimalstellen rechnet; man muss daher grosse Höhen nach (IV.) berechnen.

Aus (I.) ergeben sich nachstehende specielle Formeln:

1. Wenn der Stundenw. $= 6^h$, so ist $\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta$ (V.).
2. Wenn die Breite . . . $= 0$, so ist $\sin h = \cos\delta \cdot \cos t$ (VI.).
3. Wenn die Declination $= 0$, so ist $\sin h = \cos\varphi \cdot \cos t$. . . (VII.).
4. Wenn Breite u. Decl. $= 0$, so ist $\sin h = \cos t$ (VIII.).

§. 185.

Vom Einfluss des Fehlers in einem der gegebenen Theile auf die nach §. 184. zu berechnende Höhe.

I. Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler im Stundenwinkel auf die zu berechnende Höhe hat, setze man im sphärischen Dreieck *ZPS* (Fig. 91.) den Stundenwinkel und die Zenithdistanz veränderlich, und nehme das Complement der Breite und die Poldistanz constant an, so ist nach Differentialgleichung (IV.) in §. 71.

$$dh = -dt \cdot \cos\varphi \cdot \sin A \ldots\ldots\ldots\ldots (IX.),$$

worin dt einen kleinen Fehler in dem Stundenwinkel, dh den entsprechenden Fehler der Höhe, φ die Breite, und A das Azimuth vom Meridian des oberen Pols gerechnet, bezeichnet.

Nach (IX.) ist dh mit dt immer von entgegengesetztem Zeichen, und wenn man A veränderlich und φ constant annimmt, so ist:

1. dh am grössten, wenn $A = 90^\circ$, also wenn das Gestirn sich im ersten Vertical befindet;

2. dh am kleinsten, wenn $A = 0$, oder $= 180^\circ$ ist, welches stattfindet, wenn das Gestirn im Meridian ist;

3. dh höchstens $= dt$, wenn $\varphi = 0$ und $A = 90^\circ$ ist; in allen übrigen Fällen ist $dh < dt$.

Setzt man in (IX.) dt und A constant, die Breite aber veränderlich, so ist:

1. dh am grössten, wenn die Breite $= 0$;
2. dh am kleinsten, wenn die Breite $= 90^\circ$.

Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler im Stundenwinkel in Hinsicht der grösseren oder kleineren Declination auf die zu berechnende Höhe hat, ist unter den oben gemachten Annahmen nach der Differentialgleichung (IV.) in §. 71.

$$-dh = dt \cdot \cos\delta \cdot \sin S \ldots\ldots\ldots\ldots (X.),$$

worin S den parallactischen Winkel bezeichnet und der Fehler in der Höhe immer dem des Stundenwinkels in Bezug auf das Zeichen entgegengesetzt ist.

Setzt man in dieser Gleichung den parallactischen Winkel und den Fehler im Stundenwinkel constant, die Declination aber veränderlich, so ist:

1. dh am grössten, wenn $\delta = 0$;
2. $dh = 0$, wenn $\delta = 90^\circ$.

II. Will man den Einfluss eines kleinen Fehlers in der Breite auf die berechnete Höhe untersuchen, so ist nach der Differentialgleichung (V.) in §. 71., wenn man den Stundenwinkel und die Poldistanz constant, die Höhe und Breite aber veränderlich annimmt,

$dh = d\varphi \cdot \cos A$. (XI.),

und der Fehler in der Höhe dh ist dem entsprechenden Fehler in der Breite $d\varphi$ entgegengesetzt, wenn A vom Meridian des oberen Pols gerechnet, grösser als 90° ist; gleichartig sind dagegen beide Fehler, wenn $A < 90°$ ist.

Wenn man in (XI.) A von 0 bis 180° veränderlich und $d\varphi$ constant setzt, so ergiebt sich:

1. dass dh am grössten oder $= d\varphi$ ist, wenn $A = 0$ oder $= 180°$, welches der Fall ist, wenn das Gestirn sich im Meridian befindet;

2. dass $dh = 0$ ist, wenn $A = 90°$, welches stattfindet, wenn das Gestirn im ersten Vertical ist.

III. Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der Declination auf die Höhe hat, setze man den Stundenwinkel und die Breite constant, die Poldistanz und Höhe aber veränderlich, so ist nach der Differentialgleichung (V.) in §. 71.

$dh = - dp \cdot \cos S$. (XII.),

worin dp den Fehler in der Poldistanz und S den parallactischen Winkel bezeichnet, und der Fehler in der Höhe dh gleichnamig mit dem Fehler in der Poldistanz ist, wenn $S > 90°$; hingegen sind beide Fehler entgegengesetzt, wenn $S < 90°$ ist.

Nach (XII.) ist:

1. $dh = 0$, wenn $S = 90°$ ist;

2. dh am grössten, oder $= \mp dp$, wenn $S = 0$ oder 180° ist, welches stattfindet, wenn das Gestirn culminirt.

§. 186.

A. Regel.

Die wahre Höhe nach (II.) in §. 184. zu berechnen.

1. Finde den Stundenwinkel des Himmelskörpers nach der in §. 134. gegebenen Regel und die Declination des Gestirnes nach §. 103.

2. Suche für den Stundenwinkel den Logarithmen der nautischen Tafel XXXIX., addire dazu Log. cos Breite und Log. cos Declination, die letzteren beiden für den Radius = 1 geltend, und suche für die Summe die ganze Zahl (ohne Bruch).

3. Die gefundene Zahl subtrahire vom fünfstelligen nat. cos. der absoluten Summe oder Differenz von Breite und Declination, je nachdem diese entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben, so ist der Rest der natürliche Sinus der wahren Höhe.

Beispiel 1. Der Stundenwinkel vom oberen Meridian sei $= 1^h\ 20'\ 44''$, die Breite $= 55°\ 31'$ N. und die Declination $= 7°\ 31'$ S.

$t =$	$1^h\ 20'\ 44''$	log Stundenw. =	3,78822
$\varphi = + 55°\ 31'$		log cos =	9,75294 — 10
$\delta = - 7°\ 31'$		log cos =	9,99625 — 10
$\varphi - \delta =$	63° 2' n. cos =	45347	
	Zahl = —	3447 . . . log =	3.53741
$h =$	24° 46' n. sin =	41900,	

B. Regel.

Die wahre geographische Höhe sowie den Unterschied dieser und der geocentrischen Höhe nach (III.) in §. 184. zu finden.

1. Finde den Stundenwinkel des Gestirnes (§. 134.) und die Declination desselben (§. 103.).

2. Addire log cos Stundenwinkel und log cotg Declination, so ist die Summe log tang Bogen *m*. Wenn Breite und Declination ungleichnamig und der Stundenwinkel kleiner als 6^h, oder wenn Breite und Declination gleichnamig und der Stundenwinkel grösser als 6^h, so ist *m* grösser als 90°; wenn aber Breite und Declination gleichnamig und der Stundenwinkel kleiner als 6^h, so ist *m* spitz.

3. Addire den Bogen *m* zu der Breite des Ortes, nimm für die Summe log sin, für *m* log sec, für die Declination log sin und addire diese 3 Logarithmen, so ist die Summe gleich log sin wahre Höhe.

4. Um den Unterschied der geographischen und geocentrischen Höhe zu finden, schreibe gegen log sin ($m +$ Br.) die Differenz dieses Logarithmen für 100 Secunden und bezeichne dieselbe mit —, wenn der Bogen, wofür log sin genommen, stumpf ist; diese Differenz multiplicire mit der Differenz der geocentrischen weniger der geographischen Breite (in Minuten und Decimaltheilen von Minuten ausgedrückt), welcher letztere Unterschied immer negativ ist; das Product dividire durch die Differenz für 100 Secunden des log sin der gefundenen wahren Höhe, welche Differenz immer positiv zu nehmen ist; so ist der Quotient gleich der Anzahl Minuten, um welche die geographische und die geocentrische Höhe mit einander differiren und man findet aus der geocentrischen Höhe, wenn man von derselben diese gefundene Differenz algebraisch subtrahirt, die entsprechende geographische oder wahre Höhe; wenn man aber aus der berechneten geographischen Höhe die geocentrische Höhe finden will, so muss man zu ersterer die gefundene Differenz der Höhen algebraisch addiren.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, dass, wenn man die geographische Breite bei Berechnung der wahren Höhe gebraucht, auch unmittelbar durch die Rechnung die geographische Höhe gefunden wird; mit der geocentrischen Breite findet man aber unmittelbar die geocentrische Höhe.

Wenn die geocentrische Breite in der Rechnung gebraucht ist, so muss die nächstfolgende Differenz log sin ($m +$ Br.), wenn aber die geographische Breite gebraucht wurde, die nächstvorhergehende Differenz genommen werden. Es muss aber die nächstfolgende Differenz log sin wahre Höhe genommen werden, wenn die unmittelbar berechnete Höhe die kleinere ist; umgekehrt muss man aber die nächstvorhergehende Differenz nehmen. Es macht übrigens keinen wesentlichen Unterschied, wenn man auch immer die nächstfolgenden Differenzen nimmt.

Wenn das vorhergehende Beispiel nach dieser Regel wiederholt wird, und man die darin gebrauchte Breite als die geographische Breite annimmt, so steht die Rechnung wie folgt:

$t = 1^h\,20'\,44''$	$\log\cos = 9{,}97248$		
$\delta = -7^\circ\,31'$	$\log\operatorname{cotg} = 0{,}87960n$	$\log\sin = 9{,}11666n$	
$m = 98^\circ\;0'$	$\log\operatorname{tang} = 10{,}85208n$	$\log\sec = 0{,}85645n$	
$\varphi = 55^\circ\,31'$			
$m + \varphi = 153^\circ\,31'$		$\log\sin = 9{,}64927$	Diff. f. $100'' = -422$
w. H. $= 24^\circ\,47'$		$\log\sin = 9{,}62238$	» » $100'' = +456$
$+\;9',9$		-422	
geoc. H. $= 24^\circ\,56',9.$		$\varphi' - \varphi = -\;10{,}7$	
		2954	
		422	
		$456\,\lvert 4515{,}4 \rvert + 9',9.$	

C. Regel.

Die wahre Höhe nach (IV.) in §. 184. zu finden.

1. Finde den Stundenwinkel des Gestirnes nach §. 134. und die Declination desselben nach §. 103.

2. Zu dem doppelten log sin des halben Stundenwinkels addire log cos Breite und log cos Declination; von der halben Summe dieser 3 Logarithmen subtrahire log sin des halben Restes der Breite minus Declination (die Declination negativ genommen, wenn Breite und Declination ungleichnamig sind), so ist der Rest der Logarithme tang des Bogens *m*. Zu *m* suche log sec und addire dazu den erst schon gebrauchten log sin $\frac{\text{Br.} - \text{Decl.}}{2}$; die Summe ist dann log sin des halben Complements der Höhe, welches doppelt genommen und von 90° subtrahirt, die Höhe giebt.

Es ist zur Berechnung der Höhen genau genug, wenn man nur auf volle Minuten rechnet; wenn man aber auch auf Secunden rechnen wollte, so würde es doch nicht nöthig sein, den Bogen *m* aufzususchen, sondern man nimmt die Differenz zwischen dem gegebenen und nächst kleineren log tang und die gegen diesen stehende Differenz für 100″, wie auch die Differenz für 100″ des auf derselben Linie stehenden log sec und schliesst dann: Diff. log tang : Diff. log sec = Diff. zwischen dem gegebenen und zunächst kleineren log tang : *x*. Die Grösse *x* zu dem, mit dem nächst kleineren log tang auf derselben Linie stehenden log sec addirt, giebt gesuchten log sec Bogen *m*.

Wenn das vorige Beispiel nach dieser Regel berechnet wird, so ist nachfolgende Rechnung zu machen:

$t =$	$1^h\,20'\,44''$				
$\frac{1}{2}t =$	$0^h\,40'\,22''$	$\log\sin \cdot 2 = 18{,}48718$			
$\varphi =$	$+\,55^\circ\,31'$	. . $\log\cos = 9{,}75294$			
$\delta =$	$-\;7^\circ\,31'$	. . $\log\cos = 9{,}99625$			
$\varphi - \delta =$	$63^\circ\;2'$	$38{,}23637$			
		$19{,}11819$			
$\frac{\varphi - \delta}{2} =$	$31^\circ\,31'$	$\log\sin = 9{,}71829$		$= 9{,}71829$	
		$\log\operatorname{tang} m = 9{,}39990$		$\log\sec m = 0{,}01328$	
		$\frac{1}{2}$ Compl. Höhe $= 32^\circ\,37'$		$\log\sin = 9{,}73157$	
		2			
		$65^\circ\,14'$			
		90°			
		wahre Höhe $= 24^\circ\,46'.$			

§. 187.

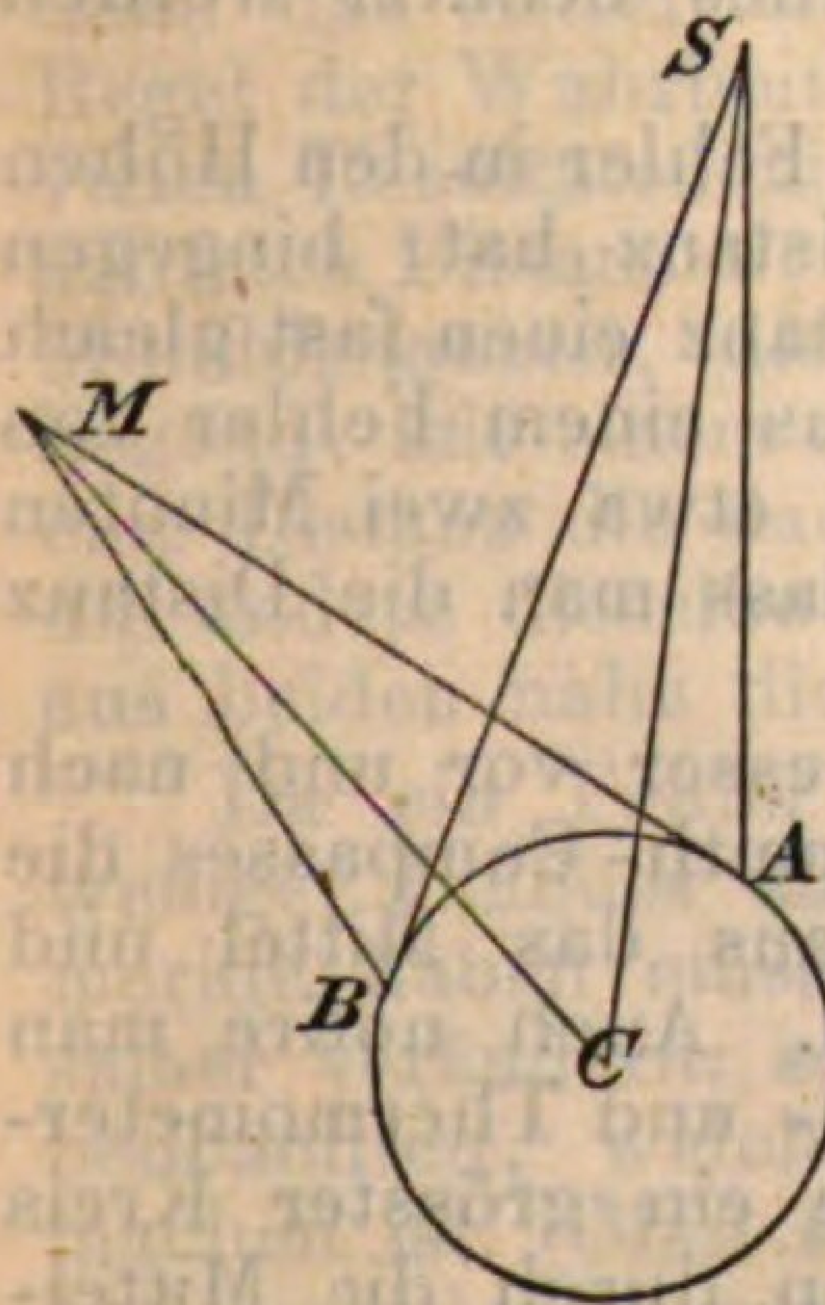
Bestimmung der Länge durch Monddistanzen.

Das Beobachten der Monddistanzen besteht in dem Messen des Winkels zwischen dem vollen Mondrande und dem nächsten Rande der Sonne, oder dem Mittelpunkte eines Fixsternes oder dem eines Planeten, wenn einer dieser Himmelskörper in oder nahe der Mondbahn liegt.

Die Bestimmung der Länge durch Monddistanzen beruht auf Nachstehendem:

Der siderische Monat oder die Zeit, welche der Mond gebraucht, um einen Umlauf um die Erde zu machen, beträgt 27 Tage 7 Stunden 43 Minuten 11 Secunden, oder nahe 27,3 Tage. Der Mond verändert demnach seinen Ort am Himmel täglich $\frac{360^\circ}{27{,}3}$, oder nahe 13° nach Osten, und weil durch die Bewegung der Erde die Sonne ihre Rectascension täglich 59′ 8″ oder nahe 1° nach Osten ändert, so muss der Mond täglich nahe 12° seinen Abstand von der Sonne ändern, also ½° in einer Stunde und 30 Bogensecunden in einer Zeitminute. Von einem Fixstern, der in der Mondbahn liegt, muss der Mond seinen Abstand täglich 1° mehr als von der Sonne, also 13° ändern, weil Fixsterne ihre Rectascension nicht wesentlich verändern. Die Rectascension der Planeten dagegen nimmt ab und zu, und es kann daher die tägliche Entfernung des Mondes von einem Planeten, der in der Mondbahn liegt, etwas mehr oder weniger als 13° betragen. Wenn ein Beobachter den Winkel zwischen dem Monde und einem dazu geeigneten Himmelskörper, d. h. einem Gestirne, welches in der oder nahe der Mondbahn liegt, misst, so muss derselbe diese Veränderung des Winkels von nahe 1 Minute in 2 Zeitminuten wahrnehmen können; wenn er nun beim Messen vielleicht eine Minute fehlt, kann man dies ansehen, als ob die Beobachtung 2 Minuten früher oder später gemacht wäre, welcher Zeitunterschied einem halben Grad in Länge entspricht.

Fig. 92.



Es seien in Figur 92. A und B zwei Orte auf der Erde, von welchen gleichzeitig die Distanz oder der Winkel zwischen dem Monde in M und einem anderen Gestirne in S beobachtet wird, so erhält man in A den Winkel MAS und in B den Winkel MBS, welche Winkel scheinbare Distanzen genannt werden. Diese Winkel sind möglicherweise von ungleicher Grösse; wenn man dieselben aber von dem Einflusse der Refraction und Parallaxe befreit, d. h. auf den Mittelpunkt der Erde, C hier, reducirt, so erhält man für beide Orte, A und B einen und denselben Winkel MCS, welcher die wahre Distanz genannt wird.

Wenn daher die mittleren Zeiten zweier Orte bekannt sind, an welchen man in einem und demselben Augenblicke dieselbe wahre Distanz gefunden hat, so ist der Unterschied dieser beiden Zeiten gleich dem Längenunterschiede beider Orte, in Zeit ausgedrückt.

Im Nautical-Almanac, in dem nautischen Jahrbuche und in der Connaissance des Temps findet man bis zur Grösse von 120°, mit Ausnahme, wenn der Mond der Sonne so nahe steht, dass derselbe, um genau beobachtet werden zu können, zu lichtschwach ist, welches

2 bis 3 Tage vor und nach dem Neumonde stattfindet, für jeden Tag die wahren Monddistanzen von der Sonne, neun dazu am besten geeigneten, im Thierkreise liegenden Fixsternen erster und zweiter Grösse und den Planeten Venus, Mars, Jupiter und Saturn von 3 zu 3 Stunden mittlerer astronomischer Zeit angegeben, und man kann durch Interpolation (§. 104.) die mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride finden, welche gleichzeitig mit einer bestimmten wahren Distanz stattfand. Wenn also ein Beobachter die mittlere Zeit des Ortes seiner Beobachtung kennt, und aus der beobachteten Distanz die wahre Distanz gefunden hat, so kann derselbe, mit Hülfe einer der genannten Ephemeriden, die mittlere Zeit des Meridians der letzteren finden, und aus dem Unterschiede dieser Zeit, mit der mittleren Zeit des Ortes der Beobachtung, die Länge desselben ermitteln.

Die Bestimmung der Länge durch Monddistanzen besteht daher, wenn man die mittlere Zeit des Ortes schon aus anderen Beobachtungen ermittelt hat:

1. in der Beobachtung der Distanz selbst,
2. in der Berechnung der wahren Distanz aus der beobachteten Distanz,
3. in der Berechnung der mittleren Zeit des Meridians der Ephemeride aus der berechneten wahren Distanz, sowie in Ermittelung der Länge des Ortes aus dem Unterschiede der bekannten mittleren Zeit desselben und der gleichzeitig stattfindenden berechneten mittleren Zeit des Meridians der Ephemeride.

I. Die Beobachtung einer Monddistanz und was dabei zu beachten.

Um eine beobachtete Monddistanz vom Einflusse der Refraction und Parallaxe befreien zu können, muss man auch die scheinbaren und wahren Mittelpunktshöhen der beobachteten Himmelskörper zu der Zeit kennen, als die Distanz beobachtet wurde.

Auf See ist es am besten, auch die Höhen kurz vor und kurz nach den 4 bis 6 Monddistanzen, die man mit dem Spiegelsextanten misst, mit einem Octanten zu messen, selbstfolglich nach einer Uhr, deren Stand gegen mittlere Ortszeit man entweder bereits kennt, oder noch zu ermitteln hat, wozu die Höhe desjenigen Gestirnes benutzt werden kann, das dem ersten Vertical am nächsten steht.

Es wird später gezeigt werden, dass ein kleiner Fehler in den Höhen nur einen unbedeutenden Einfluss auf die wahre Distanz hat; hingegen verursacht ein kleiner Fehler in der scheinbaren Distanz einen fast gleich grossen Fehler in der wahren Distanz, und weil aus einem Fehler von einer Minute in der wahren Distanz ein Fehler von etwa zwei Minuten in Zeit = 30′ in Länge entsteht, so folgt daraus, dass man die Distanz so genau wie möglich beobachten muss.

Kurz vor oder nach der Beobachtung, oder besser vor und nach derselben, beobachtet man auch vermittelst des Azimuth-Compasses die Azimuthe der beiden Himmelskörper, nimmt hieraus das Mittel und wendet darauf die Missweisung des Compasses an. Auch notire man kurz vor oder nach der Beobachtung den Barometer- und Thermometerstand und schätze die sphärischen Winkel, welche ein grösster Kreis durch die beiden Himmelskörper mit den Verticalen durch die Mittelpunkte derselben macht.

Es versteht sich von selbst, dass man die Messinstrumente vor der Beobachtung gehörig berichtigt, auch die Index-Correction derselben, besonders die des Sextanten so genau wie möglich — kurz vor und nach der Beobachtung — untersucht.

Sollte die Bewegung des Schiffes hinderlich sein, die Bilder beim Distanzmessen in der Mitte des Fernrohrs, oder vielmehr in der Mitte zwischen den, mit der Ebene des Instrumentes parallel gestellten Fäden zur Berührung zu bringen, so schätze man diese Abweichung, wozu die Fädenweite, die man kennen muss, als Maass dient, notire diesen Abstand (Deviation der Beobachtung genannt) bei jeder Distanzmessung (bei grossen Winkeln besonders zu beachten), weil diese Deviation dann bedeutende Fehler macht, die sich nie gegenseitig aufheben, sondern stets den gemessenen Winkel zu gross geben (§. 90.), welches unter Anderem mit ein Grund ist, sehr grosse Distanzen möglichst zu vermeiden, wenn sich anders eine Wahl darbietet.

Ein Beobachter verfährt nun bei der Distanzmessung und Höhenmessung am besten so: Zuerst wird das Instrument, womit die Distanzen gemessen werden sollen, auf diese, und das, womit man die Höhen messen will, auf letztere eingestellt; dann misst man erst eine Höhe des ausser dem Monde zu beobachtenden Gestirnes und notirt dieselbe wie auch die Uhrzeit, hiernach eine Mondhöhe und darauf 4 bis 6 Distanzen, demnächst wird wieder eine Mondhöhe und zuletzt wieder eine Höhe des anderen Gestirnes gemessen. Bei jeder Höhe und Distanz muss natürlich, wie bei der ersten Höhe bemerkt ist, die Uhrzeit notirt sein. Die Indexcorrection von beiden Instrumenten ist vor und nach dieser Beobachtung zu ermitteln.

Man nimmt ferner das arithmetische Mittel aus den zu den Distanzen gehörenden Uhrzeiten, und findet die in diesem Augenblicke stattgehabten Höhen aus den beiden von jedem Himmelskörper gemessenen Höhen und entsprechenden Uhrzeiten durch Interpolation, indem man die Höhenänderungen den Zwischenzeiten proportional setzt. Da diese Annahme nur für kurze Zeiträume (6 bis 10 Minuten) ohne erheblichen Fehler zu machen ist, so folgt daraus, dass die ganze Beobachtung in kurzer Zeit gemacht werden muss, und es erfordert Uebung, dieselbe mit der erforderlichen Genauigkeit und Schnelligkeit ausführen zu können, weshalb es dem Seemanne sehr anzurathen ist, so oft als möglich Monddistanzen zu beobachten.

Wenn die Gelegenheit sich darbietet, Distanzen, sowohl östlich als westlich vom Monde zu messen, so ist dieses besonders zu empfehlen; denn das Mittel aus den Resultaten dieser Beobachtungen wird in der Regel der Wahrheit näher kommen, als wenn man das Mittel aus ebenso vielen Resultaten nimmt, welche aus, auf einer Seite vom Monde beobachteten Distanzen, gefunden sind. Hat man nämlich nahe gleich grosse Monddistanzen, die eine ostwärts, die andere westwärts vom Monde liegend, mit einem etwas fehlerhaften Instrumente gemessen, so giebt die eine Distanz die daraus abgeleitete Länge nahe ebenso viel zu gross, als die andere dieselbe zu klein giebt; folglich wird das arithmetische Mittel aus beiden nahe die richtige Länge sein.

Da ein Fehler in der beobachteten oder in der wahren Distanz weniger Einfluss auf die Bestimmung der Zeit des Meridians der Ephemeride haben muss, wenn die Distanzen schneller als wenn sie langsamer verändern; so ist es am vortheilhaftesten, diejenigen Distanzen zu beobachten, welche am meisten verändern, wenn eine Auswahl zu machen ist. Man sieht es leicht an den zwischen den Distanzen in den Ephemeriden angegebenen Proportional-Logarithmen, welche Distanzen am schnellsten ab- oder zunehmen, denn bei diesen ist der Proportional-Logarithme am kleinsten.

Es kommt, wie später gezeigt werden soll, bei Berechnung der wahren Distanz aus der scheinbaren Distanz besonders auf die genaue

Kenntniss der Refraction und Parallaxe an. Da erstere bei kleinen Höhen unsicher ist, so vermeidet man bei Distanzbeobachtungen gern Höhen unter 5°, und wenn man kein Barometer und Thermometer hat, so kann man sich zur Regel machen, keine Distanzbeobachtungen anzustellen, wenn die Höhen unter 10° sind, besonders wenn es sehr warm oder sehr kalt sein sollte.

Ist die Kimm undeutlich zu sehen, welches Nachts der Fall sein kann, so beobachtet man nur die Distanzen, und misst keine Höhen, oder nur die Höhe des Himmelskörpers, von welchem sich dieselbe mit der erforderlichen Genauigkeit beobachten lässt, welche die des Mondes sein wird. Aus der bekannten Zeit und bekannten Breite des Ortes berechnet man dann die wahren Höhen, wie im vorigen Paragraphen gezeigt ist, und findet nach den in den §§. 126. und 127. gegebenen Regeln auch die scheinbaren Mittelpunktshöhen. Auf See wird fast immer, wegen der Unsicherheit in der Breite, die Höhe, durch Beobachtung erhalten, der durch Rechnung ermittelt, vorzuziehen sein.

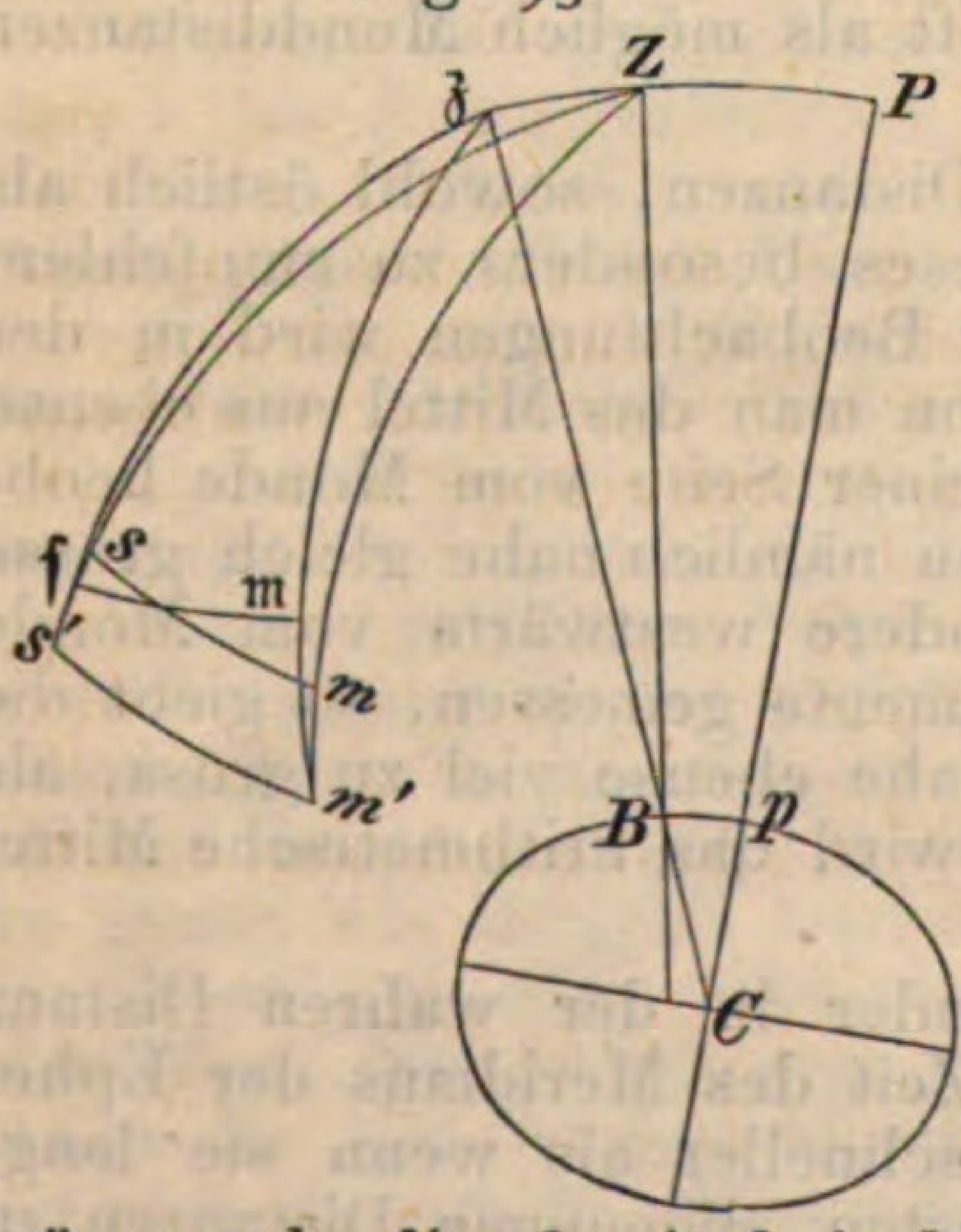
II. Aus der beobachteten Distanz die wahre Distanz zu finden.

Erste Methode.

Um aus der beobachteten Distanz die wahre Distanz genau berechnen zu können, ist auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht zu nehmen.

Es sei in Fig. 93. *Bp* ein Stück des Erdmeridians durch den Ort eines Beobachters in *B* gehend, *PZ* der entsprechende Bogen am Himmel, *ZB* die Richtung des Lothes durch *B*, also *Z* das geographische Zenith, $\mathfrak{z}$ sei das geocentrische Zenith, welches mithin in der verlängerten Linie *CB* liegt, da *C* der Mittelpunkt der Erde ist. Ferner sei *m* der von *B* aus gesehene scheinbare Ort des Mondes und *s* der scheinbare Ort des anderen Gestirnes, mithin *Zm* und *Zs* Verticalbögen von dem geographischen Zenith nach dem scheinbaren Mittelpunkte des Mondes und dem des anderen Gestirnes. *Zm* und *Zs* sind daher die scheinbaren Zenithdistanzen des Mondes und des anderen Gestirnes, und ein Beobachter in *B* wird die scheinbare Distanz zwischen dem Mittelpunkte des Mondes und dem anderen Gestirn = *sm* finden, wenn dieses ein grösster Kreisbogen ist. Wenn ferner *m'* und *s'* die für Refraction berichtigten Orte des Mondes und des anderen Gestirnes sind, so müssen diese in den verlängerten geographischen Verticalen *Zm* und *Zs* liegen, weil die Refraction in diesen Verticalen so wirkt, dass die von Refraction befreiten Höhen kleiner als die damit behafteten und die von Refraction befreiten Zenithdistanzen grösser als die damit behafteten sind. Es sei daher *Zm'* die für Refraction berichtigte Zenithdistanz des Mondes und *Zs'* die des anderen Gestirnes, so ist *s'm'* die für die Wirkung der Refraction berichtigte Distanz von *B* aus gesehen.

Fig. 93.



Da $\mathfrak{z}$ das geocentrische Zenith bezeichnet, so sind $\mathfrak{z}m'$ und $\mathfrak{z}s'$ Verticale zum geocentrischen Zenith durch die für Refraction berichtigten Orte des Mondes und des anderen Gestirnes; und wenn $m'\mathfrak{m}$ die Höhenparallaxe des Mondes und $s'\mathfrak{f}$ die des anderen Gestirnes ist, so sind $\mathfrak{m}$

und $\mathfrak{s}$ die wahren geocentrischen Orte dieser Himmelskörper, mithin $\mathfrak{z}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{z}\mathfrak{s}$ die wahren geocentrischen Zenithdistanzen und $\mathfrak{s}\mathfrak{m}$ ist die wahre Distanz, d. i. $\angle \mathfrak{s}C\mathfrak{m}$.

Der Kürze wegen bezeichne man:

$90° - Zm$ = locale scheinbare Mittelpunktshöhe des Mondes mit . . H,
$90° - Zm'$ = loc. w. Mittelpunktsh. d. Mond. (loc. schb. H. — Refr.) mit H',
$90° - \mathfrak{z}m'$ = loc. wahre geocentr. Mittelpunktshöhe des Mondes,
= locale wahre Höhe + $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A$ mit $\mathfrak{H}$,
$90° - \mathfrak{z}\mathfrak{m}$ = geocentrische wahre Mittelpunktshöhe des Mondes,
= loc. wahre geocentrische Höhe + Höhenparallaxe mit . $\mathfrak{H}'$,
$90° - Zs$ = loc. scheinb. Mittelpunktshöhe des zweiten Gestirnes mit h,
$90° - Zs'$ = locale wahre Mittelpunktshöhe des zweiten Gestirnes,
= locale scheinbare Höhe — Refraction mit h',
$90° - \mathfrak{z}s'$ = loc. wahre geoc. Mittelpunktshöhe d. zweiten Gestirnes,
= loc. wahre Höhe + $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A$ mit $\mathfrak{h}$,
$90° - \mathfrak{z}\mathfrak{s}$ = geocentrische wahre Höhe des zweiten Gestirnes,
= loc. wahre geocentrische Höhe + Höhenparallaxe mit . $\mathfrak{h}'$,
sm = der scheinbaren Distanz mit D,
$s'm'$ = der für Refraction verbesserten Distanz mit D',
$\mathfrak{s}\mathfrak{m}$ = der für Refraction und Parallaxe verb. wahren Distanz,
= der wahren Distanz mit . D'',
$\angle sZm$ = dem sphärischen Winkel, welchen die Verticale vom geographischen Zenith durch den scheinbaren Mittelpunkt des Mondes und des anderen Gestirnes mit einander machen, mit . Z,
$\angle s'\mathfrak{z}m'$ = dem sphärischen Winkel, welchen die Verticale durch das geocentrische Zenith und die für Refraction berichtigten Orte der Mittelpunkte des Mondes und des anderen Gestirnes mit einander machen, mit $\mathfrak{Z}$.

Die sphärischen Dreiecke sZm und $s'Zm'$ (Fig. 93.) geben nach §. 19. der sphärischen Trigonometrie die Gleichungen:

$\cos D = \sin H \cdot \sin h + \cos H \cdot \cos h \cdot \cos Z$ (1).
$\cos D' = \sin H' \cdot \sin h' + \cos H' \cdot \cos h' \cdot \cos Z$ (2).

Wenn man in diesen Gleichungen nach §. 7. der ebenen Trigonometrie für $\cos Z$ den gleichen Werth $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} Z$ und demnächst für $\sin H \cdot \sin h + \cos H \cdot \cos h$ den gleichen Werth $\cos (H - h)$, ebenso für $\sin H' \cdot \sin h' + \cos H' \cdot \cos h'$ den gleichen Werth $\cos (H' - h')$ setzt, so ergiebt sich:

$\cos D = \cos (H - h) - \cos H \cdot \cos h \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} Z$ (3),
$\cos D' = \cos (H' - h') - \cos H' \cdot \cos h' \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} Z$ (4).

Nach (3) ist $2 \sin^2 \frac{1}{2} Z = \frac{\cos (H - h) - \cos D}{\cos H \cdot \cos h}$, und wenn man diesen Werth in (4) setzt, so ist

$$\cos D' = \cos (H' - h') - [\cos (H - h) - \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} \quad \ldots \text{(A. I.)}.$$

Die sphärischen Dreiecke $s'\mathfrak{z}m'$ und $\mathfrak{s}\mathfrak{z}\mathfrak{m}$ liefern nachstehende Gleichungen:

$\cos D' = \sin \mathfrak{H} \cdot \sin \mathfrak{h} + \cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h} \cdot \cos \mathfrak{Z}$ (5),
$\cos D'' = \sin \mathfrak{H}' \cdot \sin \mathfrak{h}' + \cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}' \cdot \cos \mathfrak{Z}$ (6).

Wenn man mit diesen beiden Gleichungen ähnliche Umformungen vornimmt, wie mit (1) und (2) vorgenommen sind, so erhält man

$$\cos D'' = \cos (\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}') - [\cos (\mathfrak{H} - \mathfrak{h}) - \cos D'] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} \quad \ldots \text{(A. II.)}.$$

Setzt man in (A. I.)

$2 \sin \frac{1}{2}[H - h + D] \cdot \sin \frac{1}{2}[D - (H - h)]$ für $\cos(H - h) - \cos D$,

und in (A. II.)

$2 \sin \frac{1}{2}[\mathfrak{H} - \mathfrak{h} + D'] \cdot \sin \frac{1}{2}[D' - (\mathfrak{H} - \mathfrak{h})]$ für $\cos(\mathfrak{H} - \mathfrak{h}) - \cos D'$,

so ist

$$\cos D' = \cos(H' - h') - 2 \sin \tfrac{1}{2}[H - h + D] \cdot \sin \tfrac{1}{2}[D - H + h] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} \quad \text{(B. I.)}.$$

$$\cos D'' = \cos(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}') - 2 \sin \tfrac{1}{2}[\mathfrak{H} - \mathfrak{h} + D'] \cdot \sin \tfrac{1}{2}[D' - \mathfrak{H} + \mathfrak{h}] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} \quad \text{(B. II.)}.$$

Eine dritte und vierte Formel zur Berechnung der wahren Distanz findet man wie folgt:

Es ist nach §. 7. der ebenen Trigonometrie

$$\cos Z = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} Z - 1,$$
$$\sin H \cdot \sin h - \cos H \cdot \cos h = -\cos(H + h),$$
$$\sin H' \cdot \sin h' - \cos H' \cdot \cos h' = -\cos(H' + h').$$

Setzt man diese Werthe bez. in (1) und (2), so ergiebt sich:

$$\cos D = \cos H \cdot \cos h \cdot 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} Z - \cos(H + h) \quad \ldots \ldots \quad (7),$$
$$\cos D' = \cos H' \cdot \cos h' \cdot 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} Z - \cos(H' + h') \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Aus (7) ergiebt sich

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} Z = \frac{\cos D + \cos(H + h)}{\cos H \cdot \cos h}$$

und dies für $2 \cos^2 \frac{1}{2} Z$ in (8) gesetzt, giebt

$$\cos D' = [\cos(H + h) + \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} - \cos(H' + h') \quad \ldots \quad \text{(C. I.)}.$$

Nimmt man dieselben Reductionen mit (5) und (6) vor, so ergiebt sich:

$$\cos D'' = [\cos(\mathfrak{H} + \mathfrak{h}) + \cos D'] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} - \cos(\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}') \quad \ldots \quad \text{(C. II.)}.$$

Es ist ferner nach §. 7. der ebenen Trigonometrie:

$$\cos(H + h) + \cos D = 2 \cos \tfrac{1}{2}(H + h + D) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(H + h - D),$$
$$\cos(\mathfrak{H} + \mathfrak{h}) + \cos D' = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} + \mathfrak{h} + D') \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} + \mathfrak{h} - D'),$$

und wenn man diese Werthe bez. in (C. I.) und (C. II.) setzt, so ergiebt sich eine vierte Formel zur Berechnung der wahren Distanz, nämlich:

$$\cos D' = 2 \cos \tfrac{1}{2}(H + h + D) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(H + h - D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} - \cos(H' + h') \quad \text{(D. I.)},$$

$$\cos D'' = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} + \mathfrak{h} + D') \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} + \mathfrak{h} - D') \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} - \cos(\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}') \quad \text{(D. II.)}.$$

Eine fünfte Formel erhält man wie folgt:

Man subtrahire (C. I.) von $1 = 1$, das giebt

$$1 - \cos D' = 1 + \cos(H' + h') - [\cos(H + h) + \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h},$$

und hierin $2 \sin^2 \frac{1}{2} D'$ für $1 - \cos D'$ und $2 \cos^2 \frac{1}{2}(H' + h')$ für $1 + \cos(H' + h')$ gesetzt, liefert

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} D' = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(H' + h') - [\cos(H + h) + \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}.$$

Setzt man hierin noch für $\cos(H + h) + \cos D$ den gleichen Werth $2 \cos \frac{1}{2}(H + h + D) \cdot \cos \frac{1}{2}(H + h - D)$ und $S = \dfrac{H + h + D}{2}$, so wird

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} D' = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (H' + h') - 2 \cos S \cdot \cos (S - D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h},$$

mithin

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} D' = \cos^2 \tfrac{1}{2} (H' + h') - \cos S \cdot \cos (S - D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h},$$

oder auch

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} D' = \cos^2 \tfrac{1}{2} (H' + h') \cdot \left[1 - \cos S \cdot \cos (S - D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h \cdot \cos^2 \frac{1}{2} (H' + h')} \right].$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\sin b = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} (H' + h')} \cdot \sqrt{\cos S \cdot \cos (S - D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}},$$

so ergiebt sich

$\sin^2 \tfrac{1}{2} D' = \cos^2 \tfrac{1}{2} (H' + h') \cdot (1 - \sin^2 b)$, und weil

$\sqrt{1 - \sin^2 b} = \cos b$

ist, findet man, wenn die Quadratwurzel ausgezogen wird,

$\sin \tfrac{1}{2} D' = \cos \tfrac{1}{2} (H' + h') \cdot \cos b$ (E. I.).

Nimmt man ähnliche Veränderungen mit (B. II.) vor, so findet man:

$\sin \tfrac{1}{2} D'' = \cos \tfrac{1}{2} (\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}') \cdot \cos b'$ (E. II.),

worin $\sin b' = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} (\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}')} \cdot \sqrt{\cos S' \cdot \cos (S' - D') \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}}}$, und

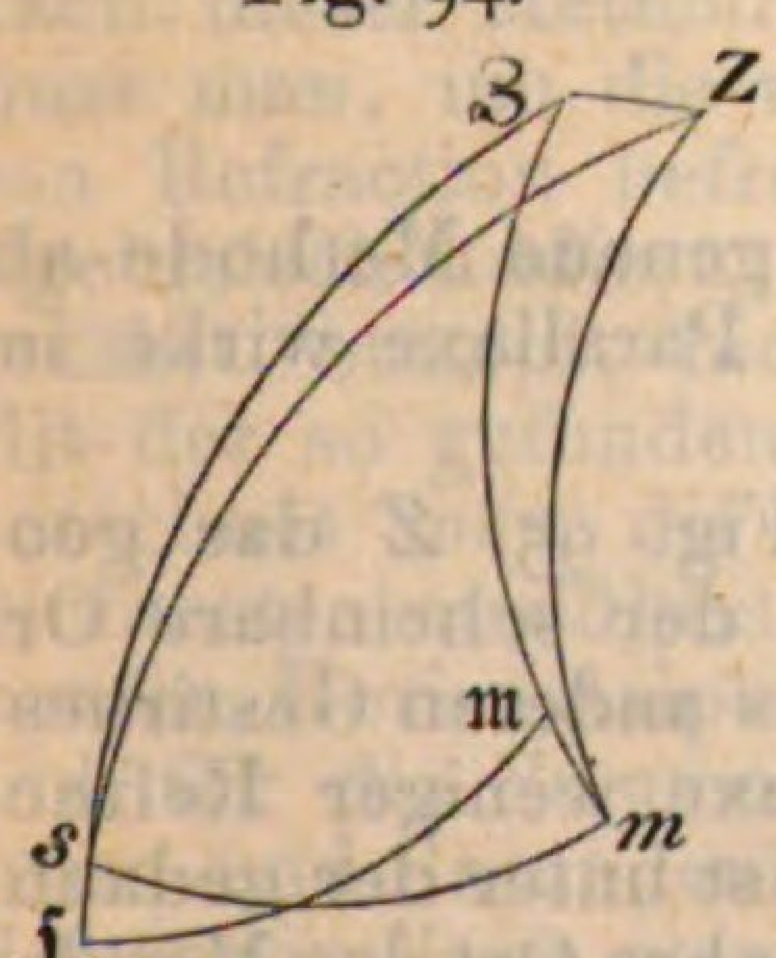
$S' = \tfrac{1}{2} (\mathfrak{H} + \mathfrak{h} + D')$ gesetzt ist.

Die beschriebene Methode, aus der scheinbaren Distanz die wahre Distanz zu finden, ist strenge richtig, und man kann die Rechnung nach den mit A., B., C., D. oder E. bezeichneten Formeln ausführen, wovon nur die letzteren ganz logarithmisch sind.

Zweite Methode.

Da die Berechnung der wahren Distanz nach der vorigen genauen Methode mühsam ist, so folgt eine zweite, weniger genaue, aber leichtere Methode, welche darin besteht, dass man annimmt, die Refraction wirke wie die Parallaxe im Vertical zum geocentrischen Zenith.

Fig. 94.



Es sei in Fig. 94. Z das geographische und $\mathfrak{Z}$ das geocentrische Zenith, m der scheinbare Ort des Mondes und s der des anderen Gestirnes. Die Höhenparallaxe weniger der Refraction des Mondes sei $= m\mathfrak{m}$, mithin ist unter der Annahme, dass auch die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirkt, $\mathfrak{m}$ der wahre für Parallaxe und Refraction berichtigte Ort des Mondes. Unter derselben Annahme ist, wenn $s\mathfrak{f}$ = der Refraction — Höhenparallaxe des anderen Gestirnes ist, $\mathfrak{f}$ der wahre für Refraction und etwaiger Parallaxe berichtigte Ort desselben.

Man bezeichne wieder der Kürze wegen:

$90^\circ - \mathfrak{Z}m$ = der localen scheinbaren geocentrischen Mittelpunktshöhe des Mondes = locale scheinbare Mittelpunktshöhe $+ (\varphi' - \varphi) \cdot \cos$ Azim. vom Merid. des oberen Pols gerechnet, mit . , . $\mathfrak{H}$,

$90^\circ - \mathfrak{Z}\mathfrak{m}$ = der geocentrischen wahren Mittelpunktshöhe des Mondes = der localen scheinbaren geocentrischen Mittelpunktshöhe + (Höhenparallaxe — Refraction) mit . . . $\mathfrak{H}'$,

$90^\circ - \mathfrak{Z}s$ = der localen scheinbaren geocentrischen Mittelpunktshöhe des anderen Gestirnes = der localen scheinbaren Höhe + $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A$, mit $\mathfrak{h}$,

$90^\circ - \mathfrak{Z}\mathfrak{s}$ = der geocentrischen wahren Mittelpunktshöhe des zweiten Gestirnes = der localen scheinbaren geocentrischen Mittelpunktshöhe — (Refraction — Höhenparallaxe), mit $\mathfrak{h}'$,

sm = der scheinbaren Distanz, mit D,

$\mathfrak{s}\mathfrak{m}$ = der wahren Distanz, mit D',

$\angle s\mathfrak{Z}m$ = dem sphärischen Winkel, welchen die Verticale durch das geocentrische Zenith und durch die Mittelpunkte der Gestirne mit einander machen, mit $\mathfrak{Z}$.

Man hat jetzt aus der scheinbaren Distanz D und den localen scheinbaren geocentrischen Mittelpunktshöhen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$, den Winkel $\mathfrak{Z}$, und aus diesem und den geocentrischen wahren Höhen die wahre Distanz zu berechnen.

Wenn man mit diesen Grössen ähnliche Schlüsse macht, als bei der ersten Methode mit der scheinbaren Distanz, den localen scheinbaren Höhen und den localen wahren Höhen gemacht sind, um die für Refraction berichtigte Distanz zu finden, so ergeben sich nachstehende Formeln zur Berechnung der wahren Distanz:

$$\cos D' = \cos(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}') - [\cos(\mathfrak{H} - \mathfrak{h}) - \cos D] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} \quad \text{(I.)},$$

$$\cos D' = \cos(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}') - 2 \sin\tfrac{1}{2}[\mathfrak{H} - \mathfrak{h} + D] \cdot \sin\tfrac{1}{2}[D - \mathfrak{H} + \mathfrak{h}] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} \quad \text{(II.)},$$

$$\cos D' = [\cos(\mathfrak{H} + \mathfrak{h}) + \cos D] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} - \cos(\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}') \quad \text{(III.)},$$

$$\cos D' = 2 \cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} + \mathfrak{h} + D) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} + \mathfrak{h} - D) \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} - \cos(\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}') \quad \text{(IV.)},$$

$$\sin\tfrac{1}{2} D' = \cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}') \cdot \cos b \quad \text{(V.)},$$

worin

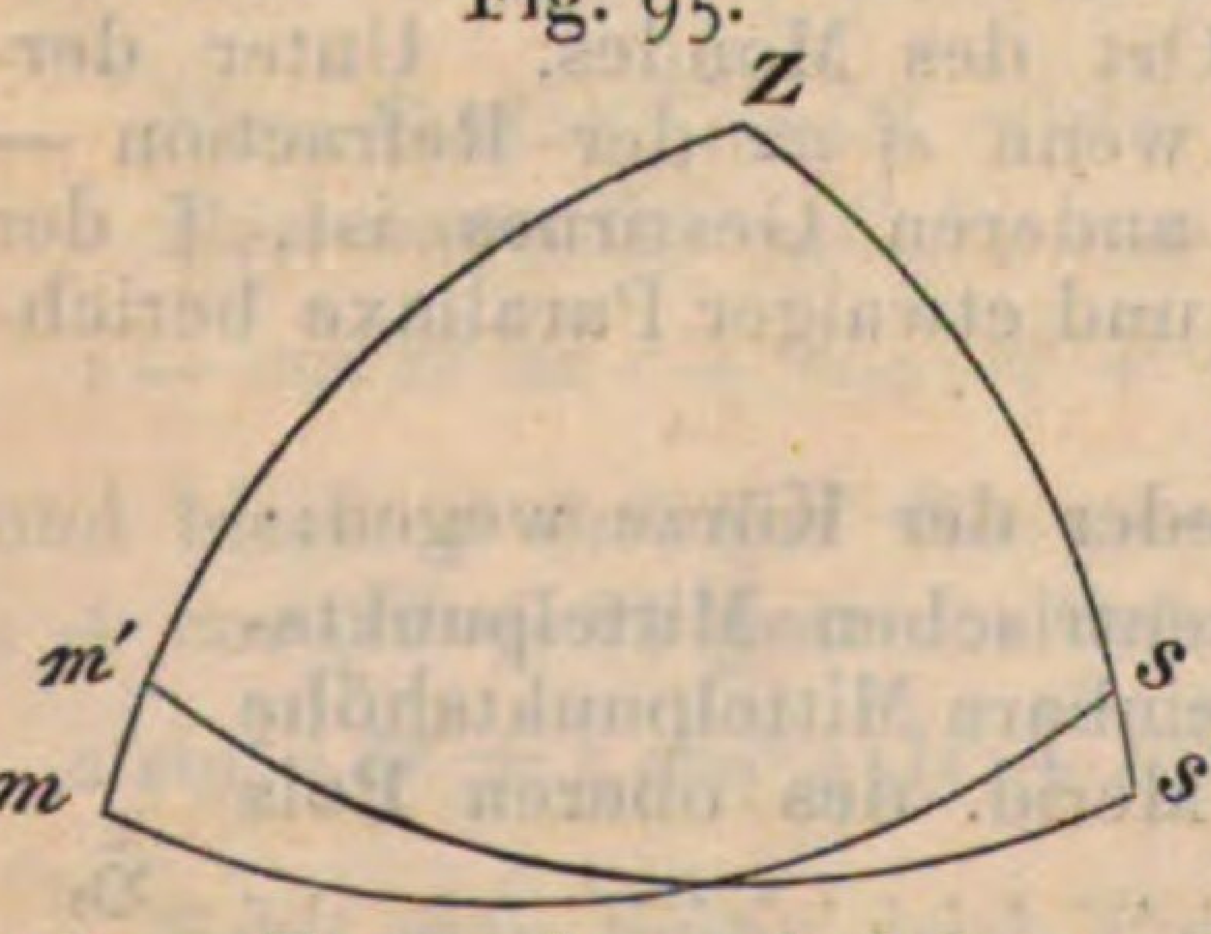
$$\sin b = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}')} \cdot \sqrt{\cos S \cdot \cos(S - D) \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}}}, \text{ und}$$

$S = \frac{1}{2}(\mathfrak{H} + \mathfrak{h} + D)$ gesetzt ist.

Dritte Methode.

Diese dritte noch leichtere, aber auch weniger genaue Methode als die zweite, besteht darin, dass man annimmt, die Parallaxe wirke im Vertical zum geographischen Zenith.

Fig. 95.



Es sei daher in Fig. 95. Z das geographische Zenith, m der scheinbare Ort des Mondes, s der des anderen Gestirnes; mm' sei Höhenparallaxe weniger Refraction des Mondes, so ist unter der gedachten Annahme m' der wahre Ort des Mondes und s' der des anderen Gestirnes, wenn nämlich ss' dessen Refraction weniger Höhenparallaxe.

Man bezeichne wieder der Kürze wegen

$90^\circ - Zm$ = der scheinbaren Höhe des Mondes, mit H,

$90^\circ - Zm'$ = der wahren Höhe des Mondes, mit H',

$90^\circ - Zs$ = der scheinbaren Höhe des anderen Gestirnes, mit . . . h,

$90^\circ - Zs'$ = der wahren Höhe des anderen Gestirnes, mit h',
sm = der scheinbaren Distanz, mit D,
$s'm'$ = der wahren Distanz, mit D',
$\angle mZs$ mit . Z;

so ergeben ähnliche Folgerungen, wie in der vorigen Methode gemacht sind, nachstehende Formeln zur Berechnung der wahren Distanz:

$$\cos D' = \cos(H' - h') - [\cos(H - h) - \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} \quad . \; . \; . \; \text{(VI.)},$$

$$\cos D' = \cos(H' - h') - 2 \sin\tfrac{1}{2}(H - h + D) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(D - H + h) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} \quad \text{(VII.)},$$

$$\cos D' = [\cos(H + h) + \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} - \cos(H' + h') \quad . \; . \; . \; \text{(VIII.)},$$

$$\cos D' = 2 \cos\tfrac{1}{2}(H + h + D) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(H + h - D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} - \cos(H' + h') \quad \text{(IX.)},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}D' = \cos\tfrac{1}{2}(H' + h') \cdot \cos b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(X.)},$$

worin

$$\sin b = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(H' + h')} \cdot \sqrt{\cos S \cdot \cos(S - D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}}, \text{ und}$$

$S = \frac{1}{2}(H + h + D)$ gesetzt ist.

Formel (VI.) ist von Dunthorne, Formel (IX.) von Lexell und Formel (X.) von Borda, welche letztere ganz logarithmisch. Bei (VI.) ist zu beachten, dass $\cos D$ negativ, wenn $D > 90^\circ$ und dass $D' > 90^\circ$, wenn der Cosinus davon negativ wird, welches stattfindet, wenn $\cos(H' - h')$ kleiner als der davon zu subtrahirende Werth ist. Aus Formel (VI.) ergiebt sich, wenn man, den Bruch ausgeschlossen, darin $1 -$ sin vers für cos setzt, die von Mackay, nämlich:

$$\text{sin vers } D' = \text{sin vers}(H' - h') + [\text{sin vers } D - \text{sin vers}(H - h)] \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}.$$

In den nautischen Tafeln sind aber nur die natürlichen Sinusse enthalten und so wird die Formel von Dunthorne vorzugsweise benutzt.

Anmerkung. Wenn man auch bei Ermittelung der wahren Distanz nach dieser Methode die Abplattung der Erde berücksichtigen will, so muss man, um die richtige Höhenparallaxe ermitteln zu können, zu der von Refraction befreiten Mittelpunktshöhe des Mondes $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos A$ algebraisch addiren, wenn das Azimuth, vom Meridian des oberen Pols gezählt, stumpf, hingegen abziehen, wenn dasselbe spitz ist (§. 115.) *). Mit der so gefundenen Höhe und der localen Horizontalparallaxe (§. 114.) berechnet man die Höhenparallaxe nach §. 116. (I.), welches sich am leichtesten ausführen lässt, wenn man den Proportional-Logarithmen der localen Horizontalparallaxe zu dem Logarithmen sec. dieser Höhe addirt und für die Summe als Proportional-Logarithmen die zugehörigen Minuten und Secunden aufsucht, die gleich der Höhenparallaxe sind. Diese Höhenparallaxe weniger Refraction addire man aber zu der scheinbaren Mittelpunktshöhe, so erhält man diejenige wahre Höhe, welche bei Be-

*) $\varphi' - \varphi$ wird bekanntlich aus der nautischen Tafel XIX. entnommen. Wenn man mit dieser Grösse (in Minuten und Zehntel-Minuten ausgedrückt) und dem wahren Azimuth des Mondes auf volle Grade genommen (wenn dasselbe stumpf ist, mit dessen Supplement) in die nautische Tafel II. (die Gradtafel) geht, so steht gegen $\varphi' - \varphi$ (diese Grösse in der Distanz-Spalte genommen) in der Breiten-Spalte die gesuchte Höhen-Correction in Minuten und Decimaltheilen von Minuten.

rechnung der wahren Distanz nach der in Rede stehenden dritten Methode mit H' zu bezeichnen ist. Bei der so berechneten wahren Distanz ist der Fehler gemacht, dass man die Höhenparallaxe des Mondes im Vertical zum geographischen Zenith hat wirken lassen. Dieser Fehler sowie die Correction, welche deshalb auf die berechnete Distanz anzuwenden ist, können wie folgt ermittelt werden.

Wenn nämlich nach §. 117. Fig. 73. für den localen wahren Ort des Mondes in M die locale Höhenparallaxe gleich ML und $Me = ML$ ist, so wird Le der Bogen eines Parallelkreises, dessen Pol M ist.

Nach §. 117. (a.) ist

$$\tfrac{1}{2} M = \frac{(\varphi' - \varphi) \cdot \sin A}{2 \cos h},$$

also

$$M = \frac{(\varphi' - \varphi) \cdot \sin A}{\cos h},$$

mithin ist in grösstem Kreismaasse ausgedrückt

$$Le = \frac{(\varphi' - \varphi) \cdot \sin A \cdot \cos(90^\circ - p' \cdot \cos h)}{\cos h},$$

$$= (\varphi' - \varphi) \cdot \sin A \cdot \sin p',$$

worin A das Azimuth des Mondes vom Meridian des oberen Pols gerechnet und p' die locale Horizontalparallaxe desselben bezeichnet.

Setzt man in die letzte Gleichung für p' die mittlere locale Horizontalparallaxe $= 57' \ 18''$, welches ohne erheblichen Fehler geschehen kann, indem der grösste Fehler, der möglicherweise dadurch entsteht, kaum eine Secunde beträgt, so ist sin $57' \ 18''$ sehr nahe $\frac{1}{60}$ (für den Radius $= 1$) und

$$Le = \frac{\varphi' - \varphi}{60} \cdot \sin A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XI.)}.$$

Da in der nautischen Tafel XIX. bekanntlich $(\varphi' - \varphi)$ in Minuten und Secunden angegeben ist, so hat man, wenn man diese Grösse, in Minuten und Zehntheile von Minuten ausgedrückt, als Secunden und Zehntheile von Secunden nimmt, $\frac{\varphi' - \varphi}{60}$ in Secunden.

Wenn nun die nach der dritten Methode berechnete wahre Distanz in einem grössten Kreise läge, dessen Verlängerung durch die Punkte L und e ginge, so würde dieselbe um Le zu gross oder zu klein gefunden sein; liegt die berechnete Distanz aber nicht in dieser Richtung und kennt man den Winkel am Monde, den die Distanz mit dem Vertical Ze macht, so ergiebt sich leicht die, zur Ausgleichung des bei Berechnung der wahren Distanz gemachten Fehlers, nöthige Correction $= Le$ mal sin Winkel am Monde; folglich ist die auf die berechnete wahre Distanz anzuwendende Correction

$$= \frac{\varphi' - \varphi}{60} \cdot \sin A \cdot \sin \angle \text{ am Monde} \quad \ldots\ldots \quad \text{(XII.)}.$$

Da diese Correction nie 11,5 Secunden werden kann, indem $\varphi' - \varphi$ im höchsten Falle 11,5 Minuten beträgt, so genügt es auch, wenn man das wahre Azimuth des Mondes durch Peilung mit dem Compasse ermittelt und den gedachten Winkel am Monde schätzt, wenn man die Distanzbeobachtung macht.

Nach dieser Auseinandersetzung ergiebt sich nachstehende

Regel

zur Auffindung der Correction, welche auf die nach der dritten Methode berechnete wahre Distanz anzuwenden ist, um den dabei gemachten Fehler auszugleichen, der dadurch entstanden ist, dass man zwar die locale Höhenparallaxe richtig berechnet, dieselbe weniger Refraction auf die scheinbare Höhe angewandt hat.

Finde aus der nautischen Tafel XIX. für die bekannte geographische Breite $\varphi' - \varphi$ in Minuten und Zehntelminuten, gehe mit dem wahren Azimuth des Mondes, oder wenn dieses, vom Meridian des oberen Pols gezählt, stumpf ist, mit dem Supplement desselben in die Gradtafel, mit $\varphi' - \varphi$ in die Distanzspalte und nimm die in der Abweichungsspalte dagegen stehende Zahl. Mit dieser Zahl und dem Winkel, welchen die Monddistanz mit dem Vertical des Mondes macht, oder wenn dieser Winkel stumpf ist, mit dem Supplement desselben, gehe wieder in die Gradtafel, nimm die gedachte Zahl in der Distanzspalte, so ist das Danebenstehende in der Abweichungsspalte die gesuchte Correction in Secunden und Decimaltheilen von Secunden.

1. Die so gefundene Correction in Secunden ist zur berechneten Distanz zu addiren oder davon zu subtrahiren:

a. wenn auf nördlicher Breite der Mond an der östlichen Seite des Himmels steht, je nachdem das Gestirn, zwischen welchem die Distanz gemessen ist, sich links oder rechts vom Monde befindet;

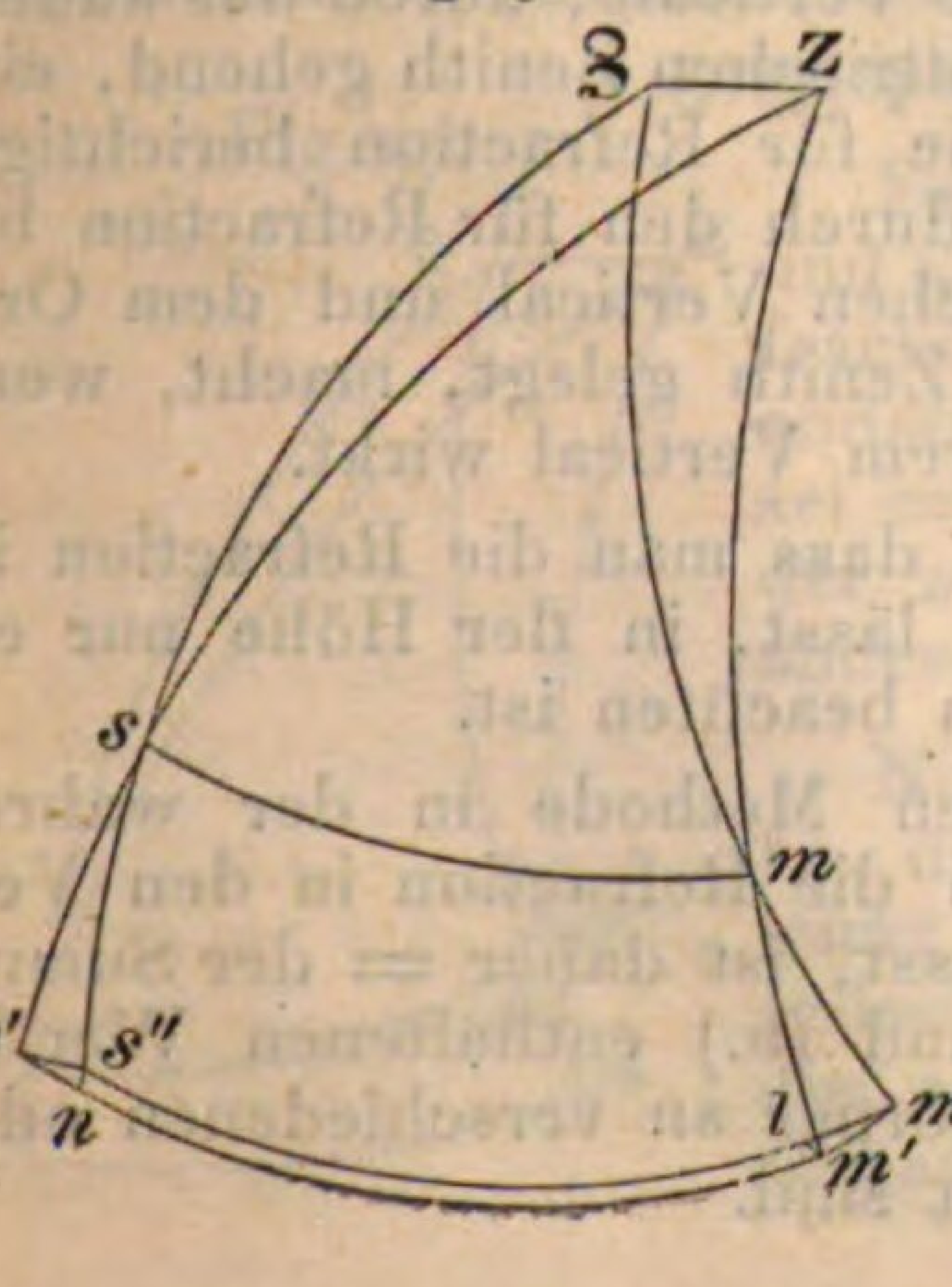
b. wenn auf südlicher Breite der Mond sich an der östlichen Seite des Himmels befindet, je nachdem das andere Gestirn rechts oder links vom Monde steht.

2. Zu subtrahiren oder zu addiren ist die gedachte Correction:

c. wenn auf nördlicher Breite der Mond an der westlichen Seite des Himmels steht, je nachdem das andere Gestirn sich links oder rechts vom Monde befindet;

d. wenn auf südlicher Breite der Mond an der westlichen Seite des Himmels steht, je nachdem das andere Gestirn rechts oder links von demselben sich befindet.

Fig. 96.



§. 188.

Untersuchung des Fehlers, der nach der zweiten Methode (§. 187.) dadurch in der wahren Distanz entstehen kann, dass man die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirken lässt.

Es bezeichne (Fig. 96.) $\mathfrak{Z}$ das geocentrische und Z das geographische Zenith, m sei der scheinbare und m' der für Refraction berichtigte Ort des Mondes, sowie s der scheinbare und s' der für Refraction berichtigte Ort des anderen Gestirnes, so ist sm die scheinbare Distanz, mm' ist $=$ der Refraction der Mondhöhe, $ss' =$ der Refraction der Höhe des anderen Gestirnes und $s'm'$ ist die für Refraction berichtigte Distanz.

Man nehme $mm'' = mm'$ und $ss'' = ss'$, so ist $s''m''$ die für Refraction berichtigte Distanz, wenn man annimmt, dass die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirkt.

Von m' fälle man die Normale $m'l$ auf $m''s''$ und mache $m'n = s''l$, so ist $s''m'' - lm'' = s''l$ und $s'm' = m'n + ns'$; mithin ist $s'm' = s''m'' - lm'' + ns'$, wenn beide Gestirne sich auf derselben Seite des Meridians befinden; sind sie aber an verschiedenen Seiten des Meridians, so ergiebt sich auf ähnliche Art, dass

$s'm' = s''m'' - lm'' - ns'$ ist.

Das kleine Dreieck $m'lm''$ kann als geradlinig und bei l rechtwinklig betrachtet werden, auch kann man das kleine Dreieck $s's''n$ als ein ebenes bei n rechtwinkliges Dreieck ansehen.

Im Dreieck $m'lm''$ ist

$lm'' = m'm'' \cdot \sin \angle lm'm''$,

oder wenn man $\angle s'm'l = 90°$ annimmt,

$lm'' = m'm'' \cdot \cos \angle s'm'm''$.

Das Dreieck $m'mm''$ ist gleichschenklig und daher ist

$m'm'' = 2\,(m'm) \cdot \sin \tfrac{1}{2}\angle m'mm''$,

und wenn man diesen Werth für $m'm''$ in die vorige Gleichung setzt, so ergiebt sich:

$lm'' = 2\,(m'm) \cdot \sin \tfrac{1}{2}\angle m'mm'' \cdot \cos \angle s'm'm''$, oder

$lm'' = 2 \cdot \text{Refraction} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\angle m \cdot \cos \angle m'$ (a),

worin m den Winkel bezeichnet, der von den Verticalen, vom Centrum des Gestirnes durch das geographische und geocentrische Zenith gehend, gebildet wird, und $\angle m'$ der Winkel ist, den die für Refraction berichtigte Distanz $s'm'$ mit einem grössten Kreisbogen durch den für Refraction verbesserten Ort des Mondes im geographischen Vertical und den Ort des Mondes im Vertical zum geocentrischen Zenith gelegt, macht, wenn man nämlich annimmt, dass die Refraction in letzterem Vertical wirkt.

Ebenso ergiebt sich aus dem kleinen Dreieck $s'ns''$

$s'n = s's'' \cdot \cos \angle ns's''$ und aus Dreieck $s'ss''$ ergiebt sich

$s's'' = 2\,(ss') \cdot \sin \tfrac{1}{2}\angle s'ss''$, mithin

$s'n = 2\,(ss') \cdot \sin \tfrac{1}{2}\angle s'ss'' \cdot \cos \angle ns's''$, oder

$s'n = 2 \cdot \text{Refraction} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\angle s \cdot \cos \angle s'$ (b.),

worin s den Winkel bezeichnet, welchen die Verticale, durch das andere Gestirn nach dem geographischen und geocentrischen Zenith gehend, einschliessen; s' aber der Winkel ist, den die für Refraction berichtigte Distanz $s'm'$ mit einem grössten Kreisbogen durch den für Refraction berichtigten Ort des Gestirnes im geographischen Vertical und dem Orte desselben im Vertical zum geocentrischen Zenith gelegt, macht, wenn man annimmt, dass die Refraction in letzterem Vertical wirkt.

Es kann nach §. 117. unter 2. dadurch, dass man die Refraction im Vertical zum geocentrischen Zenith wirken lässt, in der Höhe nur ein Fehler von 0",4 entstehen, welcher nicht zu beachten ist.

Der Fehler, welcher nach der zweiten Methode in der wahren Distanz dadurch entstehen kann, dass man die Refraction in den Verticalen zum geocentrischen Zenith wirken lässt, ist daher = der Summe oder Differenz der in der Gleichung (a.) und (b.) enthaltenen Werthe aon lm'' und $s'n$, je nachdem die Himmelskörper an verschiedenen oder vn derselben Seite des Meridians beobachtet sind.

Aus diesen Gleichungen folgt, dass der Fehler in der wahren Distanz am grössten ist, wenn die Refraction am grössten, die Winkel s' und m' entweder beide $= 180°$, oder beide $= 0$ sind, und die Winkel s und m $180°$ betragen.

Alles kann hier nicht zusammentreffen; denn die Winkel s und m können nur $180°$ werden, wenn beide Himmelskörper im Meridian zwischen beiden Zenithen sind, in welchem Falle man keine Monddistanzen zu Längenbestimmungen brauchen kann. Bei grossen Höhen beträgt überhaupt die Refraction, welche wie die Cotangente der Höhen abnimmt, so wenig, dass der Fehler dadurch stets unbedeutend bleibt, und es findet der grösst mögliche Fehler nur dann statt, wenn beide scheinbare Höhen $= 0$, weil dann die Refraction am grössten ist, der Winkel s' und m' entweder nahe $= 0$, oder nahe $180°$, und wenn ausserdem die Winkel s und m so gross als möglich sind.

Die Winkel s und m werden am grössten, wenn die Himmelskörper im ersten Vertical sind und wenn ausserdem die Breite $= 45°$ ist; aber da eine Distanz von nahe $180°$, die unter diesen Umständen stattfinden würde, sich nicht messen lässt mit dem Spiegelsextanten, so muss man für die grösst mögliche Distanz diese Fehler untersuchen.

Wenn man zu diesem Zweck die scheinbare Distanz $= 130°$, die beiden scheinbaren Höhen $= 0$ und beide Azimuthe, an verschiedenen Seiten des Meridians liegend, gleich gross annimmt, so wird $\angle s = \angle m$. Auf $45°$ Breite ist $(\varphi' - \varphi)$ bei $\frac{1}{300}$ Abplattung nach der nautischen Tafel XIX. $= -11' 29''$; die Winkel m' und s' sind nahe $180°$ oder 0, und wenn man die astronomische Refraction zu $34' 45''$ annimmt, so findet man $lm'' + ns'$, oder den grösst möglichen Fehler in der wahren Distanz $= 12'',7$. Derselbe nimmt aber mit der Höhe schnell ab, er beträgt bei $5°$ scheinbarer Höhe und unter denselben Voraussetzungen nur noch $3'',7$ und bei $10°$ Höhe nicht mehr als etwa $2''$.

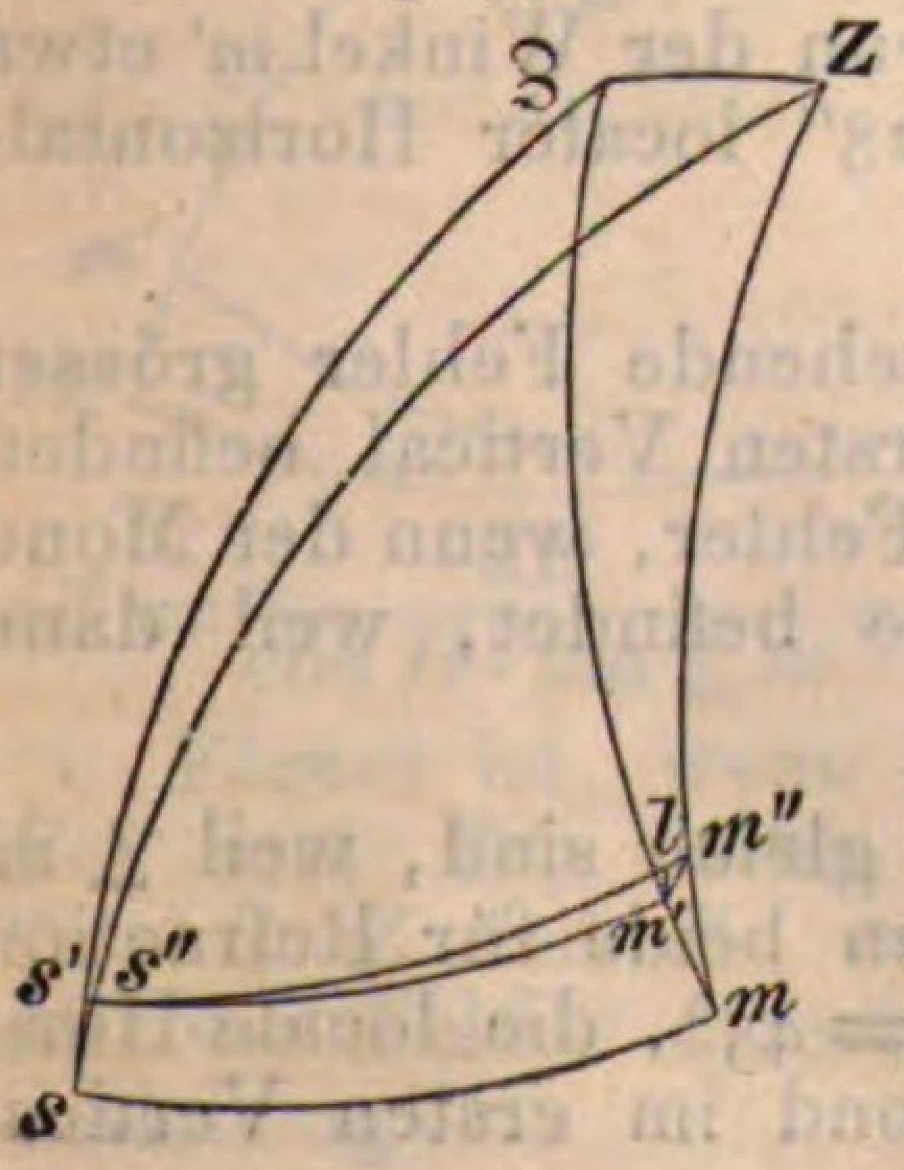
Ist die eine Höhe grösser als die andere, weicht die Breite von $45°$ ab, oder ist die scheinbare Distanz kleiner als $130°$, so werden die angegebenen Fehler natürlich kleiner.

Man kann überhaupt hieraus entnehmen, dass der Fehler, der durch diese Methode in der wahren Distanz entsteht, in den meisten Fällen unbedeutend ist, zumal man schon, der Refraction wegen, Distanzen möglichst vermeidet, wenn die Höhen unter $5°$ sind, weil die mittl. Refraction von der wahren da bedeutend abweichen kann.

§. 189.

Untersuchung des Fehlers, der nach der dritten Methode (§. 187.) in der wahren Distanz dadurch entstehen kann, dass man die Höhenparallaxe im Vertical zum geographischen Zenith wirken lässt.

Fig. 97.



Es bezeichne in Fig. 97. Z das geographische und ʒ das geocentrische Zenith, m sei der für Refraction berichtigte Ort des Mondes und s der des anderen Gestirnes. Die Höhenparallaxe des Mondes sei $= mm'$ und die des anderen Gestirnes $= ss'$, der wahre Ort des Mondes also m' und der des anderen Gestirnes s', so ist $s'm'$ die wahre Distanz.

Nimmt man nun (wie in der dritten Methode) an, dass die Parallaxe im geographischen Vertical wirkt, macht $mm'' = mm'$ und $ss'' = ss'$, zieht die grössten Kreisbögen $s''m''$ und $m'm''$, so ist $s''m''$ die nach der dritten Methode berechnete wahre Distanz.

Da die Parallaxe der Sonne und auch die der Planeten jedenfalls unbedeutend ist, so kann man ohne erheblichen Fehler die Punkte s' und s'' als zusammenfallend betrachten, und wenn man von m' auf $s'm''$ die Normale $m'l$ zieht, so kann man ohne Fehler $s''l = s'm'$ annehmen. Es ist daher $s''m'' - s'm' = lm''$, der Fehler, welcher nach der dritten Methode in der wahren Distanz dadurch gemacht wird, dass man die Parallaxe im Vertical zum geographischen Zenith wirken lässt.

Das kleine Dreieck $m'lm''$ kann man ohne Fehler als ein ebenes bei l rechtwinkliges Dreieck betrachten; es ist daher:

$lm'' = m'm'' \cdot \sin \angle lm'm''$,

und wenn man $\angle s''m'l = 90°$ annimmt, so ist

$lm'' = m'm'' \cdot \cos \angle s''m'm''$.

Da aber das Dreieck $m'm''m$ gleichschenklig ist, so ergiebt sich:

$m'm'' = 2 \cdot (mm') \cdot \sin \frac{1}{2} \angle \mathfrak{Z}mZ$, mithin ist

$lm'' = 2 \cdot (mm') \cdot \sin \frac{1}{2} \angle \mathfrak{Z}mZ \cdot \cos \angle s''m'm''$, oder

$lm'' = 2 \cdot p' \cdot \cos \mathfrak{H} \cdot \sin \frac{1}{2} \angle m \cdot \cos \angle m'$ (a.),

worin p' die locale Horizontal-Parallaxe des Mondes, $\mathfrak{H}$ die locale wahre geocentrische Höhe desselben, m den Winkel, welchen der geographische und geocentrische Verticalkreis im Mittelpunkte des für Refraction berichtigten Mondortes mit einander machen, und m' den Winkel bezeichnet, der von der wahren Distanz und einem grössten Kreisbogen durch den wahren Ort des Mondes und den Ort desselben im geographischen Vertical, wenn man die Parallaxe darin wirken lässt, gebildet wird.

Aus (a.) folgt, dass lm'' oder der Fehler in der wahren Distanz nach der dritten Methode am grössten ist, wenn der Winkel $m = 180°$, $\angle m' = 180°$ oder $= 0$ ist, und wenn der Mond sich in der Erdnähe befindet.

Es kann aber nur $\angle m = 180°$ werden, wenn der Mond im Meridian zwischen beiden Zenithen sich befindet, in welchem Falle, wenn auch das andere Gestirn im Meridian ist, $\angle m' = 0$ oder $= 180°$ wird. Wirklich findet auch unter diesen Umständen, und zwar, wenn der Mond dem geographischen Zenith nahe ist, der grösste Werth von lm'' statt und beträgt dann etwa $20''$; wenn aber beide Gestirne zugleich im Meridian sind, ist es durchaus nicht gestattet, die geographische Länge durch solche Monddistanz zu bestimmen, weil dann dieselbe nur sehr wenig verändert.

Wenn man daher, um den grössten Fehler zu ermitteln, annimmt, dass auf 28° Breite der Mond zwischen beiden Zenithen und zwar nahe am geographischen Zenith steht, und dass es noch möglich ist, kleine Distanzen zur Längenbestimmung zu benutzen, wenn der Winkel m' etwa 120° oder 60° beträgt; so ergiebt sich bei $61'\ 28''$ localer Horizontal-Parallaxe der in Rede stehende Fehler $= 10''$.

Ferner folgt aus (a.), dass der in Rede stehende Fehler grösser werden muss, wenn der Mond sich nahe am ersten Vertical befindet, weil $\angle m$ dann grösser ist. Gleich Null wird der Fehler, wenn der Mond sich im Meridian ausserhalb der beiden Zenithe befindet, weil dann $\angle m = 0$.

Grösser wird der Fehler, wenn beide Höhen gleich sind, weil $\angle m'$ dann nahe $= 180°$ oder auch $= 0$ ist. Setzt man beide für Refraction berichtigte geocentrische Höhen $= 0$, die Breite $= 45°$, die locale Horizontal-Parallaxe des Mondes $= 61'\ 24''$, den Mond im ersten Vertical

und die Abplattung der Erde $= \frac{1}{300}$, so ergiebt sich der in Rede stehende Fehler $= 12'',1$ und ist bei 5° Höhe nahe ebenso gross.

Kleiner wird der Fehler, wenn der Mond nahe am Horizonte und das andere Gestirn nahe am Zenith ist, weil dann $\angle m'$ nahe 90° und $\angle m$ klein sein muss.

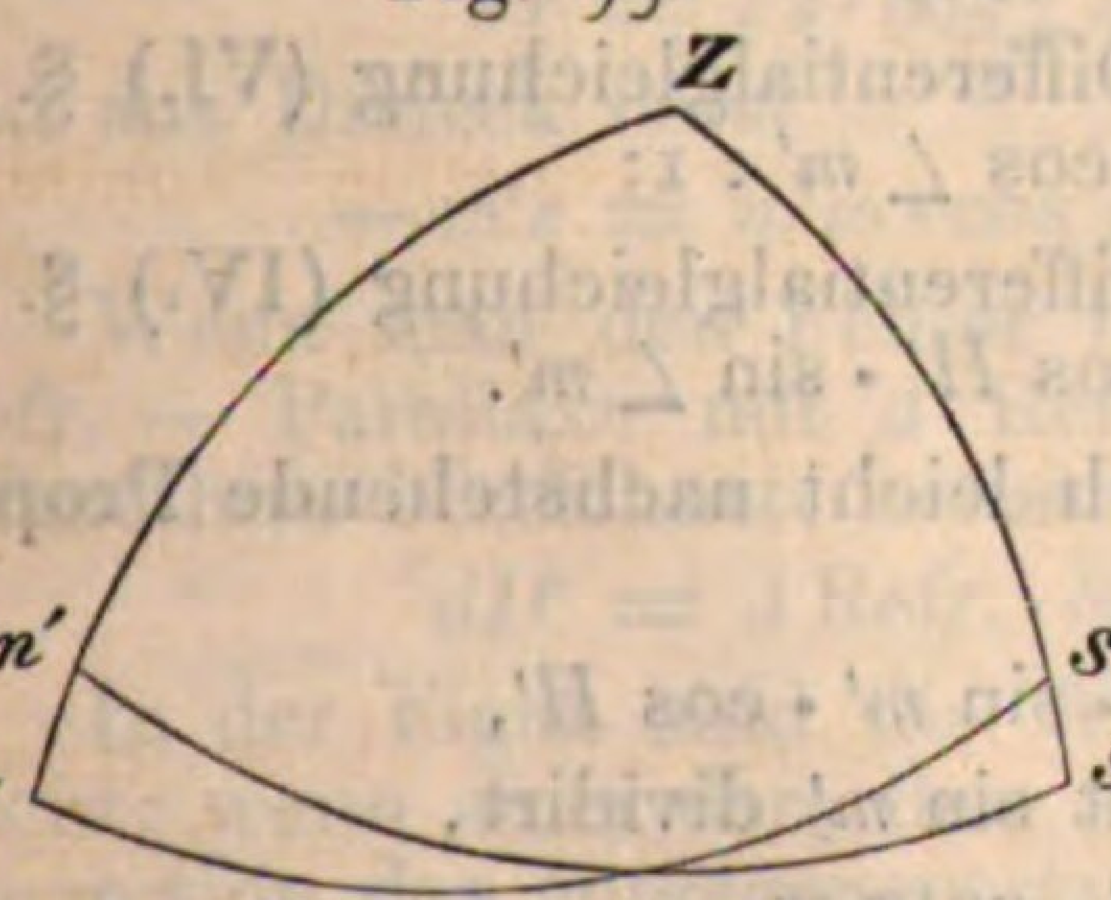
Anmerkung. Es ist im Vorstehenden nur der Fehler ermittelt, welcher dadurch entsteht, dass man die richtig berechnete Höhenparallaxe des Mondes im Vertical zum geographischen Zenith wirken lässt. Wenn man daher, wie der Leichtigkeit wegen in der Praxis zu geschehen pflegt, bei Berechnung der Höhenparallaxe die locale wahre Höhe oder die locale scheinbare Höhe = der localen wahren geocentrischen Höhe setzt, so kann hierdurch in der Höhenparallaxe ein Fehler von mehr als 12″ entstehen (§. 116.), und wenn man ausserdem noch die Aequatoreal- = der Local-Horizontalparallaxe setzt, so kann der hierdurch entstehende Fehler, mit dem zuerst gedachten zusammengenommen, nahe 14″ in der Höhenparallaxe ausmachen (§. 116.), wodurch natürlich auch ein Fehler in der wahren Distanz entsteht, dessen Grösse später untersucht werden soll.

Obgleich der Fehler auch in dieser Methode in den meisten Fällen unbedeutend ist, so ergiebt sich doch hieraus und aus der Bestimmung des Fehlers in der zweiten Methode, dass nach der dritten Methode meistens ein grösserer Fehler begangen wird, als wenn man nach der zweiten Methode rechnet, weil nach derselben der Fehler mit den wachsenden Höhen schnell abnimmt. Wenn man aber so verfährt, wie in der Anmerkung zur dritten Methode §. 187. angegeben ist, so wird die wahre Distanz und somit auch die Länge nach dieser nahe ebenso genau als nach der ersten Methode gefunden; überdies hat dieses Verfahren der Leichtigkeit wegen bei Berücksichtigung der Abplattung der Erde vor den übrigen Methoden in der Praxis den Vorzug.

§. 190.

Vom Einfluss eines Fehlers in einem der gegebenen Stücke auf die zu berechnende wahre Distanz.

Fig. 95.



I. Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der scheinbaren Distanz auf die wahre Distanz hat, sei in Fig. 95. Winkel Z und die scheinbare Distanz D veränderlich und dZ, sowie dD seien die einander entsprechenden Fehler in diesen Stücken; aber Zm und Zs, mithin die Complemente dieser Seiten H und h, oder die scheinbaren Höhen constant: so ist nach der Differential-Rechnung §. 71. (III.)

$$dZ = \frac{dD}{\cos H \cdot \sin \angle m} = \frac{dD}{\cos h \cdot \sin \angle s}.$$

Ferner ist, wenn im sphärischen Dreieck $m'Zs'$ (Fig. 95.) die Seiten Zm' und Zs', mithin H' und h', oder die wahren Höhen constant, Winkel Z und die wahre Distanz D' aber veränderlich sind, dZ und dD' die Fehler derselben bezeichnen, nach der gedachten Differential-Gleichung

$$dZ = \frac{dD'}{\cos H' \cdot \sin \angle m'} = \frac{dD'}{\cos h' \cdot \sin \angle s'},$$

folglich

$$dD' = dD \frac{\cos H' \cdot \sin \angle m'}{\cos H \cdot \sin \angle m} = dD \frac{\cos h' \cdot \sin \angle s'}{\cos h \cdot \sin \angle s},$$

woraus man sieht, dass ein Fehler in der scheinbaren Distanz nahe einen gleich grossen Fehler in der wahren Distanz verursacht.

Hieraus folgt, dass man ohne erheblichen Fehler so viele Secunden, als die scheinbare Distanz von der nächst ganzen Minute abweicht, zu derselben addiren oder von derselben subtrahiren kann, wenn man dieselbe Anzahl Secunden nur wieder auf die berechnete wahre Distanz entgegengesetzt anwendet, wodurch man der Interpolation der Secunden in der scheinbaren Distanz überhoben ist.

II. Will man untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in einer der Höhen auf die zu berechnende wahre Distanz hat, so ist zu berücksichtigen, dass, obgleich die Refraction und Höhenparallaxe von der bezüglichen Höhe abhängt, diese Grössen doch nur wenig verändern, weshalb man, da hier nur von kleinen Fehlern in den Höhen die Rede ist, die durch letztere in der Refraction und Höhenparallaxe entstehenden Fehler = 0 setzen und annehmen kann, dass die wahren Höhen ebensoviel zu gross oder zu klein sind als die scheinbaren Höhen.

Es verursacht dagegen im sphärischen Dreieck mZs (Fig. 95.) ein Fehler in einer der scheinbaren Höhen auch einen Fehler im Winkel Z, und im sphärischen Dreieck $m'Zs'$ hat wieder dieser Fehler (im $\angle Z$) einen Fehler in der wahren Distanz zur Folge und ausserdem verursacht der in einer der wahren Höhen statthabende Fehler noch einen Fehler in der wahren Distanz.

Bezeichnet man die Fehler in den scheinbaren und wahren Höhen mit dH und dH', oder dh und dh', den Fehler im Winkel Z mit dZ, den durch diesen Fehler in der wahren Distanz verursachten Fehler mit dD', und den zweiten Fehler, der durch den Fehler in einer der wahren Höhen in der wahren Distanz entsteht mit dD'', so ergiebt sich:

1. aus Dreieck mZs in Folge der Differentialgleichung (II.) §. 71. der Differential-Rechnung $dH : dZ = \cos H : \operatorname{cotg} \angle m$;

2. aus Dreieck $m'Zs'$ in Folge der Differentialgleichung (VI.) §. 71. der Differential-Rechnung $-dD'' : dH' = \cos \angle m' : 1$;

3. aus Dreieck $m'Zs'$ in Folge der Differentialgleichung (IV.) §. 71. der Differential-Rechnung $dZ : dD' = 1 : \cos H' \cdot \sin \angle m'$.

Aus diesen drei Proportionen lässt sich leicht nachstehende Proportion zusammensetzen:

$$-dD'' : dD' = \cos H \cdot \cos m' : \operatorname{cotg} m \cdot \sin m' \cdot \cos H',$$

oder, wenn man das 2te und 3te Glied mit $\sin m'$ dividirt,

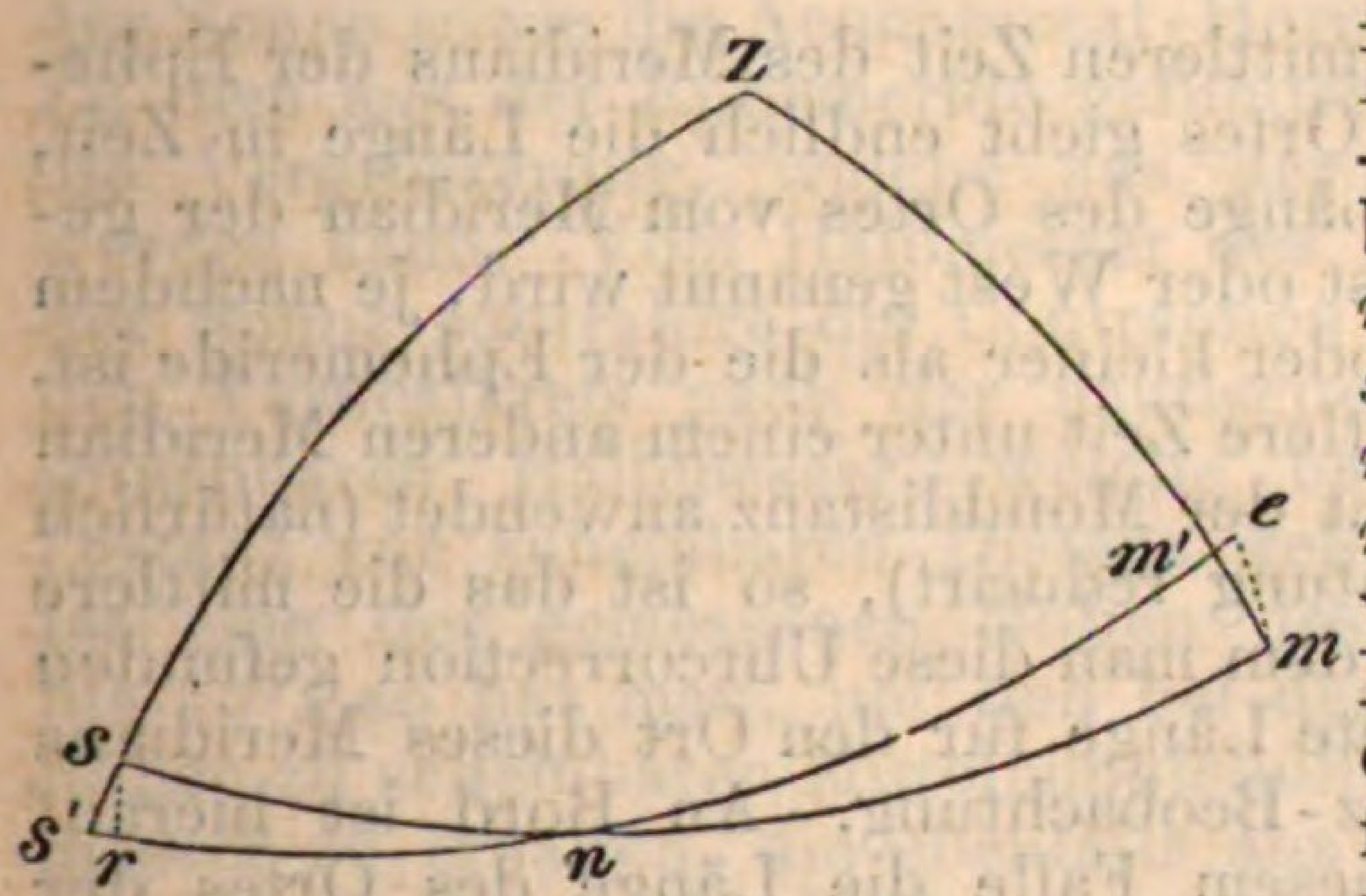
$$-dD'' : dD' = \cos H \cdot \operatorname{cotg} m' : \cos H' \cdot \operatorname{cotg} m.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, da $\cos H \cdot \operatorname{cotg} m'$ nahe $= \cos H' \cdot \operatorname{cotg} m$ ist, dass die beiden einander stets entgegengesetzten Fehler in der wahren Distanz nahe gleich gross sind und sich daher fast gegenseitig aufheben.

Hieraus folgt, dass kleine Fehler in einer oder auch in beiden Höhen fast keinen Einfluss auf die wahre Distanz haben.

Man kann daher zu den scheinbaren Höhen so viele Secunden addiren, als an der nächstfolgenden Minute fehlen, oder auch die Secunden wegwerfen, welche diese Höhen über die nächstvorhergehende Minute betragen, oder aus denselben Gründen, wenn man die Höhen berechnet, dieselben nur auf volle Minuten genau aufsuchen und entweder stets die wahren oder scheinbaren Höhen nur auf volle Minuten in Rechnung bringen, ohne dass hierdurch ein erheblicher Fehler in der wahren Distanz entstehen kann. Man muss aber nicht glauben, dass es gestattet ist, sowohl die wahren als scheinbaren Höhen nur auf volle Minuten in Rechnung zu nehmen; denn die wahren und scheinbaren Höhen müssen genau um die Refraction und Parallaxe differiren, weil ein Fehler in diesen Grössen einen bedeutenden Einfluss auf das Resultat verursachen kann, wie aus Nachstehendem erhellen wird.

Fig. 98.



III. Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der Refraction, oder Parallaxe, oder auch Refr. — Parallaxe, oder Parallaxe — Refr. auf die wahre Distanz hat, bezeichne in Fig. 98. Z das Zenith, m' den wahren Ort des Mondes und s' den des anderen Gestirnes, so ist $m's'$ die wahre Distanz. Wenn aber $m'm$ und $s's$ die Fehler bezeichnen, welche in der Parallaxe — Refr. des Mondes und in der Refr. — Parallaxe des anderen Gestirnes statthaben, so findet man durch die Rechnung die wahre Distanz $= sm$.

Man mache $ne = nm$ und $nr = ns$, so ist $sm = re$ und $s'm' = sm - m'e + s'r$, und $- m'e$ ist der Fehler, der in der wahren Distanz durch den Fehler in der Parallaxe — Refr. des Mondes, sowie $s'r$ der Fehler ist, welcher durch den Fehler in der Refr. — Parallaxe des anderen Gestirnes entsteht.

Die kleinen Dreiecke $m'em$ und $s'rs$ kann man als geradlinig, bei e und r rechtwinklig, betrachten.

Es ergiebt sich daher aus Dreieck $s'rs$

$$s'r = s's \cdot \cos \angle s'$$

und aus Dreieck $m'em$

$$- m'e = m'm \cdot \cos \angle m'.$$

Wenn man den Fehler in der wahren Distanz mit dD', den in der Refr. — Parallaxe mit d Refr. und den in der Parallaxe — Refr. mit d Parallaxe bezeichnet, so ist nach den vorstehenden Gleichungen:

$$dD' = d\,\text{Refr.} \cdot \cos s' - d\,\text{Parallaxe} \cdot \cos m'.$$

In der Figur sind die Winkel s' und m' beide spitz und man sieht leicht, wenn einer derselben stumpf wird, dass auch dann die anliegende Correction das entgegengesetzte Zeichen bekommt.

Hieraus folgt, dass, wenn sowohl Refr. — Parallaxe des anderen Gestirnes, als auch Parallaxe — Refr. des Mondes zu klein oder zu gross genommen sind, der Fehler in der wahren Distanz grösser ist, wenn die Winkel s' und m' ungleichartig, als wenn diese Winkel gleichartig sind.

Ferner ergiebt sich, dass der Fehler in der wahren Distanz am kleinsten wird, wenn $\angle s'$ und $\angle m'$ jeder $= 90°$ ist; am grössten wird dagegen der Fehler, wenn einer der Winkel $= 180°$ und der andere $= 0$,

welches stattfindet, wenn beide Gestirne in demselben Vertical beobachtet sind, in welchem Falle $dD' = \mp (d\,\text{Refr.} + d\,\text{Parallaxe})$ ist. Dies kann aber nur in der Aequatorealgegend vorkommen.

§. 191.

Aus der berechneten wahren Distanz mit Hülfe einer Ephemeride, worin die wahren Distanzen von 3 zu 3 Stunden mittlerer astronomischer Zeit angegeben sind, die jener Distanz entsprechende mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride zu finden, und aus Vergleichung dieser Zeit mit der bekannten mittleren Zeit des Ortes der Beobachtung die Länge desselben zu ermitteln, mit dieser die nach Chronometer prüfen, sowie dessen Stand bestimmen.

Was das Erstere betrifft, so wird auf die in §. 104. unter B. zu diesem Zwecke gegebene Regel verwiesen.

Der Unterschied zwischen der mittleren Zeit des Meridians der Ephemeride und der mittleren Zeit des Ortes giebt endlich die Länge in Zeit, welche in Bogen verwandelt, die Länge des Ortes vom Meridian der gebrauchten Ephemeride giebt und Ost oder West genannt wird, je nachdem die mittlere Zeit des Ortes grösser oder kleiner als die der Ephemeride ist.

Ist die Uhrcorrection gegen mittlere Zeit unter einem anderen Meridian ermittelt, welche man auf die Uhrzeit der Monddistanz anwendet (natürlich auf den Augenblick dieser Beobachtung reducirt), so ist das die mittlere Zeit bezüglich des Meridians, unter dem man diese Uhrcorrection gefunden hat, folglich gilt die damit berechnete Länge für den Ort dieses Meridians und nicht für den der Monddistanz-Beobachtung. An Bord ist hierauf wohl zu achten. Will man in diesem Falle die Länge des Ortes der Monddistanz-Beobachtung haben, so muss man auf jene Länge den Längenunterschied beider Beobachtungsorte, nach der Segelung erhalten, richtig anwenden. Hat man ein Chronometer an Bord und die Länge nach diesem vor der Monddistanz-Beobachtung gefunden, so kommt es nur darauf an, zu wissen, wie viel die Länge nach der Monddistanz-Beobachtung verschieden von der nach dem Chronometer ermittelt, sein würde. Diese Verschiedenheit beider Längen ist gleich dem Unterschiede der mittleren Greenwicher Zeit nach der Monddistanz und der nach dem Chronometer für denselben Augenblick geltend, in Bogen verwandelt. Demnach ist die Monddistanz-Beobachtung nach dem Chronometer direct oder indirect zu machen (d. h. unmittelbar nach dem Chronometer oder nach der Beobachtungsuhr zu beobachten und diese mit jenem zu vergleichen), darauf die mittlere Greenw. Zeit nach dem Chronometer zu suchen, dann die der wahren Monddistanz entsprechend, so zeigt die Differenz beider, wie viel die Monddistanz-Beobachtung die Länge grösser oder kleiner als das Chronometer geben würde. Die Monddistanz-Beobachtungen auf See, wenn ein Chronometer an Bord ist, werden nach dem Vorstehenden auch dazu benutzt, den Gang des Chronometers zu prüfen. Hat dieser sich verändert, so wird die mittlere Greenw. Zeit nach dem Chronometer mit der gleichzeitigen nach der Monddistanz nicht übereinstimmen. Wird die Differenz über 2 Zeitminuten, so ist die Länge nach der Monddistanz zuverlässiger, als die nach dem Chronometer. Ist das Chronometer stehen geblieben, weil es nicht aufgezogen worden, so wird man seinen Stand, einige Tage nach seiner Ingangsetzung, durch Monddistanz-Beobachtungen bestimmen und seinen früheren Gang annehmen können. Wiederholt man diese Standbestimmung später, so kann man sich auch überzeugen, ob der Gang des Chronometers ein anderer geworden ist, somit den neuen Gang ermitteln. Ein guter Beobachter

und Rechner an Bord wird auf diesem Wege zu einem Gange und Stande des Chronometers gelangen, wodurch die mittlere Greenw. Zeit ebenso zuverlässig als nach Monddistanzen erhalten wird, daher später die Länge nach diesem Chronometer bestimmt, wenn nämlich Monddistanzen nicht zu messen sind, eine solche ist, die auf See Werth hat. Auf langen Reisen, nur mit einem Chronometer an Bord, sollte man nie unterlassen, durch Monddistanz-Beobachtungen den Gang des Chronometers zu prüfen.

§. 192.

Regel. Die wahre Distanz und die Länge nach der in §. 187. beschriebenen ersten Methode zu berechnen.

1. Finde zur Zeit der Beobachtung den Halbmesser des Mondes, und wenn die Distanz zwischen Mond und Sonne gemessen ist, auch den der Sonne sowie die Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes (§. 103.). Zu dem aus der Ephemeride gefundenen Halbmesser des Mondes addire die Vergrösserung, welche aus der nautischen Tafel XII. entnommen werden kann. Vom Halbmesser des Mondes wie auch vom Halbmesser der Sonne subtrahire die Contraction für die Neigungen derselben gegen den Verticalkreis nach der nautischen Tafel XVIII., so erhält man die scheinbaren Halbmesser, welche bei der Reduction der gemessenen Distanz zur scheinbaren Distanz gehörig auf erstere anzuwenden sind. Ist eine der gemessenen Höhen des Mondes oder der Sonne unter 5 bis 10°, so hat man, um den bei der Reduction der gemessenen Randhöhen zu scheinbaren Mittelpunktshöhen auf erstere anzuwendenden Halbmesser zu erhalten, die ebenfalls aus Tafel XVIII. zu entnehmende Contraction des verticalen Halbmessers von dem vergrösserten Mondhalbmesser oder von dem Sonnenhalbmesser zu subtrahiren.

Von der Mond-Aequatoreal-Horizontalparallaxe wird die Correction für Abplattung der Erde, welche aus der nautischen Tafel XX. zu entnehmen ist, subtrahirt, so erhält man die Local-Horizontalparallaxe.

2. Auf die abgelesene Distanz wird die Indexcorrection des Instrumentes angewandt, so erhält man die gemessene Distanz. Ist die Distanz zwischen Mond und Sonne beobachtet, so werden die beiden geneigten scheinbaren Halbmesser derselben (diese zu diesem Zweck nach 1. reducirt) addirt, und die Summe ist die scheinbare Distanz, welche mit D bezeichnet wird. Ist die Distanz aber zwischen dem Monde und einem Fixstern oder dem Mittelpunkte eines Planeten beobachtet, so wird der geneigte scheinbare Halbmesser des Mondes zur gemessenen Distanz addirt, oder davon subtrahirt, je nachdem der volle Rand des Mondes dem anderen Gestirne zugekehrt, oder von demselben abgekehrt ist.

3. Aus den abgelesenen Höhen der beiden beobachteten Himmelskörper finde man, nachdem dieselben zuvor auf das Mittel der Uhrzeiten, welche zu den beobachteten Distanzen gehören, reducirt sind (§. 129.): a, die localen scheinbaren Mittelpunktshöhen, und bezeichne die des Mondes mit H und die des anderen Gestirnes mit h; b, die localen wahren Mittelpunktshöhen und bezeichne die des Mondes mit H' und die des anderen Gestirnes mit h'; c, die localen wahren geocentrischen Mittelpunktshöhen und bezeichne die des Mondes und des anderen Gestirnes mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}$; d, die wahren geocentrischen Mittelpunktshöhen des Mondes und anderen Gestirnes und bezeichne dieselben mit $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{h}'$ (§. 125.).

4. Sind die Höhen nicht gemessen, so werden die wahren Mittelpunktshöhen mit der geographischen Breite nach der §. 186. unter B. gegebenen Regel berechnet, aus diesen findet man die localen scheinbaren Mittelpunktshöhen (§. 126.), und aus letzteren werden wieder die localen wahren Mittelpunktshöhen, die localen wahren geocentrischen und die geocentrischen wahren Mittelpunktshöhen gefunden (§. 125.) und wie unter 3. bemerkt ist, bezeichnet.

5. Die wahre Distanz wird nach den unter A., B., C., D. oder E. gegebenen Formeln berechnet.*)

In Bezug auf die gegebenen Formeln (A.) ist zu bemerken, dass der natural cosinus der scheinbaren Distanz D, wie auch der für Refraction berichtigten Distanz D' und der wahren Distanz D'' negativ ist, wenn die Distanzen 90° übersteigen, und daher zum natural cosinus $(H - h)$ oder $(\mathfrak{H} - \mathfrak{h})$ addirt werden muss, um die algebraische Differenz der Cosinusse zu erhalten. Die für Refraction berichtigte Distanz D' oder die wahre Distanz D'' ist grösser als 90°, wenn der natural cosinus derselben negativ ist, welches stattfindet, wenn die Zahl, welche vom natural cosinus $(H' - h')$ oder natural cosinus $(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}')$ subtrahirt werden muss, grösser als der Minuend ist.

6. Aus der berechneten wahren Distanz finde dann die zur Zeit derselben stattgehabte mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride (§. 104.).

7. Der Unterschied zwischen der mittleren Zeit des Meridians der Ephemeride und der mittleren Schiffszeit der Beobachtung ist die Länge in Zeit, welche, in Bogen verwandelt, die Länge vom Meridian der Ephemeride giebt, die östlich oder westlich genannt wird, je nachdem die mittlere Schiffszeit grösser oder kleiner als die mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride ist.

§. 193.

Regel. Die wahre Distanz nach der in §. 187. beschriebenen zweiten Methode zu finden und die Länge zu bestimmen.

1. Finde den scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne, wenn die Distanz von dieser beobachtet wurde, auch die Local-Horizontalparallaxe des Mondes nach der in §. 192. unter 1. gegebenen Regel.

2. Finde die scheinbare Distanz nach der in §. 192. unter 2. angegebenen Regel und bezeichne dieselbe mit D.

3. Aus den abgelesenen Ober- oder Unterrands- oder auch Mittelpunktshöhen finde, nachdem dieselben zuvor auf das Mittel der Uhr-

*) In Tafel XLV. ist die sogenannte logarithmische Differenz des Cosinus der für Refraction corrigirten und des Cosinus der scheinbaren Höhen enthalten, wovon man auch in dieser Methode Gebrauch machen kann. Es ist nämlich die logarithmische Differenz für H + der logarithmischen Differenz für $h = \log \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}$, und kann daher statt dieses Ausdruckes angewandt werden, wenn man die für Refraction berichtigte Distanz D' berechnet. Bei Berechnung der wahren Distanz D'' aber ist $\log \cos \mathfrak{H}' + \log \sec \mathfrak{H}'$ + arithmetischem Complemente der logarithmischen Differenz für $\mathfrak{h} = \log \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}}$, und kann statt dieses Ausdruckes gebraucht werden. Das Complement der logarithmischen Differenz von $\mathfrak{h}$ wird nämlich mittelst der nautischen Tafel XLV. gefunden, wenn man die gegen $\mathfrak{h}$ stehende Differenz für 1″ mit der Anzahl Secunden, welche = der Höhenparallaxe des Gestirnes, multiplicirt und das Product von 10,000000 subtrahirt.

zeiten, welche zu den beobachteten Distanzen gehören, reducirt sind (§. 129.), die localen scheinbaren geocentrischen Mittelpunktshöhen, bezeichne die des Mondes mit $\mathfrak{H}$ und die des anderen Gestirnes mit $\mathfrak{h}$: ermittele ferner die geocentrischen wahren Mittelpunktshöhen (§. 124.) und bezeichne die des Mondes mit $\mathfrak{H}'$, die des anderen Gestirnes mit $\mathfrak{h}'$.

4. Sind die Höhen nicht gemessen, so werden die wahren Mittelpunktshöhen für die geocentrische Breite nach der in §. 186. unter B. gegebenen Regel berechnet, aus diesen die localen scheinbaren geocentrischen und wahren geocentrischen Mittelpunktshöhen gefunden (§. 127.), und wie in 3. bemerkt, bezeichnet.

5. Die wahre Distanz wird nach einer der in §. 187. enthaltenen Formeln (I.), (II.), (III.), (IV.) oder (V.) berechnet.*)

Bei der unter (I.) gegebenen Formel ist zu bemerken, dass der natural cosinus der scheinbaren Distanz D und der natural cosinus der wahren Distanz D' negativ ist, wenn die Distanz 90° übersteigt. Es muss daher bei einer stumpfen scheinbaren Distanz der natural cosinus derselben zum natural cosinus ($\mathfrak{H} - \mathfrak{h}$) addirt werden, um die algebraische Differenz der natural cosinusse zu erhalten. Wenn die vom natural cosinus ($\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}'$) zu subtrahirende Zahl grösser als jener, so ist der Rest (natural cosinus der wahren Distanz) negativ und die wahre Distanz grösser als 90°.

6. Aus der berechneten wahren Distanz finde die zur Zeit derselben stattgehabte mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride (§. 104.).

7. Der Unterschied zwischen der mittleren Zeit des Meridians der Ephemeride und der mittleren Schiffszeit der Beobachtung ist die Länge in Zeit, welche, in Bogen verwandelt, die Länge des Schiffes vom Meridian der Ephemeride giebt, die östlich oder westlich benannt wird, je nachdem die mittlere Schiffszeit grösser oder kleiner als die mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride ist.

§. 194.

Regel. Die wahre Distanz nach der dritten Methode zu finden und die Länge zu bestimmen.

1. Finde den scheinbaren Halbmesser des Mondes und wenn die Distanz zwischen Mond und Sonne beobachtet ist, auch den der Sonne; ermittele ferner die locale Horizontalparallaxe des Mondes und die scheinbare Distanz nach der in §. 192. unter 1. und 2. gegebenen Regel und bezeichne die scheinbare Distanz mit D.

2. Aus den abgelesenen Höhen der beiden beobachteten Himmelskörper finde, nachdem dieselben zuvor auf das Mittel der Uhrzeiten, welche zu den beobachteten Distanzen gehören, reducirt sind (§. 129.), die scheinbaren und wahren Mittelpunktshöhen (§. 123.). Die scheinbare Mittelpunktshöhe des Mondes bezeichne mit H, die wahre Höhe mit H', die scheinbare Höhe des anderen Gestirnes aber mit h und die wahre Höhe mit h'.

*) Es kommt in jeder dieser Formeln die Grösse $\frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}}$ vor, und kann man statt derselben $\log \cos \mathfrak{H}' + \log \sec \mathfrak{H} +$ der logarithmischen Differenz für die locale scheinbare Höhe des anderen Gestirnes anwenden (nautische Tafel XLV.).

3. Sind die Höhen nicht gemessen, so werden die wahren Mittelpunktshöhen mit der geographischen Breite nach der in §. 186. unter A. gegebenen Regel berechnet, aus diesen die scheinbaren Mittelpunktshöhen (H und h auf ganze Minuten) gefunden (§. 126.), und aus diesen wieder die wahren Mittelpunktshöhen H' und h' auf Secunden.

4. Berechne die wahre Distanz nach einer der in §. 187. enthaltenen Formeln (VI.), (VII.), (VIII.), (IX.) oder (X.).*)

Bei der unter (VI.) gegebenen Formel ist zu bemerken, dass der natural cosinus der scheinbaren Distanz und der natural cosinus der wahren Distanz negativ ist, wenn die scheinbare Distanz 90° übersteigt. Es muss daher bei einer stumpfen scheinbaren Distanz der natural cosinus derselben zum natural cosinus $(H - h)$ addirt werden, um die algebraische Differenz dieser natural cosinusse zu erhalten. Wenn ferner die vom natural cosinus $(H' - h')$ zu subtrahirende Zahl grösser als ersterer ist, so wird der Rest, welcher der natural cosinus der wahren Distanz ist, negativ, somit die wahre Distanz grösser als 90°.

5. Aus der berechneten wahren Distanz finde die zur Zeit derselben stattgehabte mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride (§. 104.).

6. Der Unterschied zwischen der mittleren Zeit des Meridians der Ephemeride und der mittleren Schiffszeit der Beobachtung ist die Länge in Zeit, welche in Bogen verwandelt, die Länge des Schiffes vom Meridian der Ephemeride giebt, die östlich oder westlich benannt wird, je nachdem die mittlere Schiffszeit grösser oder kleiner als die mittlere Zeit des Meridians der Ephemeride ist.

Beispiel 1. 1853 den 5. Januar in Pillau (54° 38' NBr. und 19° 54' OL. von Greenwich) ist nachstehende Beobachtung gemacht worden; man soll die wahre Distanz nach jeder der drei gegebenen Methoden berechnen und die Länge bestimmen. Barometer 29",89 Engl., Thermometer + 0°,6 Reaum., Uhrcorrection = + 2' 1",5 gegen mittlere Zeit in Pillau, ⌽ N. 156° Ost, ₵ N. 149° West, Missw. 11° West.

Winkel des Verticals durch den ☾ mit der scheinb. Distanz = 96°,5.
» » » » die ☉ » » » » = 70°,5.

		I. C. — 2'		
	9^h 28' 43"	☾̲ 37° 30'	I. C. — 5'	
	29 30		☉̲ 11° 48'	I. C. + 0' 20"
	30 52			☉☾ 57° 16 0
Uhrzeit = 9^h 31' 58",8	31 29			15 20
Uhrcorrect. = + 2' 1",5	31 48			15 5
mittl. P. Zt. = 9^h 34' 0",3	32 8			14 55
Morgens d. 5. Januar.	32 33			14 45
	33 3			14 30
	33 58		☉̲ 12° 30'	
	34 50	☾̲ 36° 42'		

			57° 15' 6"
Mittl. Zeit in Pillau . . . =	9^h 34' Mrg.	I. C. =	+ 0' 20"
OL. in Zeit =	— 1^h 20'		57° 15' 26"
ungef. mittl. Greenw. Zt. =	8^h 14' Mrg.,	☾ Halbm. =	+ 16' 25"
oder 3^h 46' v. d. mittl. Grw. Mittage d. 5. Jan.		☉ Halbm. =	+ 16' 16"
		D =	57° 48' 7".

*) Es kommt in jeder dieser Formeln der Ausdruck $\frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}$ als Multiplicator vor, und man kann statt desselben log cos H' + log sec H + der logarithmischen Differenz (nautische Tafel XLV.) für die scheinbare Höhe des anderen Gestirnes anwenden.

☾ Halbm. den 4. (Mitternacht) 16′ 18″,2
» » 5. (Mittag) 16′ 20″,2

12ʰ : 3ʰ 46′ = 2″,0 : x

3ʰ | 4 0″,5
30′ | 6 0″,1
15′ | 2 0″,6

16′ 19″,6

Vergr. = + 5″,0
Contr. d. geneigt. Halbm. = 0″,0
» » vertic. » = — 2″,5

☾ scheinb. Berühr.-Halbm. = 16′ 24″,6
☾ scheinb. Vertic.-Halbm. = 16′ 22″.

⊙ Halbmesser = 16′ 18″,2
Contr. d. geneigt. Halbm. . = — 2″,0
» » vertic. » . = — 18″.0

⊙ scheinb. Berühr.-Halbm. = 16′ 16″
⊙ scheinb. Vertic.-Halbm. = 16′ 0″.

☾ Horiz.-Paral. d. 4. (Mittern.) 59′ 42″.8
» » 5. (Mittag) 59′ 50″.3

12ʰ : 3ʰ 46′ = 7″,5 : x

3ʰ | 4 1″,9
30′ | 6 0″,3
15′ | 2 0″,2

2″,4

59′ 47″,9

Corr. für Abpl. = — 8″,0
☾ loc. Horiz.-Parall. = 59′ 40″.

(☾)
6′ 7″ : 2′ 51″ = 0° 48′ : x
plg 0° 48′ = 0,5740
plg 2′ 51″ = 1,8004

2,3744
plg 6′ 7″ = 1,4688

plg x = 0,9056
x = 22′ 22″

☾ = 36° 42′

37° 4′ 22″
I. C. = — 2′

37° 2′ 22″

☾ scheinb. H. = 18° 31′ 11″
☾ Halbm. . . . = + 16′ 22″

☾ loc. schb. H. = 18° 48′ = H { mittl. Refr. = 2′ 47″ ; C.f.Barom. = + 2″ ; » » Therm. = + 6″ }
Refr. = — 2′ 55″

☾ loc. w. Höhe = 18° 45′ 5″ = H' ☾ N. 149° West,
Missweis 11° W.

wah. Az. = N. 160° W. log cos = 9,9730n
φ′ — φ = — 10′,87 log = 1,0362n

+ 10′ 13″ + 10′,21 log = 1,0092

☾ loc.w.geo.H. = 18° 55′ = $\mathfrak{H}$ davon log sec = 0,0241
☾ lc. Hor.-P. = 59′ 40″ plg = 0,4795

+ 56′ 27″ ☾ Höhenpr. = 56′ 27″ plg = 0,5036

☾ w. geoc. H. = 19° 51′ 27″ = $\mathfrak{H}'$.

(☉)

$4' 28'' : 1' 59'' = 0^\circ 42' : x$

plg $0^\circ 42' = 0{,}6320$

plg $1' 59'' = 1{,}9579$

$2{,}5899$

plg $4' 28'' = 1{,}6053$

plg $x = 0{,}9846$

$x = 18' 39''$

☉ = $12^\circ 30'$

$12^\circ 11' 21''$

Index-Corr. . . = $-\ 5'$

$12^\circ 6' 21''$

$6^\circ 3' 10''$

☉ Halbm. = $+\ 16'\ 0''$

☉ loc. schb. H. . = $6^\circ 19' = h$

Refr. = $-\ 8' 23''$ { mittl. Refr. = $8'\ 0''$; C. f. Barom. = $+\ 5''$; » » Therm. = $+\ 18''$ }

☉ loc. w. Höhe = $6^\circ 10' 37'' = h'$ ⦶ N. 156° Ost.

Missweis. 11° W.

wah. Az. = N. 145° O. lg cos = $9{,}7586n$

$\varphi' - \varphi = -\ 10',87$ lg = $1{,}0362n$

$+\ 6' 14''$ + $6',23$ lg = $0{,}7948$

☉ lc. w. geo. H. = $6^\circ 17' = \mathfrak{h}$

Höhenparall. = $+\ 9''$

☉ w. geoc. H. = $6^\circ 17'\ 9'' = \mathfrak{h}'$.

Berechnung der wahren Distanz nach der ersten Methode und den Formeln (A. I.) und (A. II.).

$$\cos D' = \cos(H' - h') - [\cos(H - h) - \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h} \quad . . \text{(A. I.)}.$$

$h = 6^\circ 19'$	$h' = 6^\circ 10' 37''$
$H = 18^\circ 48'$	$H' = 18^\circ 45'\ 5''$
$H - h = 12^\circ 29'$	$H' - h' = 12^\circ 34' 28''$

$H - h = 12^\circ 29'$ n. cos = 976359

$D = 57^\circ 48' (7'')$ n. cos = 532876

443483 log = 5,646877

$H = 18^\circ 48'$ log Diff. . = 0,000126

$h = 6^\circ 19'$ log Diff. . = 0,000116

Zahl = 443731 log = 5,647119

$H' - h' = 12^\circ 34' 28''$ n. cos = 976015

$57^\circ 50' 24''$ n. cos = 532284

$7''$

$D' = 57^\circ 50' 31''$ = der für Refr. bericht. Distanz.

$$\cos D'' = \cos(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}') - [\cos(\mathfrak{H} - \mathfrak{h}) - \cos D'] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}} \quad . . \text{(A. II.)}.$$

$\mathfrak{h} = 6^\circ 17'$	$\mathfrak{h}' = 6^\circ 17'\ 9''$
$\mathfrak{H} = 18^\circ 55'$	$\mathfrak{H}' = 19^\circ 51' 27''$
$\mathfrak{H} - \mathfrak{h} = 12^\circ 38'$	$\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}' = 13^\circ 34' 18''$

$$\mathfrak{H}-\mathfrak{h} = 12^\circ\ 38' \qquad \text{n. cos} = 975790$$
$$D' = 57^\circ\ 50'\ (31'') \ \text{n. cos} = \underline{532384}$$
$$443406 \ \log \ldots = 5{,}646802$$
$$\mathfrak{H}' = 19^\circ\ 51'\ 27'' \ \ldots\ldots\ldots \log\cos = 9{,}973377$$
$$\mathfrak{H} = 18^\circ\ 55' \ \ldots\ldots\ldots \log\sec = 0{,}024113$$
$$\mathfrak{h} = 6^\circ\ 17' \ \ldots\ldots\ldots c\log\text{Diff.} = \underline{9{,}999998}$$
$$\text{Zahl} = 440849 \ \log \ldots = 5{,}644290$$
$$\mathfrak{H}'-\mathfrak{h}' = 13^\circ\ 34'\ 18'' \ \text{n. cos} = \underline{972078}$$
$$\text{n. cos}\, D'' = 531229$$
$$D'' = 57^\circ\ 54'\ 41'' + 31'' = 57^\circ\ 55'\ 12''.$$

Berechnung der wahren Distanz nach derselben Methode, aber nach den Formeln (E. I.) und (E. II.).

$$\sin b = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(H'+h')} \cdot \sqrt{\cos S \cdot \cos(S-D) \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}D' = \cos\tfrac{1}{2}(H'+h') \cdot \cos b \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E. I.)}.$$

$$D = 57^\circ\ 48'\ (7'')$$
$$h = 6^\circ\ 19' \quad \log\sec \ldots = 0{,}002645$$
$$H = \underline{18^\circ\ 48'} \quad \log\sec \ldots = 0{,}023811$$
$$82^\circ\ 55'$$
$$S = 41^\circ\ 27',5 \quad \log\cos \ldots = 9{,}874735 - 10$$
$$S-D = 16^\circ\ 20',5 \quad \log\cos \ldots = 9{,}982091 - 10$$
$$H' = 18^\circ\ 45'\ 5'' \ \log\cos \ldots = 9{,}976314 - 10$$
$$h' = 6^\circ\ 10'\ 37'' \ \log\cos \ldots = \underline{9{,}997471 - 10}$$
$$39{,}857067 - 40$$
$$19{,}928534 - 20$$
$$\tfrac{1}{2}(H'+h') = 12^\circ\ 27'\ 51'' \ \log\cos \ldots = \underline{9{,}989641 - 10}$$
$$\log\sin b \ldots = 9{,}938893 - 10$$
$$b = 60^\circ\ 18'\ 47''$$
$$\log\cos b \ldots = 9{,}694834 - 10$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}(H'+h') = \underline{9{,}989641 - 10}$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}D' \ldots = 9{,}684475 - 10$$
$$\tfrac{1}{2}D' = 28^\circ\ 55'\ 12''$$
$$D' = 57^\circ\ 50'\ 24'' + 7''$$
$$D' = 57^\circ\ 50'\ 31''.$$

$$\sin b' = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{H}'+\mathfrak{h}')} \cdot \sqrt{\cos S' \cdot \cos(S'-D') \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos \mathfrak{H} \cdot \cos \mathfrak{h}}},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}D'' = \cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}'+\mathfrak{h}') \cdot \cos b' \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E. II.)}.$$

$$D' = 57^\circ\ 50'\ (31'')$$
$$\mathfrak{H} = 18^\circ\ 55' \quad \log\sec \ldots = 0{,}024113$$
$$\mathfrak{h} = \underline{6^\circ\ 17'} \quad \log\sec \ldots = 0{,}002617$$
$$83^\circ\ 2'$$
$$S' = 41^\circ\ 31' \quad \log\cos \ldots = 9{,}874344 - 10$$
$$S'-D' = 16^\circ\ 19' \quad \log\cos \ldots = 9{,}982146 - 10$$
$$\mathfrak{H}' = 19^\circ\ 51'\ 27'' \ \log\cos \ldots = 9{,}973377 - 10$$
$$\mathfrak{h}' = 6^\circ\ 17'\ 9'' \ \log\cos \ldots = \underline{9{,}997381 - 10}$$
$$39{,}853978 - 40$$
$$19{,}926989 - 20$$
$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}'+\mathfrak{h}') = 13^\circ\ 4'\ 18'' \ \log\cos \ldots = \underline{9{,}988598 - 10}$$
$$\log\sin b' \ldots = 9{,}938391 - 10$$
$$b' = 60^\circ\ 11'\ 51''$$

$\log\cos b' \,.\,.\, = 9{,}696366 - 10$
$\log\cos \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}' + \mathfrak{h}') = 9{,}988598 - 10$
$\log\sin \tfrac{1}{2} D'' = 9{,}684964 - 10$
$\tfrac{1}{2} D'' = 28^\circ\, 57'\, 20'',5$
$D'' = 57^\circ\, 54'\, 41''$
$+ 31''$
$D'' = 57^\circ\, 55'\, 12''.$

N. A. 18^h d. 4 Jan. $D = 59^\circ\; 9'\, 41''$ plg 2530 Diff. — 5
$1^\circ\, 14'\, 29''$ plg 3832

Zeitintervall $= 2^h\, 13'\, 22'',5$ plg 1302
Corr. für II. Diff. . . . $= \;+\; 1'',5$
mittl. astr. Greenw. Zt. $= 20^h\, 13'\, 24''$ den 4. Januar,
» » Pillauer Zt. $= 21^h\, 34'\; 0'',3$ den 4. Januar,
Länge in Zeit $= 1^h\, 20'\, 36'',3$
Länge $= 20^\circ\; 9',1$ Ost von Greenwich.

Berechnung der wahren Distanz nach der zweiten Methode und nach Formel (II.).*)

$$\cos D' = \cos(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}') - 2\sin\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} - \mathfrak{h} + D)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(D - \mathfrak{H} + \mathfrak{h})\cdot\frac{\cos\mathfrak{H}'\cdot\cos\mathfrak{h}'}{\cos\mathfrak{H}\cdot\cos\mathfrak{h}}.$$

⊙ loc. schb. Höhe $= 6^\circ\, 19'$	☾ loc. schb. Höhe $= 18^\circ\, 48'$
Corr. für Abpl. $= +\; 6'$	Corr. für Abpl $= +\; 10'$
⊙ l. schb. geoc. H. $= 6^\circ\, 25' = \mathfrak{h}$	☾ l. schb. geoc. H. $= 18^\circ\, 58' = \mathfrak{H}$
Refr. — Parall. $= -\; 8'\, 14''$	Parall. — Refr. $= +\; 53'\, 32''$
⊙ w. geoc. Höhe $= 6^\circ\, 16'\, 46'' = \mathfrak{h}'$.	☾ w. geoc. Höhe $= 19^\circ\, 51'\, 32'' = \mathfrak{H}'$.

$D = 57^\circ\, 48'\, (7'')$
$\mathfrak{H} = 18^\circ\, 58'$ log sec $= 0{,}024243$
$\mathfrak{h} = 6^\circ\, 25'$ log sec $= 0{,}002729$
$83^\circ\, 11'$
$S = 41^\circ\, 35',5$ log 2 $= 0{,}301030$
$\tfrac{1}{2}(D - \mathfrak{H} + \mathfrak{h}) = 22^\circ\, 37',5$ log sin $= 9{,}585120 - 10$
$\tfrac{1}{2}(D + \mathfrak{H} - \mathfrak{h}) = 35^\circ\, 10',5$ log sin $= 9{,}760480 - 10$
$\mathfrak{H}' = 19^\circ\, 51'\, 32''$ log cos $= 9{,}973373 - 10$
$\mathfrak{h}' = 6^\circ\, 16'\, 46''$ log cos $= 9{,}997386 - 10$
Zahl $= 0{,}440921$ log $= 9{,}644361 - 10$
$\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}' = 13^\circ\, 34'\, 47''$ n. cos $= 0{,}972045$
n. cos $D' = 531124$
$D' = 57^\circ\, 55'\; 7''$
$+\; 7''$
$D' = 57^\circ\, 55'\, 14''.$

Berechnung der wahren Distanz nach der dritten Methode und nach Formel (VI.).

$$\cos D' = \cos(H' - h') - [\cos(H - h) - \cos D]\cdot\frac{\cos H'\cdot\cos h'}{\cos H\cdot\cos h}.$$

*) Bei Formel (II.) und (VI.) ist zu bemerken, dass die wahre Distanz stumpf wird, wenn $\cos(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}')$ und $\cos(H' - h')$ kleiner als die Zahl, welche davon subtrahirt werden muss. In Formel (VI.) ist $\cos D$ negativ, wenn D stumpf ist.

⊖ loc. schb. Höhe	$= 6^\circ\,19'$ $= h$	☾ loc. schb. Höhe	$= 18^\circ\,48'$ $= H$
Refr. — Parall.	$= -\;8'\,14''$	Parall. — Refr.	$= +\;53'\,32''$
⊖ wahre Höhe . .	$= 6^\circ\,10'\,46'' = h'$.	☾ wahre Höhe . .	$= 19^\circ\,41'\,32'' = H'$.

$h = 6^\circ\,19'$	log Differenz		$= 0{,}000114$
$H = 18^\circ\,48'$	log sec		$= 0{,}023811$
$H - h = 12^\circ\,29'$	n. cos	$= 976359$	
$D = 57^\circ\,48'\,(7'')$	n. cos	$= 532876$	
$h' = 6^\circ\,10'\,46''$		443483	log $= 5{,}646877$
$H' = 19^\circ\,41'\,32''$	log cos		$= 9{,}973828$
	Zahl	$= 441194$	log $= 5{,}644630$
$H' - h' = 13^\circ\,30'\,46''$	n. cos	$= 972318$	
$57^\circ\,55'\,7''$	n. cos	$= 531124$	
$+\;7''$			
$D' = 57^\circ\,55'\,14''$.			

Nach derselben Methode, aber nach Formel (IX.)*), ist nachstehende Rechnung zu machen, um die wahre Distanz zu finden.

$$\cos D' = 2\cos\tfrac{1}{2}(H+h+D)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(H+h-D)\cdot\frac{\cos H'\cdot\cos h'}{\cos H\cdot\cos h} - \cos(H'+h').$$

$D = 57^\circ\,48'\,(7'')$	log 2 + 6 Index	$= 6{,}301030$
$h = 6^\circ\,19'$	log Differenz	$= 0{,}000114$
$H = 18^\circ\,48'$	log sec	$= 0{,}023811$
$82^\circ\,55'$		
$\frac{1}{2}(H+h+D) = 41^\circ\,27',5$	log cos	$= 9{,}874736 - 10$
$\frac{1}{2}(H+h-D) = 16^\circ\,20',5$	log cos	$= 9{,}982090 - 10$
$H' = 19^\circ\,41'\,32''$	log cos	$= 9{,}973828 - 10$
$h' = 6^\circ\,10'\,46''$	Zahl $= 1430900$	log $= 6{,}155609$
$H' + h' = 25^\circ\,52'\,18''$	n. cos	$= 899774$
	n. cos $D' =$	531126
	$D' =$	$57^\circ\,55'\,6''$
		$+\;7''$
	$D' =$	$57^\circ\,55'\,13''$.

Beispiel 2. 1852 den 26. Januar Abends nach dem Besteck auf 1° 50′ SBr. und 18° 55′ WL. von Greenw. ist nachstehende Beobachtung gemacht; man soll die Länge des Schiffes bestimmen.

U. C. gegen mittl. Zeit $= +\;36'\,55'',1$; I. C. $= 0'\,0''$; ♂ S. 101° Ost; ☾ S. 103°,5 West; Winkel des Verticals durch den Mond mit der scheinbaren Dist. = 110°.

Im Mittel	$= 6^h\,44'\,59''$	♂ ☽	$= 116^\circ\,12'\,52''$
U. C. geg. mittl. Zeit	$= +\;36'\,55'',1$	☾ r	$= -\;14'\,55''$
mittl. Schiffszeit	$= 7^h\,21'\,54'',1$.	D	$= 115^\circ\,57'\,57''$.

*) Bei Formel (IX.) ist zu bemerken, dass cos $(H' + h')$ negativ ist, wenn $(H' + h') > 90^\circ$. Die wahre Distanz ist spitz, wenn die Zahl, wovon cos $(H' + h')$ zu subtrahiren ist, grösser als cos $(H' + h')$, d. h. wenn der Rest positiv ist; dagegen stumpf, wenn dieser Rest negativ wird.

Ungef. mittl. Beob. Zeit = $7^h\ 22'$ Abends,
WL. in Zeit = $+1^h\ 16'$

ungef. mittl. Greenw. Zeit = $8^h\ 38'$ Abends d. 26. Jan.
m. ⊙ AR. = $20^h\ 21'\ 11'',4$.
☾ AR. = $0^h\ 37'\ 32'',7$.
☾ Decl. = $1^\circ\ 35'\ 27''$ Süd.
☾ loc. Horiz.-Parall. . . = $54'\ 7'',5$.
☾ scheinb. Halb. = $14'\ 55''$.
♂ AR. = $8^h\ 26'\ 28''$.
♂ Decl. = $23^\circ\ 48'\ 49''$ Nord.
♂ Horiz.-Parall. = $13''$.

Mittl. Zeit = $7^h\ 21'\ 54'',1$
m. ⊙ AR. = $20^h\ 21'\ 11'',4$

✱ Zeit = $3^h\ 43'\ 5'',5$
☾ AR. = $0^h\ 37'\ 32'',7$

☾ $t = 3^h\ 5'\ 32'',8$ log Stundenw. . = 4,49165
$\varphi = -1^\circ\ 50'$ log cos = 9,99978
☾ $\delta = -1^\circ\ 35'$ log cos = 9,99983

$\varphi - \delta = 0^\circ\ 15'$ n. cos = 99999
x = 30993 . . log = 4,49126

n. sin H. = 69006
☾ wahre Höhe = $43^\circ\ 38'$ — ☾ S. 104° West,
ungef. Parall. — Ref. = $-38'$ — Missw. = 14° West,

☾ loc. scheinb. Höhe = $43^\circ\ 0' = H$ — w. Azim. = S. 90° West,
Refraction = $-1'\ 2''$ — $(\varphi' - \varphi) \cdot \cos 90^\circ = 0$.

☾ loc. wahre Höhe . = $42^\circ\ 58'\ 58'' = H'$
$(\varphi' - \varphi) \cdot$ cos Azim. . = $0'$

☾ loc. w. geoc. Höhe = $42^\circ\ 58'\ 58'' = \mathfrak{H}$
Höhenparallaxe = $+39'\ 36''$

☾ wahre geoc. Höhe = $43^\circ\ 38'\ 34'' = \mathfrak{H}'$.

✱ Zeit = $3^h\ 43'\ 5'',5$
♂ AR. = $8^h\ 26'\ 28'',0$

♂ $t = 4^h\ 43'\ 22'',5$ log Stundenw. . = 4.82727
$\varphi = -1^\circ\ 50'$ log cos = 9,99978
♂ $\delta = +23^\circ\ 49'$ log cos = 9,96135

$\varphi - \delta = 25^\circ\ 39'$ n. cos = 90145
x = 61433 log = 4.78840

n. sin. H. = 28712
♂ wahre Höhe . . . = $16^\circ\ 41'$ — ♂ S. 101° Ost,
ungef. Refr. — Parall. = $+3'$ — Missw. = 14° West,

♂ loc. scheinb. Höhe = $16^\circ\ 44' = h$ — w. Az. = S. 115° Ost.
Refraction = $-3'\ 9''$ — lg cos 115° = 9,6259n

♂ loc. wahre Höhe . = $16^\circ\ 40'\ 51'' = h'$ — $\varphi' - \varphi = 0',73$ lg = 9,8633 — 10n
$(\varphi' - \varphi) \cdot$ cos Azim. . = $0'$ — $+0',31$ lg = 9,4892 — 10

♂ loc. w. geoc. Höhe = $16^\circ\ 40'\ 51'' = \mathfrak{h}$
Höhenparallaxe . . . = $+13''$

♂ wahre geoc. Höhe = $16^\circ\ 41'\ 4'' = \mathfrak{h}'$.

Berechnung der wahren Distanz nach der dritten Methode und zwar nach Formel (VI.). Da $(\varphi' - \varphi) \cdot$ cos Azim. bei beiden Höhen = 0, so ist eine zweimalige Rechnung hier nicht nöthig.

$$\cos D' = \cos(\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}') - [\cos(H - h) - \cos D] \cdot \frac{\cos \mathfrak{H}' \cdot \cos \mathfrak{h}'}{\cos H \cdot \cos h}$$

$\mathfrak{H}' = 43^\circ\ 38'\ 34''$ log cos = 9,859532
$\mathfrak{h}' = 16^\circ\ 41'\ 4''$ log cos = 9,981320
$H = 43^\circ\ 0'$ log sec = 0,135873
$h = 16^\circ\ 44'$ log sec = 0,018791

$H - h = 26^\circ\ 16'$ n. cos = 896744 — 19,995516
$D = 115^\circ\ 57'\ (57'')$ n. cos = 437587

1334(331 — log . . = 6,125156
Zahl = 1320297 — log . . = 6,120672
= 1320628
$\mathfrak{H}' - \mathfrak{h}' = 26^\circ\ 57'\ 30''$ n. cos = 891336
n. cos D' = − 429292
$D' = 115^\circ\ 25'\ 21''$
$+ 57''$

$D' = 115^\circ\ 26'\ 18''$
d. 26. Jan. um 6^h Grw. Zt. ist $D_{,} = 116^\circ\ 46'\ 59''$ — $1^\circ\ 20'\ 41''$ plg = 0,3485
» » » » 9^h » » » $D_{,,} = 115^\circ\ 15'\ 35''$ — $1^\circ\ 31'\ 24''$ plg = 0,2943
» » » » 12^h » » » $D_{,,,} = 113^\circ\ 44'\ 13''$ — $1^\circ\ 31'\ 22''$ plg = 0,2945 — 2

$D_{,} - D_{,,} : D_{,} - D' = 3^h : x^h$ oder plg x = plg $(D_{,} - D')$ − plg $(D_{,} - D_{,,})$.

plg 3^h = 0,0000
plg $(D_{,} - D')$ = 0,3485

= 0,3485
plg $(D_{,} - D_{,,})$ = 0,2943

plg x = 0,0542
$x = 2^h\ 38'\ 52'',5$
Corr. für II. Diff. = $0'',0$
6^h

mittl. astr. Greenw. Zeit = $8^h\ 38'\ 52'',5$ den 26. Januar,
» » Schiffszeit = $7^h\ 21'\ 54'',1$ den 26. Januar,

Länge in Zeit = $1^h\ 16'\ 58'',4$,
Länge = $19^\circ\ 14',6$ West von Greenwich.

Beispiel 3. 1853 den 26. Juli Morgens n. d. Besteck auf $44^\circ\ 50'$ NBr. und $9^\circ\ 44'$ WL. v. Greenw. ist um $10^h\ 21'\ 26''$ ⊙☾ $106^\circ\ 30'\ 3''$ beobachtet; man soll die Länge des Schiffes ermitteln.

U. C. gegen mittl. Zeit = − $0'\ 22''$; I. C. = + $1'\ 10''$; Barom. $30''$, 1 Engl.; Therm. + $77^\circ,9$ Fahrenh.; ☾ N. 66° West; Winkel am Monde = $25^\circ,6$; Missweis. = 28° W.

Ungef. mittl. Beob.-Zeit = $22^h\ 21'$ d. 25. Juli,
WL. in Zeit = + $39'$

ungef. mittl. Greenw. Zt. = $23^h\ 0'$ d. 25. Juli,
oder $1^h\ 0'$ v. d. mittl. Greenw. Mittage d. 26. Juli.

m. ⊙ AR. = $8^h\ 16'\ 12'',2$.
Zeitgl. = − $6'\ 10'',6$ auf mittl. Zeit.
⊙ Decl. = $19^\circ\ 26'\ 13''$ N.
⊙ Halbm. = $15'\ 47''$.
☾ Decl. = $2^\circ\ 26'\ 58''$ N.
☾ AR. = $1^h\ 9'\ 20'',8$.

☾ Horizontalparall. = 55′ 24″,6
Correct. für Abpl. . = — 5″,5
☾ loc. Horiz.-Parall. = 55′ 19″,1.

☾ Halbm. = 15′ 7″,7
Vergröss. = + 2″,0
Contract. = — 13″,0
☾ scheinb. Halbm. . = 14′ 56″,7.

Morgens 10^h 21′ 26″ — ⊙ ☾ 106° 30′ 3″
U.C.geg.mittl.Zt. = — 0′ 22″ — I. C. = + 1′ 10″
d. $\frac{25}{7}$ mittl.ast.Zt. = 22^h 21′ 4″ — ⊙ Halbm. . = + 15′ 47″
m. ⊙AR. = 8^h 16′ 12″ — ☾ Halbm. . = + 14′ 57″
✳ Zeit = 6^h 37′ 16″ — D = 107° 1′ 57″
☾ AR. = 1^h 9′ 21″
☾ t = 5^h 27′ 55″ log Stundenw. . = 4.93475
φ = + 44° 50′ log cos = 9.85075
☾ δ = + 2° 27′ log cos = 9,99960
$\varphi - \delta$ = 42° 23′ n. cos = 73865
x = 60968 log = 4,78510
7° 25′ . . . n. sin = 12897
Parall. — Refr. = — 48′
H = 6° 37′
Refract. = — 7′ 23″ — { mittl. Refraction = 7′ 41″; Corr. für Barom. = + 8″; » » Therm. = — 26″ }
☾ loc. w. H. . . = 6° 29′ 37″
Höhenparallaxe = + 54′ 58″
H' = 7° 24′ 35″.

☾ loc. w. H. . . . = 6° 29′ 37″
($\varphi' - \varphi$) · cos Az. = + 0′ 48″
☾ loc. geoc. H. . = 6° 30′ 25″ lg sec = 0,0028
☾ loc. Hor.-Par. = 55′ 19″ plg = 0,5124
☾ loc. Höh.-Par. = 54′ 58″ plg = 0,5152.

Mittl. astron. Zt. = 22^h 21′ 4″
Zeitgleichung . . = — 6′ 10″,6 auf mittl. Zeit.
wahre astr. Zt. = 22^h 14′ 53″,4
⊙ t = 1^h 45′ 6″,6 log Stundenw. . = 4,01425
φ = + 44° 50′ log cos = 9,85075
⊙ δ = + 19° 26′ log cos = 9,97453
$\varphi - \delta$ = 25° 24′ n. cos = 90334
x = 6911 log = 3,83953
56° 32′ . . . n. sin = 83423
ungf. Refr.—Par. = + 1′
h = 56° 33′
Refr. — Parall. = — 0′ 32″ — { mittl. Refraction = 0′ 38″; Corr. für Barom. = + 1″; » » Therm. = — 2″; Höhenparallaxe = — 5″. }
h' = 56° 32′ 28″.

$$\cos D' = \cos(H'-h') - [\cos(H-h) - \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}$$

$h = 56^\circ\ 33'$ log Diff. $= 0{,}000102$
$H = 6^\circ\ 37'$ log sec $= 0{,}002902$
$h - H = 49^\circ\ 56'$ n. cos $= 643679$
$D = 107^\circ\ 1'\ (57'')$
$2' - (3'')$ n. cos $= 292928$
936607 log . . . $= 5{,}971557$
$H' = 7^\circ\ 24'\ 35''$ log cos $= 9{,}996358$
$h' = 56^\circ\ 32'\ 28''$ Zahl $= 935233$ log . . . $= 5{,}970919$
$h' - H' = 49^\circ\ 7'\ 53''$ n. cos $= 654327$
n. cos $D' = -280906$
$D' = 106^\circ\ 18'\ 51''$
$-\ 3''$
$\frac{\varphi'-\varphi}{60^\circ} \cdot \sin$ ☾ Az. $(94^\circ) \cdot \sin \angle$ am ☾ $= -\ 5''$
$D' = 106^\circ\ 18'\ 43''$

N. A. $\frac{25}{7}$ um 21^h in Grw. ist $D_, = 107^\circ\ 15'\ 57''$ plg $= 0{,}3242$ | $0{,}3256$ Dff. $= 14$
$0^\circ\ 57'\ 14''$ plg $= 0{,}4976$
Zeitintervall $= 2^h\ 0'\ 44'',5$ plg $= 0{,}1734$
Corr. für II. Diff. $= -\ 4'',0$
21^h
mittl. astron. Greenw. Zeit $= 23^h\ 0'\ 40'',5$ den 25. Juli,
» » Schiffszeit $= 22^h\ 21'\ 4'',0$ den 25. Juli,
Länge in Zeit $= 0^h\ 39'\ 36'',5$,
Länge $= 9^\circ\ 54',1$ West von Greenwich.

Berechnung der wahren Distanz von Beispiel 3. nach der dritten Methode, ohne auf Barometer- und Thermometerstand, Contraction des Halbmessers und Abplattung der Erde Rücksicht zu nehmen.

$H = 6^\circ\ 37'$ $h = 56^\circ\ 33'$
Par. — Ref. Tf. XVII. / Horiz. Par. $= 55'\ 25''$ } $= +\ 47'\ 22''$ Ref. — Par. $= -\ 0'\ 33''$
$H' = 7^\circ\ 24'\ 22''$. $h' = 56^\circ\ 32'\ 27''$.

⊙☾ $= 106^\circ\ 30'\ 3''$
I. C. $= +\ 1'\ 10''$
⊙Halbm. $= +\ 15'\ 47''$
☾Halbm. $= +\ 15'\ 10''$
$D = 107^\circ\ 2'\ 10''$.

$h = 56^\circ\ 33'$ log Diff. $= 0{,}000121$
$H = 6^\circ\ 37'$ log sec $= 0{,}002902$
$h - H = 49^\circ\ 56'$ n. cos $= 643679$
$D = 107^\circ\ 2'\ (10'')$ n. cos $= 292928$
936607 log $= 5{,}971557$
$H' = 7^\circ\ 24'\ 22''$ log cos $= 9{,}996362$
$h' = 56^\circ\ 32'\ 27''$ Zahl $= 935283$ log $= 5{,}970942$
$h' - H' = 49^\circ\ 8'\ 5''$ n. cos $= 654283$
n. cos $D' = -281000$
$D' = 106^\circ\ 19'\ 11'',6$
$+\ 10''$
$D' = 106^\circ\ 19'\ 22''$.

Berechnung der wahren Distanz von Beispiel 3. nach der dritten Methode, wenn der Barometer- und Thermometerstand berücksichtigt, die Abplattung der Erde und die Contraction des Halbmessers nicht berücksichtigt wird.

$H =$	$6^\circ\ 37'$	Horiz. Parall.	$55'\ 25''$
			$+46'\ 51''$
			$+\quad 6''$
Parall. — Refr. $=$	$+47'\ 40''$		$+\quad 25''$
		Ber. f. Barom.	$(+)-\ 8''$
		Ber. f. Therm.	$(-)+\ 26''$
$H' =$	$7^\circ\ 24'\ 40''$.		
$h =$	$56^\circ\ 33'$	mittl. Refract.	$0'\ 38''$
		Ber. f. Barom.	$+\ 1''$
Refr. — Parall. $=$	$-\ 0'\ 32''$	Ber. f. Therm.	$-\ 2''$
		Parallaxe	$-\ 5''$
$h' =$	$56^\circ\ 32'\ 28''$.		
$D =$	$107^\circ\ 2'\ 10''$.		

$h =$	$56^\circ\ 33'$			log Diff.	$= 0{,}000102$
$H =$	$6^\circ\ 37'$			log sec	$= 0{,}002902$
$h - H =$	$49^\circ\ 56'$	n. cos $=$	643679		
$D =$	$107^\circ\ 2'\ (10'')$. .	n. cos $=$	292928		
			936607	log	$= 5{,}971557$
$H' =$	$7^\circ\ 24'\ 40''$			log cos	$= 9{,}996357$
$h' =$	$56^\circ\ 32'\ 28''$	Zahl $=$	935230	log	$= 5{,}970918$
$h' - H' =$	$49^\circ\ 7'\ 48''$. .	n. cos $=$	654345		
		n. cos $D' =$	-280885		

$D' = 106^\circ\ 18'\ 47''$
$\quad + 10''$
$D' = 106^\circ\ 18'\ 57''$.

Beispiel 4. 1868 den 12. Juli Morgens nach dem Besteck auf 21° 0' SBr. und 36° WL. v. Greenw. ist bei 16 Fuss Rheinl. Augeshöhe folgende Beobachtung nach einem Chronometer gemacht, dessen Stand gegen mittlere Greenw. Zeit im mittleren Greenw. Mittage den 12. Juli $= -5'\ 52''$ und dessen täglicher Gang $-4''$ beträgt.

I. C. $-3'$.

Chron. $11^h\ 3'\ 50''$ ☉ $22^\circ\ 46'$.

Dann gesegelt p. Comp. SO½S. 4 Seem. stündlich bei ½ Strich West-Missweisung und beobachtet nach demselben Chronometer

I. C. $= -3'$

$12^h\ 22'\ 22''$ ☾ $22^\circ\ 22'$	I. C. $= -3'$		
23 43	☉ $36^\circ\ 32'$	I. C. $= +\ 2'\ 40''$	
25 56 .			☉☾ 95° 56 40
26 54 .			56 20
28 0 .			55 30
29 25 .			55 0
30 10 .			54 25
31 22 ☉ $37^\circ\ 38'$			
32 40 ☾ $20^\circ\ 3'$			

Man soll die Länge nach dem Chronometer und durch die Monddistanz finden.

Chron.	$11^h\ 3'\ 50''$	⊙	$22^\circ\ 46'$
Chron. C. d. 12. Juli	$-\ 5'\ 52''$	I. C.	$-\ 3'$
	$10^h\ 57'\ 58''$		$22^\circ\ 43'$
Corr. f. Gg.	0	Kimmt.	$-\ 4'$
Mittl. Greenw. Zeit	$10^h\ 57'\ 58''$		$22^\circ\ 39'$
Morgens d. 12. Juli		Ref. — Parall.	$-\ 2',2$
			$22^\circ\ 36',8$
		⊙Halbm.	$+\ 15',8$
		$h =$	$22^\circ\ 52',6.$
		⊙ Decl. $= +$	$21^\circ\ 55'\ 12''.$
		Zeitgl. $= +$	$5'\ 20''$ a. wahre Zeit.

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

$\varphi = -21^\circ\ 0'$	log sec ...	$= 0{,}02985$
$\delta = +21^\circ\ 55',2$	log sec ...	$= 0{,}03259$
$\varphi - \delta = 42^\circ\ 55',2$	n. cos	$= 73231$
$h = 22^\circ\ 52',6$	n. sin	$= 38875$
	34356 log	$= 4{,}53600$
$t = 3^h\ 31'\ 34''$	log $(2 \sin^2 \frac{1}{2} t)$	$= 4{,}59844$

wahre Zeit $= 8^h\ 28'\ 26''$ Mrg. d. 12. Juli,
Zeitgl. $= +\ 5'\ 20''$ a. whr. Zeit,
mittl. Zeit $= 8^h\ 33'\ 46''$ Mrg. d. 12. Juli,
m. Grnw. Zt. n. Chr. $= 10^h\ 57'\ 58''$ » » » »
Länge in Zeit $= 2^h\ 24'\ 12''$
Länge $= 36^\circ\ 3'$ West v. Greenw. nach Chron.

Chron. zeigte bei der I. Beob. $11^h\ 4'$
» » » » II. » $12^h\ 28'$
Zwischenzeit $1^h\ 24' = 1{,}4^h$
4

Zwischen den Beob. zurückgelegte Dist. 5,6 Seem.

Comp.-Curs SO ½ S. giebt bei ½ Str. W. Missweisung rw. SO.

Br. Unt. $= 0^\circ\ 4'$ S.	Mittelbr. $= 21^\circ\ 2'$	Abw. $= 4$ Seem. O.
Verl. Br. $= 21^\circ\ 0'$ S.		Lg. Unt. $= 0^\circ\ 4',3$ O.
		Verl. Lg. $= 36^\circ\ 3',0$ W. v. Grw.
Errcht. Br. $= 21^\circ\ 4'$ S.		Errcht. Lg. $= 35^\circ\ 58',7$ W. v. Grw.

Das Schiff befand sich also bei der zweiten Beobachtung auf $21^\circ\ 4'$ S. Br. und $35^\circ\ 58',7$ W. Lg. v. Grw. nach dem Chronometer.

Chron.	$12^h\ 28'\ 5''$	☾	$21^\circ\ 5'$	⊙	$37^\circ\ 10'$	⊙☾	$95^\circ\ 55'\ 35''$
St.d.Chr.g.m.Gr.Zt.	$-\ 5'\ 52''$	I. C.	$-\ 3'$	I. C.	$-\ 3'$	I. C.	$+\ 2'\ 40''$
mittl. Grw. Zeit	$12^h\ 22'\ 13''$		$21^\circ\ 2'$		$37^\circ\ 7'$		$95^\circ\ 58'\ 15''$
nach Chron.		k	$-\ 4'$	k	$-\ 4'$	⊙ r	$+\ 15'\ 46''$
			$20^\circ\ 58'$		$37^\circ\ 3'$	☾ r	$+\ 15'\ 15''$
		☾ r	$-\ 15'$	⊙ r	$+\ 16'$	$D =$	$96^\circ\ 29'\ 16''.$
		$H =$	$20^\circ\ 43'$	$h =$	$37^\circ\ 19'$		
		Par.-Rfr. $=$	$+\ 49'\ 26''$	Rfr.-P.	$-\ 1'\ 8''$		
		$H' =$	$21^\circ\ 32'\ 26''.$	$h' =$	$37^\circ\ 17'\ 52''.$		

☾ whr. Halbm. = 15′ 10″ — ☾ Aequat. Hor. Par. = 55′ 33″
Vergr. = + 5″ — Corr. f. Abpl. = — 1″
☾ scheinb. Halbm. = 15′ 15″. — ☾ loc. Hor. Par. = 55′ 32″.

$$\cos D' = \cos(H'-h') - [\cos(H-h) - \cos D] \cdot \frac{\cos H' \cdot \cos h'}{\cos H \cdot \cos h}$$

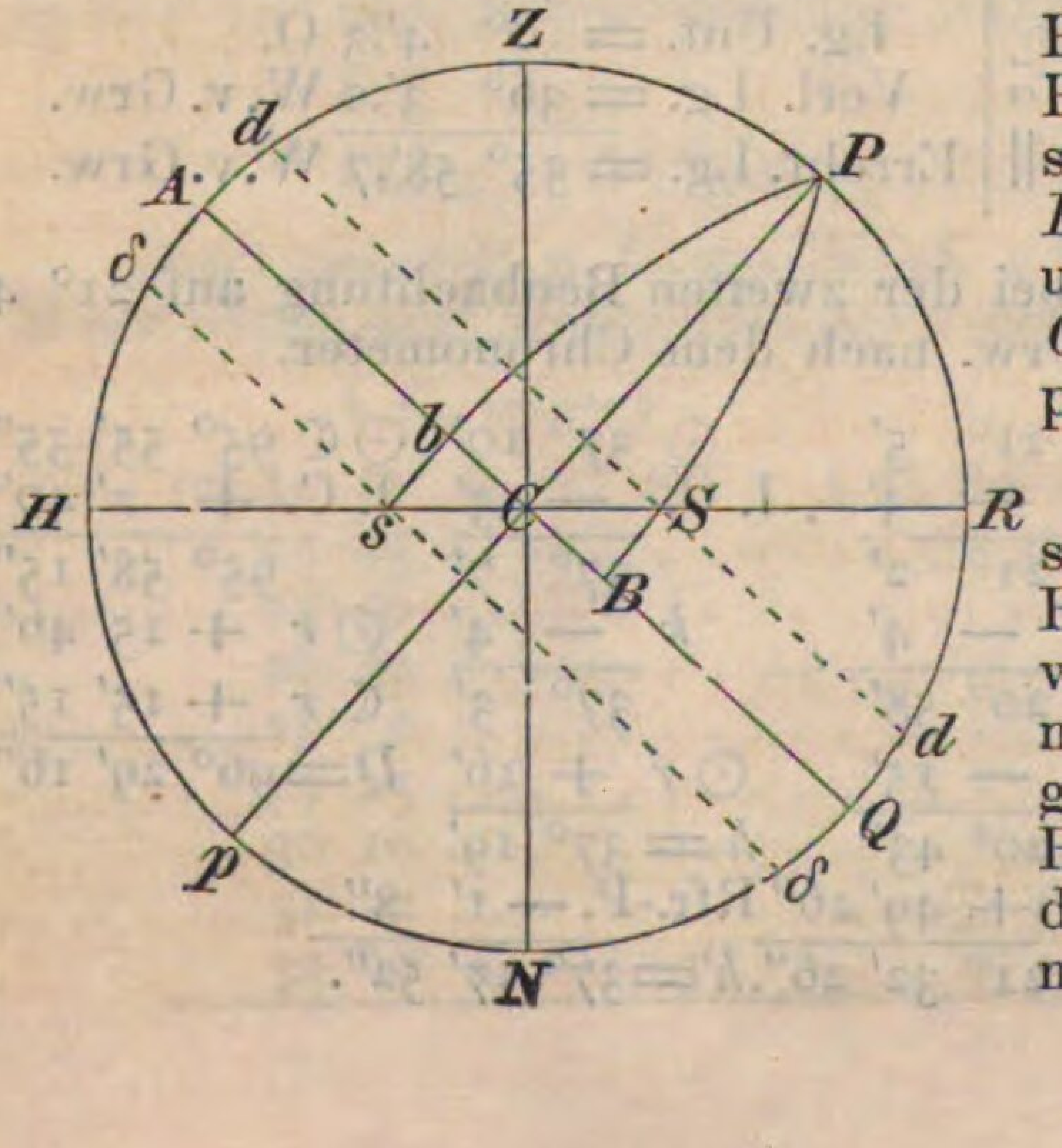
$H' = 21^\circ\ 32'\ 26''$ log cos = 9,968556
$h' = 37^\circ\ 17'\ 52''$ log cos = 9,900639
$H = 20^\circ\ 43'$ log sec = 0,029030
$h = 37^\circ\ 19'$ log sec = 0,099471
$H - h = 16^\circ\ 36'$ n. cos = 958323 — 19,997696
$D = 96^\circ\ 29'\ (16'')$ n. cos = 112914
1071(237 log = 6,029789
1065331 log = 6,027485
Zahl = 1065568
$H' - h' = 15^\circ\ 45'\ 26''$ n. cos = 962421
n. cos D' = —103147
95° 55′ 13″
+ 16″
$D' = 95^\circ\ 55'\ 29''$ — 14
den 12. Juli 0^h $D_{,} = 96^\circ\ 5'\ 7''$ plg = 0,3211 . . . 0,3197
9′ 38″ plg = 1,2715
plg x = 0,9504
$x = 0^h\ 20'\ 11''$
Corr. f. II. Diff. + 2″
0^h
mttl. Greenw. Zt. $0^h\ 20'\ 13''$ durch ☾ Dist.
» » » $0^h\ 22'\ 13''$ nach Chron.
Differenz 2′ 0″.

Die Berechnung dieser Monddistanz giebt die Länge um 30′ in Bogen kleiner als die nach dem Chronometer gefundene. Es ist daher nach der Monddistanz die Länge 35° 28′,7 W. v. Grw.

§. 195.

Die Missweisung des Compasses durch Beobachtung der Sonnen-Amplitude zu bestimmen, wenn die Breite und Länge des Ortes bekannt ist.

Fig. 99.



Es sei in Fig. 99. P der obere Pol, Z das Zenith, HR der wahre Horizont, AQ der Aequator, dd, sowie $\delta\delta$ Declinations-Parallele, PSB und Pbs Declinationskreise, und ZCN der erste Vertical, also C der wahre Ost-, bezw. Westpunkt im Horizonte.

Wahre Amplitude eines Gestirnes ist der Bogen des wahren Horizontes, welcher zwischen dem wahren Ost- oder Westpunkte (je nachdem dasselbe auf- oder untergeht) und dem sich im wahren Horizonte befindenden Mittelpunkte des Gestirnes liegt; sie wird bei nördlicher Declination desselben

vom wahren Ost- oder Westpunkte nach Norden, bei südlicher Declination aber nach Süden gezählt.

Nach der Figur ist daher, wenn *Ad* die nördliche Declination der Sonne ist, *CS* die wahre Amplitude und zwar beim Aufgange = Ost *CS* Nord, und beim Untergange = West *CS* Nord; wenn dagegen *Aδ* die südliche Declination bezeichnet, so ist beim Aufgange die wahre Amplitude = Ost *Cs* Süd, und beim Untergange = West *Cs* Süd.

Im sphärischen Dreieck *BCS* ist *BS* = *Ad* die Declination, der Winkel *BCS* = Winkel *HCA* das Complement der Breite des Ortes und der Winkel *B* ist = 90°; daher hat man

$$\sin \text{Ampl.} = \frac{\sin \text{Decl.}}{\cos \text{Breite}} = \sin \text{Decl.} \cdot \sec \text{Breite} \; \ldots\ldots\ldots \; (\text{I.}),$$

nach welcher Formel man die wahre Amplitude finden kann, wenn die Breite des Ortes und die Declination der Sonne bekannt ist.

Um die Declination finden zu können, muss man die Länge und ungefähre Zeit des Ortes kennen (§. 103.) und wenn letztere nicht bekannt ist, so kann dieselbe nach (§. 141. A.) gefunden werden.

Der Abstand des Mittelpunktes der Sonne vom magnetischen Ostpunkte, wenn diese im wahren Horizonte aufgeht, vom magnetischen Westpunkte, wenn ihr Mittelpunkt im wahren Horizonte untergeht, wird die magnetische Amplitude genannt.

Die magnetische Amplitude wird durch Peilen vermittelst eines Peil- oder Azimuth-Compasses gefunden, wenn derselbe frei von örtlicher Ablenkung ist; andern Falles hat man immer nur die Amplitude der Sonne nach dem Compass, womit gepeilt ist. Die Sonne muss also gepeilt werden, wenn ihr Mittelpunkt im wahren Horizonte ist, mithin wenn

⊖ wahre Höhe	= 0° 0′	
Refraction*)	= + 29′,3	
⊖ scheinbare Höhe	= 0° 29′,3	über dem schb. Horizonte,
Kimmtiefe für 14′ Augeshöhe	= 3′,7	
Bei 14′ Augeshöhe ⊖ scheinbare Höhe	= 0° 33′	über der Kimm.

Da unter diesen Umständen der mittlere verticale scheinbare Halbmesser der Sonne 13,7 Minuten beträgt, so ist, wenn sich der Mittelpunkt der Sonne im wahren Horizonte befindet, die scheinbare Höhe des Unterrandes über dem scheinbaren Horizonte = 29′,3 — 13′,7 = 15′,6, also ungefähr so hoch, wie der horizontale Sonnenhalbmesser. Zu dieser Höhe muss natürlich die Kimmtiefe addirt werden, um die Höhe des Unterrandes über der Kimm zu erhalten.

Das Peilen mit dem Compasse lässt sich der steten Bewegung des Schiffes wegen nicht genau ausführen, und weil ausserdem Compasse keiner grossen Genauigkeit fähig sind, so sollte man sich nie mit einer Peilung zur Bestimmung der magnetischen Amplitude begnügen. Damit aber das Mittel aus mehreren Peilungen die Amplitude für den Augen-

*) Da es hier auf keine grosse Genauigkeit ankommt, so kann die Parallaxe ganz vernachlässigt werden. — Das Argument der Refractionstafel ist die scheinbare Höhe und man nimmt daher erst für die gegebene wahre Höhe die Refraction, addirt diese zu der wahren Höhe, so hat man die ungefähre scheinbare Höhe, für welche wieder die Refraction gesucht und zur gegebenen wahren Höhe addirt wird; diese Summe als die genauere scheinbare Höhe genommen, und dafür die Refraction aufgesucht und zu der wahren Höhe addirt, giebt zu diesem Zwecke jedenfalls die scheinbare Höhe genau genug.

blick nahe richtig giebt, wenn der Mittelpunkt der Sonne im wahren Horizonte war, muss man ebensoviel vor diesem Zeitpunkte (nämlich wenn der Unterrand der Sonne einen horizontalen Halbmesser + der Kimmtiefe über dem Seehorizonte ist) anfangen, als man später aufzuhören gedenkt.

Beim Aufgange der Sonne an Bord beginne man also dieselbe mit dem Compasse zu peilen, wenn ihr Unterrand die Kimm berührt, und setze dieses Peilen fort, bis ihr Unterrand von der Kimm $1\frac{1}{4}$ Sonnendurchmesser absteht. Das arithmetische Mittel dieser Peilungen, von Ost ausgedrückt, ist als die Morgen-Amplitude der Sonne nach dem Compasse, womit gepeilt ist, anzusehen. Des Abends fängt man natürlich an zu peilen, wenn der Unterrand der Sonne von der Kimm $1\frac{1}{4}$ Sonnendurchmesser absteht, und hört auf, wenn er die Kimm berührt. Das Mittel aus diesen Peilungen, von West ausgedrückt, ist die Abend-Amplitude.

Den Curs des Schiffes nach dem Steuer- und Peil-Compass hat man kurz vor und nach dieser Amplituden-Beobachtung zu bestimmen und daraus zu ermitteln, was das Schiff nach beiden Compassen angelegen hat, als der Sonnenunterrand von der Kimm einen Sonnenhalbmesser + Kimmtiefe abstand.

Die Missweisung des Compasses ist die Abweichung seines Nordens vom wahren Norden und man nennt sie westlich, wenn der Compass-Norden nach Westen, östlich, wenn derselbe nach Osten vom wahren Norden abweicht, welches sich leicht durch Zeichnung einer einfachen Figur ermitteln lässt und später bei den Beispielen gezeigt wird.

Regel. Die wahre Amplitude der Sonne zu berechnen, die nach dem Compasse durch Peilung zu finden, und aus beiden die Missweisung des Compasses zu ermitteln.

1. Man peile den Mittelpunkt der Sonne, wie vorhin angegeben.

2. Man mache das Besteck auf und finde die Breite für den Augenblick der Beobachtung.

3. Die Declination der Sonne wird für den Augenblick der Beobachtung auf volle Minuten genau gefunden (§. 103.). Kennt man die Zeit der Beobachtung nicht nahe, so wird die Zeit des wahren Aufganges nach §. 141. A. gefunden, oder kann aus der nautischen Tafel XLII. entnommen werden.

4. Addire log sin Declination und log sec Breite. so ist die Summe gleich log sin wahre Amplitude, die Morgens von Osten und Abends von Westen nach Norden oder Süden gerechnet wird, je nachdem die Declination nördlich oder südlich ist.

5. Ist die wahre Amplitude gleichnamig mit der nach dem Compasse, also beide nördlich oder beide südlich benannt, so ist ihre Differenz, sind sie aber ungleichnamig, nämlich eine von Osten nach Norden und die andere von Osten nach Süden, oder die eine von Westen nach Norden und die andere von Westen nach Süden gerechnet, so ist die Summe derselben gleich der Missweisung.

6. Die Missweisung ist westlich, wenn der Compass-Norden nach Westen vom wahren Norden, östlich, wenn derselbe nach Osten vom wahren Norden abweicht. Um dieses zu ermitteln, zeichne man einen Kreis und nehme diesen als Horizont des Beobachtungsortes an, ziehe in demselben zwei Durchmesser rechtwinklig auf einander und bezeichne die dadurch in dem Umfange entstehenden vier Schnittpunkte mit:

w. N., w. O., w. S. und w. W. Man setze jetzt die wahre Amplitude vom wahren Ost- oder vom wahren Westpunkte nach Nord oder Süd ab, wie die Benennung es verlangt, und bezeichne den dadurch entstehenden Punkt im Kreise als den Mittelpunkt der Sonne. Von diesem Punkte trage man die Amplitude, mit dem Compasse bestimmt, nach Nord ab, wenn dieselbe südlich ist, oder umgekehrt nach Süd, wenn sie mit Nord benannt ist, so erhält man den Ost- oder Westpunkt nach dem Compasse, je nachdem die Amplitude von Osten oder Westen gerechnet war. Man ziehe ferner durch diesen Punkt einen Durchmesser und errichte auf diesen einen zweiten Durchmesser rechtwinklig, so geht dieser durch den Nord- und Südpunkt des Compasses und es ist leicht zu sehen, ob dessen Nord nach West oder nach Ost vom wahren Nord abweicht.

Die Figur braucht man nur aus freier Hand zu zeichnen, oder darf sich dieselbe nur vorstellen, um zu wissen, ob die Missweisung östlich oder westlich ist.

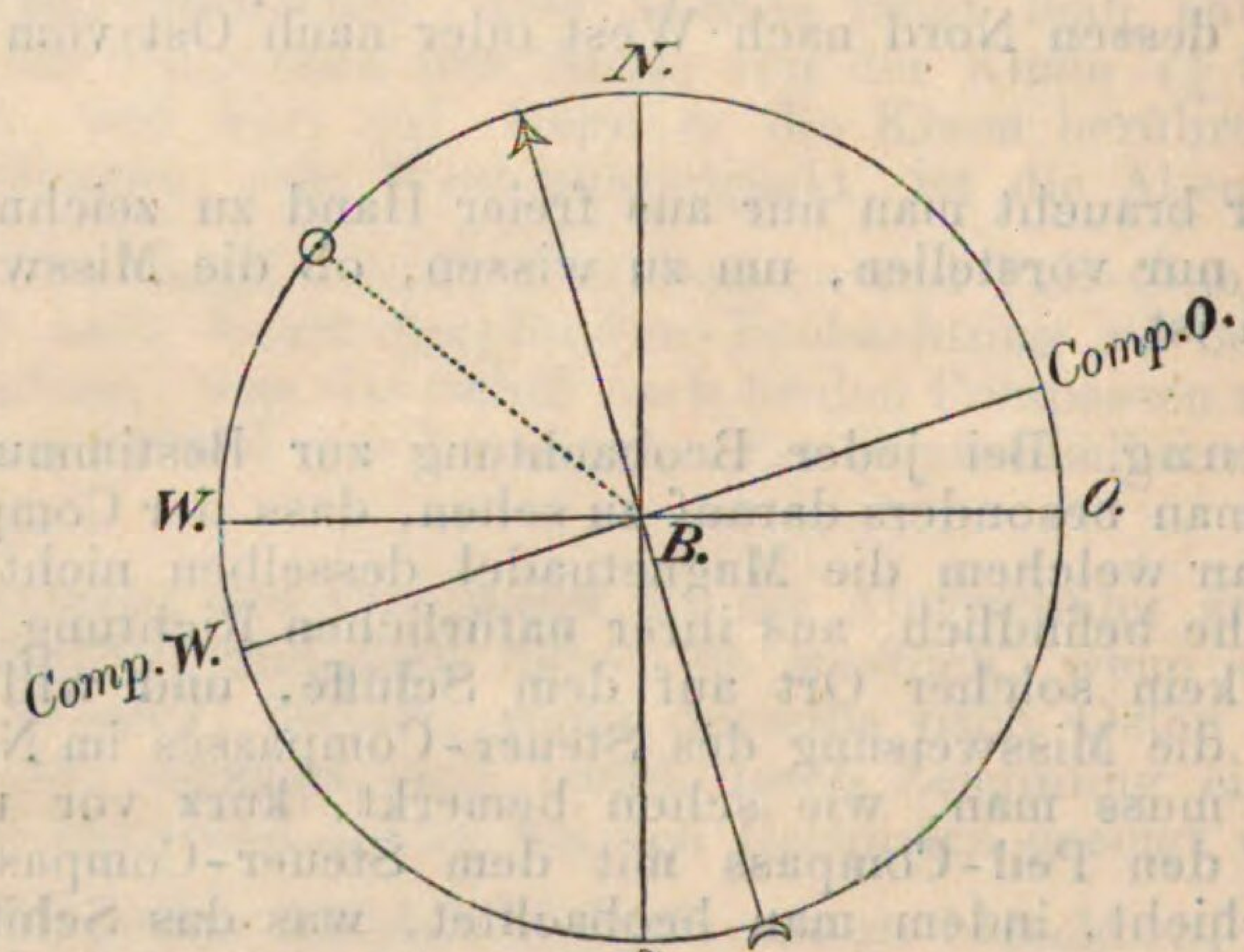
Anmerkung. Bei jeder Beobachtung zur Bestimmung der Missweisung hat man besonders darauf zu sehen, dass der Compass an einem Orte steht, an welchem die Magnetnadel desselben nicht durch Eisen, in dessen Nähe befindlich, aus ihrer natürlichen Richtung gezogen wird. Findet sich kein solcher Ort auf dem Schiffe, und will man mittelst Beobachtung die Missweisung des Steuer-Compasses im Nachthause bestimmen, so muss man, wie schon bemerkt, kurz vor und nach der Beobachtung den Peil-Compass mit dem Steuer-Compass vergleichen, welches geschieht, indem man beobachtet, was das Schiff nach jedem der Compasse zugleich anliegt, wobei zu beachten ist, dass das Schiff während dieser Vergleichung der Compasse denselben Curs steuern muss, wie während der Beobachtung. Wenn das Schiff nicht nach beiden Compassen gleich anliegt, so ergiebt sich leicht aus der Differenz zwischen beiden Richtungen, wie man die Sonne nach dem Steuercompasse gepeilt haben würde. Man kann daher auch die Missweisung desselben finden, welche jedoch nur für den Fall die des Ortes (also an diesem für jeden Curs geltende Missweisung) ist, wenn der Compass im Nachthause nicht durch in seiner Nähe befindliches Eisen abgelenkt ist; jedenfalls aber ist es die Missweisung desselben bei dem Curse, welchen das Schiff während der Beobachtung anlag.

Beispiel 1. 1853 den 6. Juni nach dem Besteck auf 54° 27′ NBr. und 16° OL. von Greenwich ist nachstehende Beobachtung zur Bestimmung der Missweisung gemacht:

ungef. um 8^h 20′ w. Zt. Abends

Ungef. wahre Schiffszeit = 8^h 20′ Abends,	⦶ N. $32\frac{3}{4}$° West, ⊙
OL. in Zeit — 1^h 4′	$32\frac{1}{4}$ ⊙̲
ungef. wahre Greenw. Zt. = 7^h 16′ Abends.	$32\frac{1}{4}$
	$32\frac{1}{2}$
N. A. den 6. Juni, ⊙ Decl. = 22° 40′ 56″ N.	$32\frac{1}{4}$
stündl. Diff. = + 14″,9	$32\frac{3}{4}$ ⊙̲
Greenw. Zt. = 7.3^h	N. 32° 28′ West,
108″,8 + 1′ 49″	90°
⊙ Decl. = 22° 42′ 45″ N.	⊙ Ampl. = W. 57° 32′ Nord nach dem Compasse.

sin Ampl.. . = sec φ · sin δ.
δ . . . Decl. = 22° 43′ log sin = 9,58678
φ . . . Br. = 54° 27′ log sec = 0,23552
log sin Ampl. = 9,82230
wahre Amplitude . . . = W. 41° 37′ Nord,
Compass-Amplitude . = W. 57° 32′ Nord,
Compass-Missweisung = 15° 55′ West.



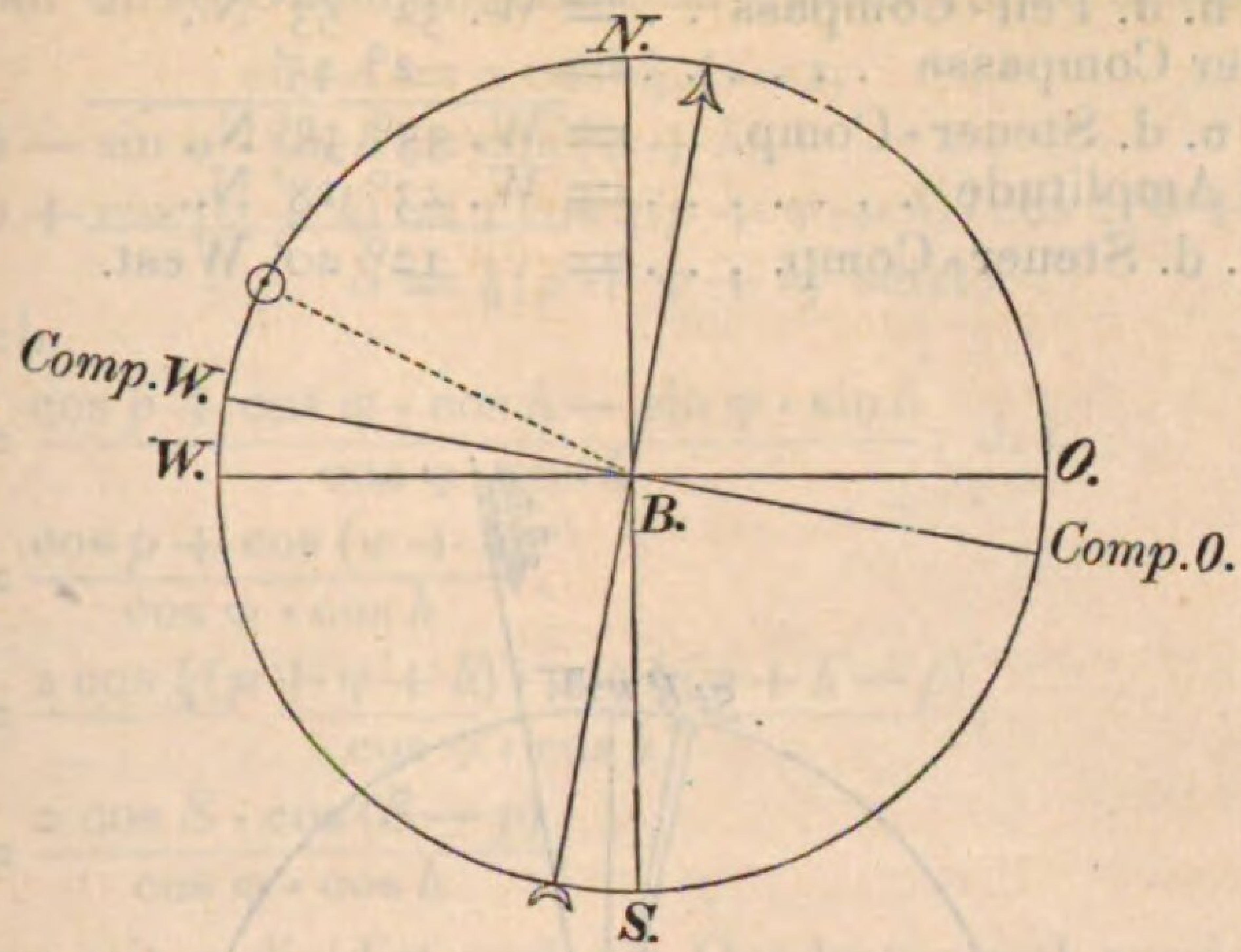
Beispiel 2. 1853 den 10. Juni nach dem Besteck auf 36° 40′ SBr. und 160° WL. von Greenw. ist mit dem Compasse ⊙ Ampl. W. 19° 13′ N. beobachtet.

Nach Tafel XLII. ergiebt sich für 36° 40′ SBr. und 23° NDecl. die ungefähre wahre Zeit des Sonnenunterganges
= 4^h 44′ Abends.
WL. in Zeit + 10^h 40′
ungef. wahre Greenw. Zt. . . = 15^h 24′ Ab. den 10. Juni.

N. A. ⊙ Decl. den 10. Juni . = 23° 2′ 21″ N.
ständl. Differ. = + 10″,9
$15,4^h$
168″ + 2′ 48″
⊙ Decl. = 23° 5′ Nord.

δ = 23° 5′ log sin = 9,59336
φ = 36° 40′ log sec = 0,09576
log sin Amplitude . = 9,68912

wahre Amplitude. = W. 29° 16′ N.,
Compass-Amplitude . . . = W. 19° 13′ N.,
Compass-Missweisung. . = 10° 3′ Ost.



Beispiel 3. 1853 den 2. August nach dem Besteck auf 39° 50′ NBr. und 26° 7′ OL. von Greenwich, ungefähr um 7^h Abends wahre Zeit ist beobachtet

⌽ N. 58° West, ⊙ ⊙
57
57
57
57
57
57
57
57 ⊙
N. 57° 7′ W.

⊙ Ampl. = W. 32° 53′ Nord nach dem Peil-Comp.

Das Schiff lag an:

n. d. Peil-Comp.	n. d. Steuer-Comp.
N. 22½° O.	N. 25¼° O.
22	24½
21	24
21	23¾

Peil-Compass . = N. 21° 37′ O.,
Steuer-Comp. . = N. 24° 22′ O.,
Differenz = 2° 45′.

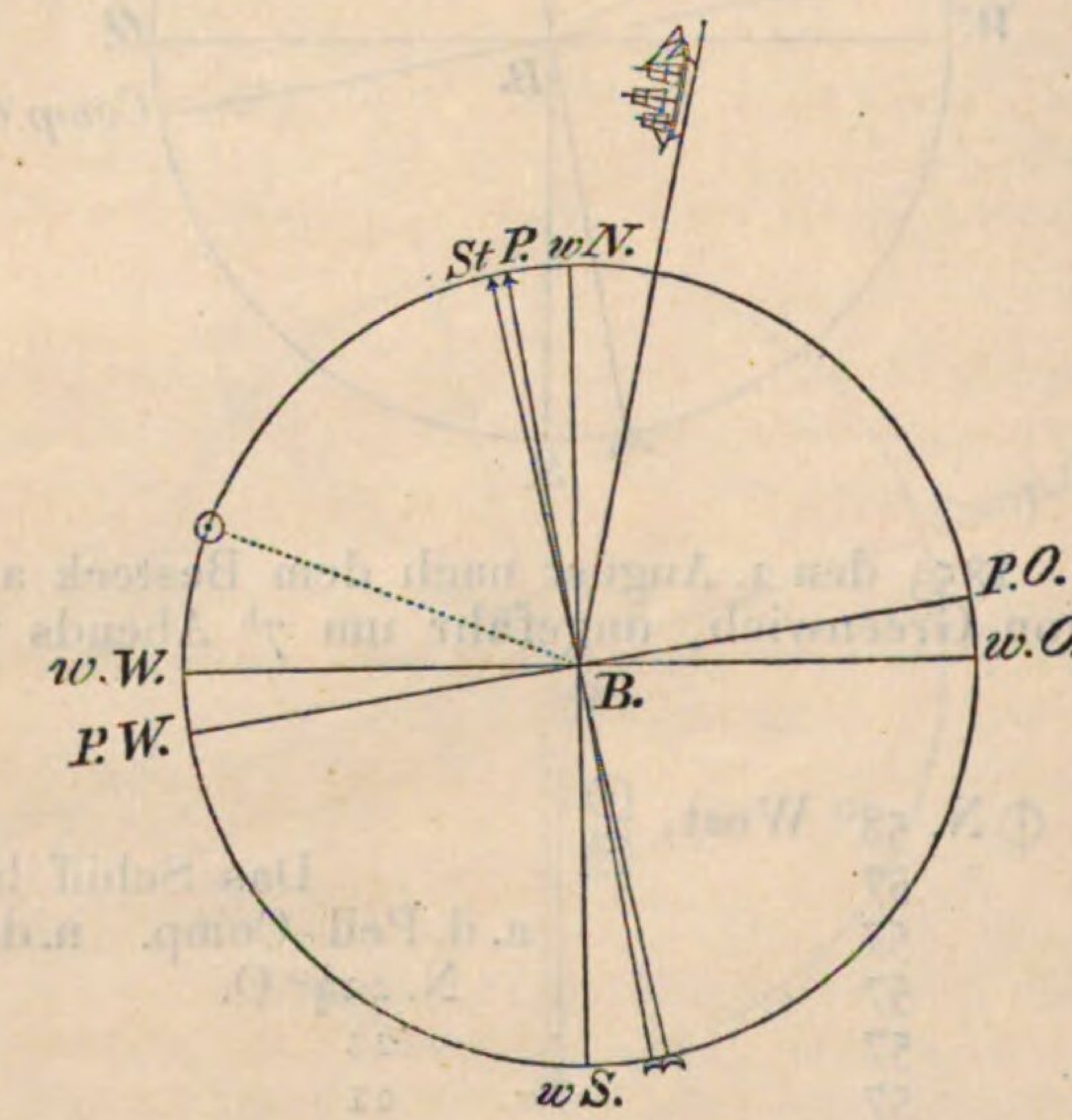
Ungef. wahre Schiffszeit . . . = 7^h 0′ Abends,
ungef. Zeitgl. = + 6′ a. w. Zt.,
ungef. mittl. Schiffszeit = 7^h 6′ Abends,
OL. in Zeit = — 1^h 44′
ungef. mittl. Greenw. Zeit . . = 5^h 22′ Abends d. 2. August.

N. Jahrb. den 2. Aug., ⊙ Decl. = 17° 44′ 54″ N.
stündl. Differ. = — 39″
$5{,}4^h$
211″ — 3′ 31″
⊙ Decl. = 17° 41′ 23″ N.

δ = 17° 41′ log sin = 9,48253
φ = 39° 50′ log sec = 0,11469
log sin Amplitude . = 9,59722

wahre Amplitude = W. 23° 18′ N.,
Peil-Compass-Amplitude . . . = W. 32° 53′ N.,
Missweis. des Peil-Compasses = 9° 35′ West.

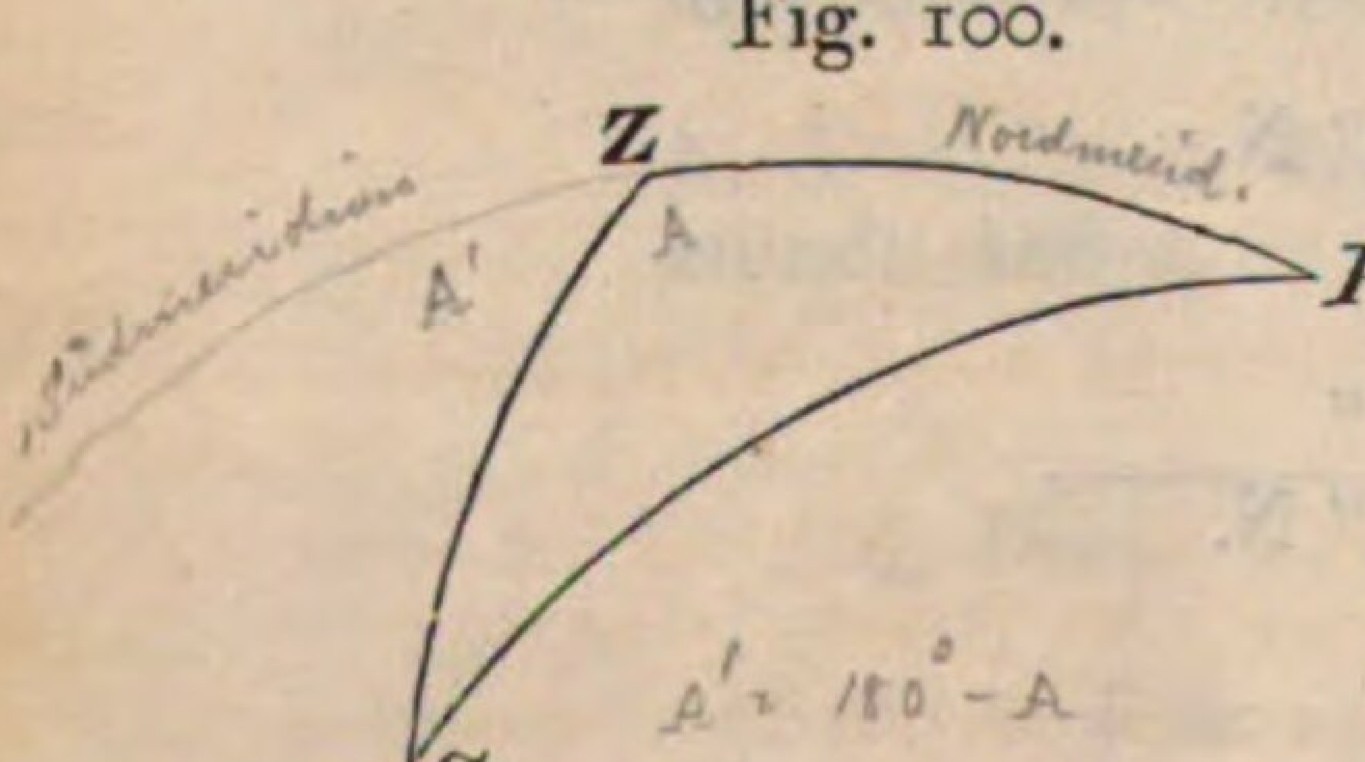
Ampl. n. d. Peil-Compass . .	=	W. 32° 53′ N.,
Diff. der Compasse	=	2° 45′
Ampl. n. d. Steuer-Comp. . .	=	W. 35° 38′ N.,
wahre Amplitude	=	W. 23° 18′ N.,
Missw. d. Steuer-Comp. . . .	=	12° 20′ West.



§. 196.

Die Missweisung des Compasses durch Azimuth-Beobachtungen der Sonne zu bestimmen, wenn die Breite und Länge des Beobachtungsortes sowie die Zeit der Beobachtung näherungsweise bekannt ist, auch die örtliche Ablenkung des Compasses zu finden, wenn man die Missweisung eines Compasses, der keine Localdeviation (örtliche Ablenkung) hat, kennt, oder, wenn diese Missweisung nicht bekannt sein sollte, letztere aus den Beobachtungen zu ermitteln.

Fig. 100.



Es sei in Fig. 100. Z das Zenith, P der obere Pol und S der Ort der Sonne, deren Azimuth gleichzeitig mit der Höhe beobachtet ist.

Der Winkel SZP ist das Azimuth vom Meridian des oberen Pols gerechnet, und wenn man diesen Winkel mit A bezeichnet, so ergiebt sich aus dem sphärischen Dreieck ZPS, worin ZS das Complement der Höhe, PS die Poldistanz und PZ das Complement der Breite ist, nach §. 19. Gleichung (I.) der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos A = \frac{\cos p - \sin \varphi \cdot \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)},$$

worin p Poldistanz, φ Breite des Ortes und h wahre Höhe.

Wenn man diese Gleichung zu $1 = 1$ addirt und beachtet, dass,

$$\cos A = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}A - 1,$$

$$\cos\varphi \cdot \cos h - \sin\varphi \cdot \sin h = \cos(\varphi + h),$$

$$\cos p + \cos(\varphi + h) = 2\cos\tfrac{1}{2}(p + \varphi + h) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + h - p) \text{ ist und}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(p + \varphi + h) \text{ setzt;}$$

so ergiebt sich

$$1 + \cos A = \frac{\cos p + \cos\varphi \cdot \cos h - \sin\varphi \cdot \sin h}{\cos\varphi \cdot \cos h}, \text{ d. i.}$$

$$2 \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\cos p + \cos(\varphi + h)}{\cos\varphi \cdot \cos h},$$

$$= \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(p + \varphi + h) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + h - p)}{\cos\varphi \cdot \cos h},$$

$$= \frac{2\cos S \cdot \cos(S - p)}{\cos\varphi \cdot \cos h},$$

und wenn man mit 2 dividirt und die Quadratwurzel auszieht, so erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \cos(S - p)}{\cos\varphi \cdot \cos h}} = \sqrt{\cos S \cdot \cos(S - p) \cdot \sec\varphi \cdot \sec h} \quad . \; . \; (\text{II.}).$$

Wenn man aber die Gleichung (I.) von $1 = 1$ subtrahirt und beachtet, dass

$$\cos A = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}A,$$

$$\sin\varphi \cdot \sin h + \cos\varphi \cdot \cos h = \cos(\varphi - h),$$

$$\cos(\varphi - h) - \cos p = 2\sin\tfrac{1}{2}(p + \varphi - h) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(p + h - \varphi),$$

$$S = \tfrac{1}{2}(p + \varphi + h),$$

so ergiebt sich

$$1 - \cos A = \frac{\cos\varphi \cdot \cos h - \cos p + \sin\varphi \cdot \sin h}{\cos\varphi \cdot \cos h}, \text{ d. i.}$$

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\cos\varphi \cdot \cos h + \sin\varphi \cdot \sin h - \cos p}{\cos\varphi \cdot \cos h},$$

$$= \frac{\cos(\varphi - h) - \cos p}{\cos\varphi \cdot \cos h},$$

$$= \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(p + \varphi - h) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(p + h - \varphi)}{\cos\varphi \cdot \cos h},$$

$$= \frac{2\sin(S - h) \cdot \sin(S - \varphi)}{\cos\varphi \cdot \cos h},$$

und wenn man durch 2 dividirt und die Quadratwurzel auszieht, findet man

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(S - h) \cdot \sin(S - \varphi)}{\cos\varphi \cdot \cos h}} = \sqrt{\sin(S - h) \cdot \sin(S - \varphi) \cdot \sec\varphi \cdot \sec h} \quad (\text{III.}).$$

Im Dreieck *ZSP* ist *P* der Stundenwinkel der sich in *S* befindenden Sonne, und wenn man denselben mit *T* bezeichnet, die vorhin gebrauchten Bezeichnungen beibehält, statt der Poldistanz aber die Declination δ nimmt, so ergiebt sich ferner aus dem sphärischen Dreieck *ZPS* nach §. 20. und §. 22. der sphärischen Trigonometrie

$$\cos h \cdot \sin A = \cos\delta \cdot \sin T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{a.})$$

und

$$\cos h \cdot \cos A = \sin\delta \cdot \cos\varphi - \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos T \quad . \; . \; . \; . \; (\text{b.}).$$

Dividirt man mit (b.) in (a.), so erhält man:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos\delta \cdot \sin T}{\sin\delta \cdot \cos\varphi - \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos T},$$

$$= \frac{\operatorname{tg} T}{\frac{\operatorname{tg}\delta \cdot \cos\varphi}{\cos T} - \sin\varphi},$$

$$= \frac{\operatorname{tg} T}{\frac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\delta \cdot \cos T} - \sin\varphi};$$

setzt man $\operatorname{tg} m = \operatorname{cotg}\delta \cdot \cos T = \frac{\sin m}{\cos m}$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} T}{\frac{\cos\varphi \cdot \cos m - \sin\varphi \cdot \sin m}{\sin m}} = \frac{\operatorname{tg} T \cdot \sin m}{\cos(\varphi + m)} \quad \ldots\ldots \text{(IV.)}.$$

Ein specieller Fall von (IV.) ist es, wenn $T = 90°$; man hat dann nach Napier's Regeln §. 44. der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\varphi = \operatorname{cotg}\delta \cdot \operatorname{cotg} A,$$

also rechne man nach

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\delta} = \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta \quad \ldots\ldots \text{(V.)}.$$

Aus dem sphärischen Dreieck *ZPS* ergiebt sich ferner, wenn man den parallactischen Winkel *ZSP* mit *S* und das Complement der Breite *ZP* mit *b* bezeichnet, nach den Napierschen Gleichungen, §. 39. der sphärischen Trigonometrie

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A - S) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}T \cdot \sin\tfrac{1}{2}(p - b) \cdot \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(p + b) \quad \ldots\ldots \text{(VI.)}.$$

und

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A + S) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}T \cdot \cos\tfrac{1}{2}(p - b) \cdot \sec\tfrac{1}{2}(p + b) \quad \ldots\ldots \text{(VI'.)}.$$

Wenn das Complement der Breite kleiner als die Poldistanz ist, so ist das Azimuth grösser als der parallactische Winkel und umgekehrt. Wenn daher die Poldistanz grösser als das Complement der Breite ist, so ist $\frac{1}{2}(A + S) + \frac{1}{2}(A - S) = A =$ dem Azimuth vom Meridian des oberen Pols gerechnet; ist aber die Poldistanz kleiner als das Complement der Breite, so ist $\frac{1}{2}(A + S) - \frac{1}{2}(A - S) =$ dem Azimuth.

Ein einzelnes Azimuth ist leichter nach (IV.) zu berechnen; wenn man aber so kurz hinter einander Azimuthe beobachtet hat, dass die Declination und Breite bei allen Azimuthen gleich angenommen werden kann, so gewährt die Berechnung des wahren Azimuths nach (VI.) und (VI'.) eine bedeutende Erleichterung. Auf diese Weise sind die wahren Azimuthe der Sonne in §. 31. in den Tafeln für Juni 11. und 12. im Jahre 1844 berechnet.

Aus der Gleichung (I.) ergeben sich nachstehende specielle Fälle.

Wenn die Declination = 0, folglich die Poldistanz = 90°, so ist

$$\cos A = -\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg} h \quad \ldots\ldots \text{(VII.)},$$

und das Azimuth ist grösser als 90°.

Wenn die Breite = 0, so ist

$$\cos A = \frac{\cos p}{\cos h} = \frac{\sin\delta}{\cos h} \quad \ldots\ldots \text{(VIII.)},$$

worin *A* von Norden oder Süden gerechnet wird, je nachdem die Declination Nord oder Süd ist.

Wenn Breite und Declination $= 0$ sind, so ist

$$\cos A = 0 \quad \ldots \ldots \quad \text{(IX.)},$$

und das Azimuth ist dann $= 90°$.

Wenn die Höhe $= 0$, so ist

$$\cos A = \frac{\cos p}{\cos \varphi} = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} = \sin \delta \cdot \sec \varphi \quad \ldots \ldots \quad \text{(X.)}.$$

Wenn Declination, Breite und Höhe $= 0$, so ist

$$\cos A = 0 \quad \ldots \ldots \quad \text{(XI.)},$$

und das Azimuth ist $= 90°$.

Wenn Breite und Höhe beide $= 0$, so ist

$$\cos A = \cos p \quad \ldots \ldots \quad \text{(XII.)},$$

also das Azimuth gleich der Poldistanz oder die Amplitude gleich der Declination.

Vom Einfluss eines kleinen Fehlers in den gegebenen Theilen auf das berechnete wahre Azimuth.

1. Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in der Höhe auf das zu berechnende Azimuth hat, setze man im sphärischen Dreieck *ZSP* (zwischen Pol, Zenith und Gestirn) das Complement der Höhe und den Azimuth-Winkel veränderlich, das Complement der Breite und die Poldistanz constant, so ergiebt sich nach §. 71. der Differential-Gleichung (I.):

$$dA = \frac{dh \cdot \operatorname{cotg} S}{\cos h} \quad \ldots \ldots \quad \text{(c.)},$$

worin S den parallactischen Winkel, dh einen kleinen Fehler in der Höhe und dA den entsprechenden Fehler im Azimuth bezeichnet.

Aus der Formel (c.) folgt, wenn man dh unveränderlich nimmt, dass dA kleiner wird, wenn S sich $90°$ und h sich 0 nähert; also ist dA am kleinsten, wenn $h = 0$ und $S = 90°$, hingegen am grössten, wenn $S = 0$ oder $180°$ und $h = 90°$.

Der parallactische Winkel S ist am nächsten $90°$, wenn sich die Sonne im ersten Vertical, und $= 0$ oder $= 180°$, wenn sich dieselbe im Meridian befindet; folglich ist es in Bezug auf einen Fehler in der Höhe am vortheilhaftesten, eine Azimuth-Beobachtung zu machen, wenn die Sonne im oder so nahe als möglich am ersten Vertical ist; dagegen am unvortheilhaftesten, wenn sich dieselbe im Meridian befindet.

2. Um zu untersuchen, welchen Einfluss ein Fehler in der Breite auf den zu berechnenden Azimuthwinkel hat, nehme man das Complement der Höhe und die Poldistanz constant, die Breite und das Azimuth aber veränderlich an, so ist nach §. 71. der Differential-Gleichung (I.)

$$dA = \frac{d\varphi \cdot \operatorname{cotg} T}{\cos \varphi} \quad \ldots \ldots \quad \text{(d.)},$$

worin $d\varphi$ einen kleinen Fehler in der Breite und T den Stundenwinkel bezeichnet.

Wenn in (d.) $d\varphi$ und φ constant, T aber veränderlich gesetzt wird, so ist $dA = 0$, wenn $T = 90°$, oder am kleinsten, wenn T so nahe als möglich $= 90° = 6^h$ ist; dagegen ist dA am grössten, wenn $T = 0$ oder $180°$, welches der Fall ist, wenn die Sonne sich im Meridian über oder unter dem Pol befindet.

Aus (d.) folgt ferner, dass dA gleichnamig mit $d\varphi$ ist, wenn $T < 90^\circ$ ist.

Auch hat ein gleicher Fehler in der Breite weniger Einfluss auf das Azimuth in niederen als in höheren Breiten.

3. Um den Einfluss eines kleinen Fehlers in der Declination auf das berechnete Azimuth zu ermitteln, setze man Declination und Azimuth veränderlich, nehme aber Breite und Höhe constant an, so ergiebt sich nach §. 71. der Differential-Gleichung (III.)

$$dA = \frac{dp}{\cos h \cdot \sin S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(e.)},$$

oder

$$dA = \frac{dp}{\cos \varphi \cdot \sin T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(f.)},$$

worin dp den Fehler in der Poldistanz (gleich dem Fehler in der Declination) bezeichnet.

Aus (e.) folgt, wenn dp unveränderlich genommen wird, dass dA am kleinsten ist, wenn $h = 0$ und $S = 90^\circ$, in welchem Falle $dA = dp$; hingegen ist dA am grössten, wenn $h = 90^\circ$ und $S = 0$ oder $= 180^\circ$.

Aus (f.) ergiebt sich aber, wenn man dp unveränderlich annimmt, dass dA am kleinsten oder $= dp$, wenn $\varphi = 0$ und $T = 90^\circ = 6^h$ ist; hingegen dA am grössten, wenn $\varphi = 90^\circ$ und $T = 0$ oder $= 180^\circ$ ist.

Aus (e.) und (f.) folgt ferner, dass dA stets gleichartig mit dp ist. Aus den Formeln (c.), (d.), (e.) und (f.) ergiebt sich, dass die ungünstigsten Umstände, das wahre Azimuth zu berechnen, zusammentreffen, wenn die Sonne sich im Meridian befindet, weil dann die Höhe am grössten ist und die Winkel S und $T = 0$ sind.

Die günstigsten Umstände treffen dagegen zusammen, wenn die Winkel S und $T = 90^\circ$ sind, welches nur stattfinden kann, wenn die Declination $= 0$ und die Sonne sich im Horizonte befindet. In allen übrigen Fällen trifft die günstigste Zeit zur Berechnung des wahren Azimuths in Hinsicht eines Fehlers in der Höhe und Breite nicht zusammen. Man kann aber in den meisten Fällen den Fehler der Breite den der Höhe übersteigend annehmen, und weil ausserdem die Höhe der Sonne über dem Horizonte im Sechsstundenkreise stets kleiner, als im ersten Vertical, oder wenn der parallactisehe Winkel am grössten ist, sein muss, so kann man annehmen, dass die günstigte Zeit zur Berechnung des wahren Azimuths statthat, wenn die Sonne sich nahe am oder im Sechsstundenkreise befindet.

4. Um zu ermitteln, welchen Einfluss ein Fehler im Stundenwinkel auf das zu berechnende Azimuth hat, wenn man den Stundenwinkel als bekannt voraussetzt, ergiebt sich nach der Differential-Gleichung (IV.) im §. 71.

$$dh = -dT \cdot \sin p \cdot \sin \angle S,$$

und wenn man diesen Werth für dh in (c.) setzt, so ergiebt sich:

$$d'A = -dT \cdot \frac{\cos S \cdot \sin p}{\cos h} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(g.)},$$

woraus folgt, dass ein kleiner Fehler im Stundenwinkel keinen Einfluss auf den zu berechnenden Azimuthwinkel hat, wenn der parallactische Winkel $S = 90^\circ$ ist.

Es ist also auch bezüglich eines kleinen Fehlers im Stundenwinkel die günstigste Zeit zur Berechnung des wahren Azimuths, wenn der parallactische Winkel so nahe als möglich 90°, wogegen der ungünstigste Augenblick der ist, wenn $\angle S = 0$ oder $= 180°$, welches statthat, wenn die Sonne sich im Meridian befindet.

Um die Fehler mit einander zu vergleichen, welche dh und dT auf den Azimuthwinkel machen, setze man $dh = dT$ und dividire mit (c.) in (g.), so ergiebt sich:

$$\frac{d'A}{dA} = -\sin S \cdot \sin p,$$

oder weil $\sin S = \frac{\cos \varphi \cdot \sin A}{\sin p}$, so ist

$$\frac{d'A}{dA} = -\cos \varphi \cdot \sin A,$$

mithin ist

$$d'A = -dA \cdot \cos \varphi \cdot \sin A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(h.)}.$$

Hieraus folgt, weil $\cos \varphi \cdot \sin A$ nur $= 1$, wenn die Breite des Ortes und die Declination des Gestirns $= 0$, in allen übrigen Fällen aber kleiner als 1 sein muss, dass im ersten Falle $d'A = dA$, in allen übrigen Fällen aber $d'A < dA$. Es ist also der Einfluss eines Fehlers im Stundenwinkel auf das berechnete wahre Azimuth ebenso gross, als der Einfluss eines, mit dem Fehler des Stundenwinkels gleich grossen Fehlers der Höhe, wenn die Breite des Ortes $= 0$ und die Declination der Sonne $= 0$; in allen übrigen Fällen aber hat ein Fehler in der Zeit einen kleineren Einfluss auf das wahre Azimuth, als ein gleich grosser Fehler in der Höhe. Der Unterschied beider Fehler $d'A$ und dA wird nämlich grösser, wenn die Breite wächst und das Azimuth kleiner wird.

Wenn man daher die Zeit durch nahe am ersten Vertical gemessene Höhen bestimmt hat, und man eine Azimuthbeobachtung nahe am Meridian macht, so ist es vortheilhafter, die Höhe nicht zu messen, sondern das wahre Azimuth mit Hülfe des bekannten Stundenwinkels nach (IV.), oder (VI.) und (VI'.) zu berechnen.

Es ist aber bei einer anzustellenden Azimuthbeobachtung nicht allein auf die vortheilhaftesten Umstände zur Bestimmung des wahren Azimuths, sondern hauptsächlich darauf zu sehen, dass man das Azimuth mit dem Compasse so genau als möglich bestimmen kann, denn in letzterem wird der grösste Fehler stecken.

Am bequemsten ist es, das Azimuth der Sonne durch Peilung zu finden, wenn die Höhe derselben klein ist; auch hat, wenn die Fäden beider Diopter oder der Faden in dem einen und die Sehspalte in dem andern Diopter nicht lothrecht stehen, dieser Fehler in der Stellung der Diopter einen geringeren Einfluss auf das Compass-Azimuth, wenn die Höhe der Sonne klein, als wenn dieselbe gross ist.

A. Regel.

Die Missweisung des Compasses durch Azimuthbeobachtung der Sonne zu finden, wenn die Höhe derselben gleichzeitig mit ihrem Azimuth beobachtet wurde, die Breite und Länge des Ortes bekannt ist und man die Zeit der Beobachtung ungefähr kennt.

1. Wenn die Sonne niedrig steht, beobachte eine Höhe derselben und notire die Zeit der Beobachtungsuhr; dann beobachte so viele Azimuthe mit dem, vorher schon aufgestellten Azimuth-Compasse, als in 3 bis 5 Minuten zu erhalten sind, nimm wieder eine Höhe und notire die Zeit der Uhr.

2. Nimm das arithmethische Mittel aus beiden Uhrzeiten, den Sonnenhöhen und Azimuthen, und betrachte diese Mittel so, als wenn sie gleichzeitig beobachtet wären.

3. Finde die Breite für den Augenblick der Beobachtung und reducire die Declination für denselben Augenblick (§. 103.). Wenn Breite und Declination gleichnamig, so ist 90° — Declination, wenn aber ungleichnamig, 90° + Declination die Poldistanz, die ebenfalls gefunden werden muss.

4. Aus dem Mittel der gemessenen Höhen finde die wahre Mittelpunktshöhe (§. 119.).

5. Schreibe die Poldistanz, Breite und wahre Höhe untereinander, nimm davon die halbe Summe und die Differenz zwischen der halben Summe und der Poldistanz.

6. Schreibe ferner log sec Breite, log sec Höhe, log cos halbe Summe und log cos Differenz unter einander, addire diese 4 Logarithmen und dividire die Summe mit 2, so ist der Quotient der Logarithme Cosinus des halben wahren Azimuths (II.) vom Meridian des oberen Pols, also auf NBr. von Nord und auf SBr. von Süd gerechnet.

7. Das halbe wahre Azimuth mit 2 multiplicirt giebt das wahre Azimuth, welches vom Meridian des oberen Pols nach Ost oder West gerechnet wird, je nachdem die Höhen wachsen oder abnehmen.

8. Aus dem beobachteten Azimuth und dem berechneten wahren Azimuth, welche beide von Nord oder beide von Süd ausgedrückt werden müssen, findet man die Missweisung nach der Regel, die unter 6. §. 195. gegeben ist.

Auch die im vorigen Paragraphen hinter der Regel stehende Anmerkung findet bei Azimuthbeobachtungen Anwendung.

Beispiel 1. 1852 den 30. August nach dem Besteck auf 35° 8′ NBr. und 20° 0′ OL. von Greenwich, Augeshöhe 15′ Rheinl., ist nachstehende Beobachtung gemacht, woraus die Missweisung des Peil-Compasses, des Steuer-Compasses und die Missweisung des Ortes, d. i. die eines Compasses, der keine Localdeviation (örtliche Ablenkung) hat, gefunden werden soll.

Die Deviation des Steuer-Compasses ist nach der Deviations-Tafel = 4° 30′ östlich.

Uhrcorrection geg. mittl. Zeit + 48′ und I. C. — 20′.

$5^h\ 19'$ ⨀ $14^\circ\ 28'$	⏀ N. $74\frac{1}{2}^\circ$ W.	
	$74\frac{1}{2}$	
	75	
	75	
	75	
	$74\frac{3}{4}$	
	75	
$5^h\ 21'$ ⨀ $14^\circ\ 5'$	75	
$5^h\ 20'$ ⨀ $14^\circ\ 16',5$	⏀ N. $74^\circ\ 51'$ W.	
I. C. = —	$20'$	
Kimmt. = —	$3',9$	
	$13^\circ\ 52',6$	
⨀ Halbm. . = +	$15',8$	
	$14^\circ\ 8',4$	
Ref. — Par. = —	$3',6$	
⊖ w. Höhe =	$14^\circ\ 4',8$.	

Das Schiff lag an nach dem

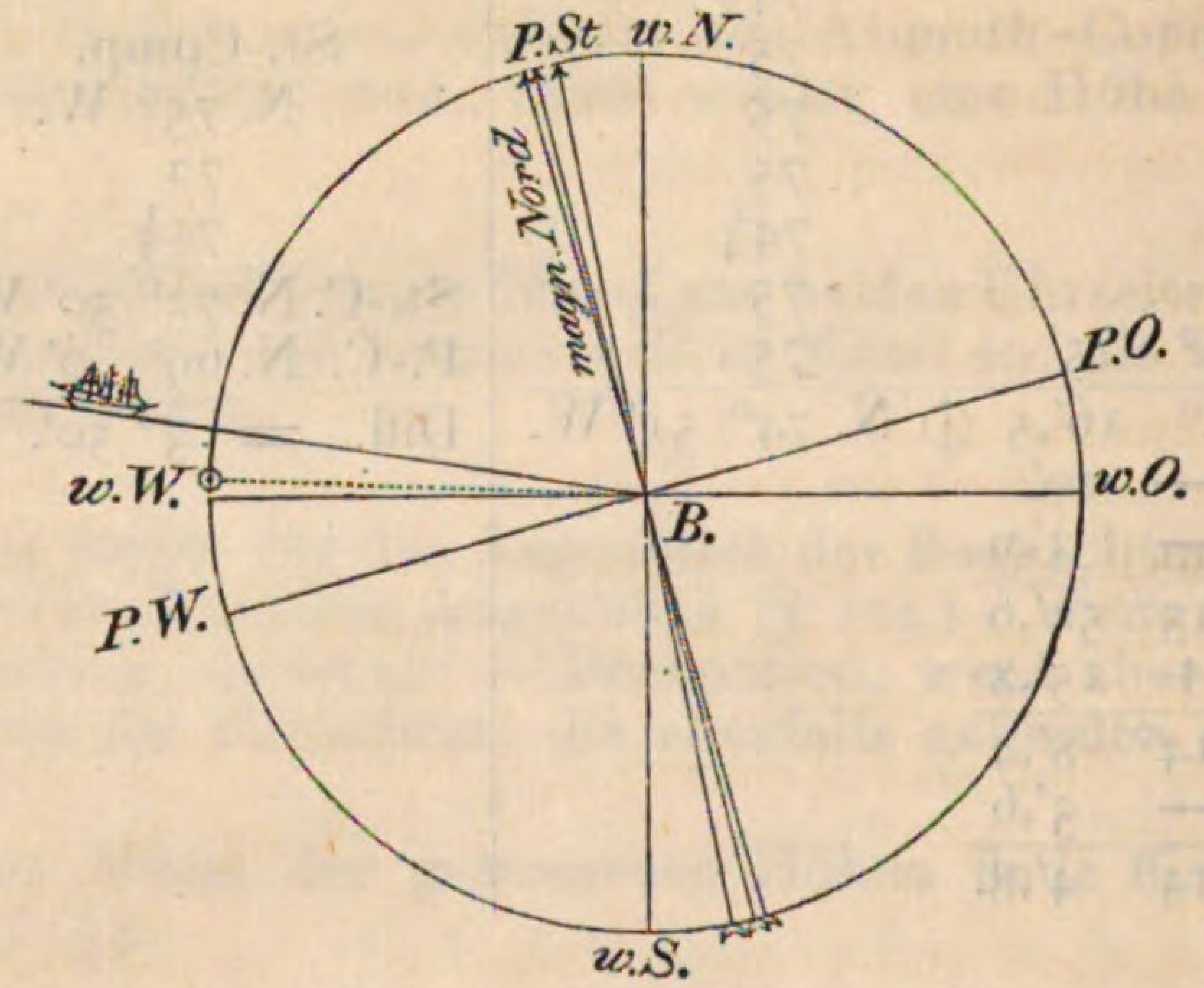
	St.-Comp.	P.-Comp.
	N. 75° W.	N. $70\frac{1}{2}^\circ$ W.
	72	$68\frac{1}{2}$
	$71\frac{1}{2}$	68
St.-C.	N. $72^\circ\ 50'$ W.	N. 69° W.
P.-C.	N. $69^\circ\ 0'$ W.	
Diff.	= $3^\circ\ 50'$.	

Mittel der Uhrzeiten . . .	=	$5^h\ 20'$ Abends,
ungefähre U. C.	= +	$48'$
OL. in Zeit	= —	$1^h\ 20'$
ungef. mittl. Greenw. Zeit	=	$4^h\ 48'$ Abends den 30. Aug.
N. Jb. d. 30. Aug. ⨀ Decl.	=	$8^\circ\ 52'\ 18''$ N.
stündl. Diff. = — $54'',5$		
4.8^h		
$261'',6$. .	—	$4'\ 22''$
⨀ Declin.	=	$8^\circ\ 47'\ 56''$ N.
⨀ Halbmesser	=	$15'\ 52''$
Contraction	= —	$4''$
⨀ scheinb. Halbmesser . .	=	$15'\ 48''$.

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \cos (S - p)}{\cos \varphi \cdot \cos h}}$$

p P. Dist.	$= 81^\circ\ 12'$		
φ NBr.	$= 35^\circ\ 8'$	log sec	= 0,08735
h ⊖ w. H.	$= 14^\circ\ 5'$	log sec	= 0,01325
S $\frac{1}{2}$ Summe	$= 65^\circ\ 12',5$	log cos	= 9,62254
$S - p$. Diff.	$= 15^\circ\ 59',5$	log cos	= 9,98286
			19,70600
		log cos $\frac{1}{2}$ Az.	= 9,85300
		$\frac{1}{2}$ Az.	= $44^\circ\ 31',5$

wahres Azim.	=	N. $89^\circ\ 3'$ West,
Peil-Comp.-Azim.	=	N. $74^\circ\ 51'$ West,
Missweisung d. Peil-Comp. . .	=	$14^\circ\ 12'$ West.
Peil-Comp. Azim.	=	N. $74^\circ\ 51'$ West,
Diff. der Compasse	=	$3^\circ\ 50'$
Steuer-Comp.-Azim.	=	N. $78^\circ\ 41'$ West,
wahres Azim.	=	N. $89^\circ\ 3'$ West,
Missweisung d. Steuer-Comp. .	=	$10^\circ\ 22'$ West,
Localdeviat. d. Steuer-Comp. .	=	$4^\circ\ 30'$ östl.,
Missweisung eines Comp. ohne Deviat.	=	$14^\circ\ 52'$ West.



Beispiel 2. 1853 den 8. März nach dem Besteck auf 12° 36′ SBr. und 155° 30′ OL. von Greenwich; Augeshöhe 16′ Rheinl.; I. C. + 9′,5, ungef. Stand der Beobachtungsuhr + 12′ gegen wahre Zeit. Mittel aus den Beobachtungen: 6^h 24′ Ab. ⊙ 9° 46′ ⌽ S. 79° 15′ West.

Das Schiff lag an nach dem Steuer-Compasse N. 50° 18′ West, nach dem Peil-Compasse N. 48° 24′ West; Deviation des Steuer-Compasses nach der Deviations-Tafel = 2° 26′ östlich. Was ist die Missweisung des Peil-Compasses, des Steuer-Compasses und die eines Compasses ohne Localdeviation?

6^h 24′ ⊙ 9° 46′ ⌽ S. 79° 15′ West.

U. C. geg. w. Zt. = + 12′ I. C. = + 9′,5

ungef. wahr. Zt. = 6^h 36′ 9° 55′,5

Kimmt. = — 4′,0

9° 51′,5

⊙ Halbm. . . . = + 16′,0

10° 7′,5

Refr. — Parall. = — 5′,0

⊖ wahre Höhe = 10° 2′,5.

Ungefähre wahre Zeit = 6^h 36′ Abends,

OL. in Zeit = 10^h 22′

d. 7. März u. w. Greenw. Zeit. = 20^h 14′ Abends,

oder 3^h 46′ vor dem wahren Greenw. Mittage den 8. März.

N. A. d. 8. März ⊙ Decl. = 4° 47′ 43″ S.

stündl. Differ. = + 58″,5

$3{,}8^h$

222″,3 + 3′ 42″

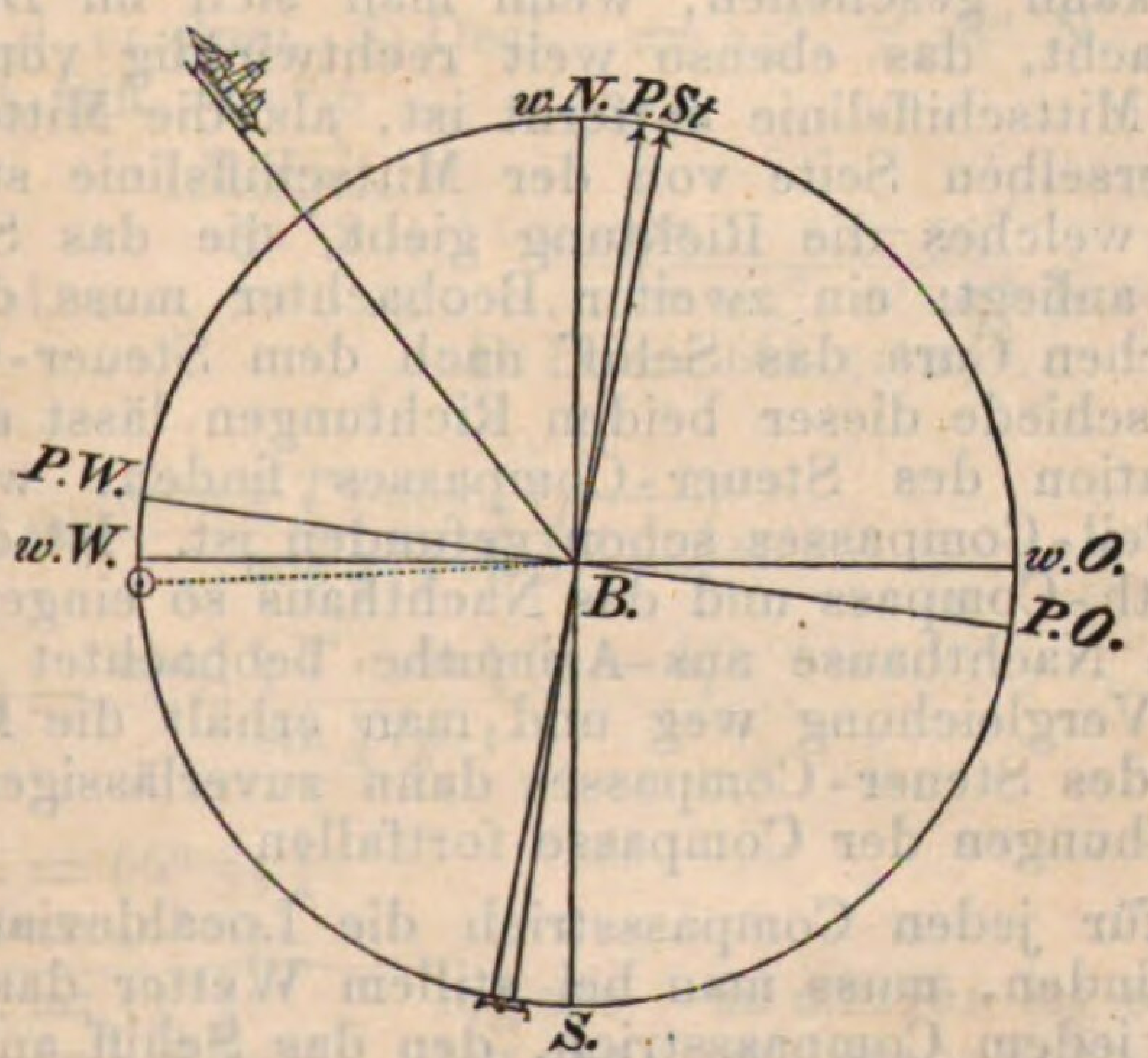
⊙ Declination = 4° 51′ 25″ S.

⊙ Halbmesser = 16′ 8″

Contraction = — 8″

⊙ scheinb. Halbmesser = 16′ 0″.

P. Dist.	= 85° 8',5		
SBr.	= 12° 36'	log sec	= 0,01059
⊖ w. Höhe	= 10° 2',5	log sec	= 0,00670
½ Summe	= 53° 53',5	log cos	= 9,77035
P. D. — ½ Summe	= 31° 15'	log cos	= 9,93192
			19,71956
log cos ½ Azimuth			= 9,85978
½ Azimuth			= 43° 36',5
Wahres Azimuth			= S. 87° 13' West,
Peil-Compass-Azimuth			= S. 79° 15' West,
Missweis. des Peil-Compasses .			= 7° 58' Ost.
Peil-Compass-Azimuth			= S. 79° 15' West,
Diff. der Compasse			= 1° 54'
Steuer-Compass-Azimuth . . .			= S. 77° 21' West,
Wahres Azimuth			= S. 87° 13' West,
Missweis. des Steuer-Comp. . .			= 9° 52' Ost,
Localdeviat. des Steuer-Comp.			= 2° 26' östl.,
Missweis. eines Comp. ohne Deviation			= 7° 26' Ost.



B. Regel.

Die Missweisung des Compasses durch Azimuthbeobachtung der Sonne und Berechnung derselben zu finden, wenn die Breite des Ortes und die Zeit der Beobachtung bekannt ist, sowie auch die Localdeviation des Peil- oder Steuer-Compasses zu ermitteln, wenn man die Missweisung eines Compasses, der keine Localdeviation hat, kennt; oder wenn dieses nicht der Fall sein sollte, auch diese nach der Beobachtung zu bestimmen.

1. Wenn die Sonne niedrig steht, jedoch so weit wie möglich vom Meridian entfernt, beobachte so viele Azimuthe derselben mit dem Compasse, als sich in 3 bis 5 Minuten nehmen lassen und notire die entsprechenden Zeiten der Beobachtungsuhr.

2. Nimm das arithmetische Mittel aus den beobachteten Azimuthen, wie auch aus den notirten Zeiten, und betrachte diese Mittel so, als wenn sie gleichzeitig beobachtet wären.

3. Für die Zeit der Beobachtung finde nach §. 103. die Declination und nach §. 134. den Stundenwinkel der Sonne.

4. Berechne das wahre Azimuth nach Formel (IV.) oder nach den Formeln (VI.) und (VI'.) dieses Paragraphen. Nach den letzten beiden Formeln muss man auch die Poldistanz kennen, welche = 90° + der Declination ist, wenn Breite und Declination ungleichnamig sind; hingegen ist dieselbe = 90° — der Declination bei gleichnamiger Breite und Declination.

5. Wenn das wahre und Compass-Azimuth bekannt ist, so findet man die Missweisung nach der in §. 195. unter 6. gegebenen Regel.

6. Wenn die so gefundene Missweisung mit der Missweisung eines Compasses, der keine Localdeviation hat, nicht differirt, so ist bei dem Curse, welchen das Schiff während der Missweisungs-Beobachtung angelegen hat, die Localdeviation des Peil-Compasses = 0.

Um ermitteln zu können, wie gross die Localdeviation des Steuer-Compasses ist bei dem Curse, welchen das Schiff während der Beobachtung nach dem Steuer-Compasse angelegen hat, muss während, oder kurz vor oder nach der Beobachtung, der Peil-Compass an der Beobachtungsstelle mit dem Steuer-Compasse im Nachthause verglichen werden. Dies kann geschehen, wenn man sich im Buge des Schiffes ein Zeichen macht, das ebenso weit rechtwinklig von der Mitte des Stevens bezw. Mittschiffslinie entfernt ist, als die Mitte des Peil-Compasses nach derselben Seite von der Mittschiffslinie steht, und dieses Zeichen peilt, welches die Richtung giebt, die das Schiff nach dem Peil-Compasse anliegt; ein zweiter Beobachter muss dann gleichzeitig bemerken, welchen Curs das Schiff nach dem Steuer-Compasse anlag. Aus dem Unterschiede dieser beiden Richtungen lässt sich Missweisung und Localdeviation des Steuer-Compasses finden, wenn die Localdeviation des Peil-Compasses schon gefunden ist. Ist der Steuer-Compass ein Azimuth-Compass und das Nachthaus so eingerichtet, dass mit demselben vom Nachthause aus Azimuthe beobachtet werden können, so fällt obige Vergleichung weg und man erhält die Missweisung und Localdeviation des Steuer-Compasses dann zuverlässiger, da die Fehler in den Vergleichungen der Compasse fortfallen.

Um aber für jeden Compassstrich die Localdeviation des Steuer-Compasses zu finden, muss man bei stillem Wetter das Schiff umgehen lassen und bei jedem Compassstrich, den das Schiff anliegt, eine Missweisungs-Beobachtung machen und nach jeder die Localdeviation des Steuer-Compasses ermitteln. Die diesemnach für jeden Compassstrich gefundene Localdeviation des Steuer-Compasses wird in eine Tafel gebracht (Localdeviations-Tafel genannt), deren Argument der Curs des Schiffes nach dem Steuer-Compasse ist.

Hat man diesemnach z. B. 32 Mal, und zwar jedesmal, wenn das Schiff beim Schwajen einen vollen Compassstrich angelegen hat, die Missweisung des Peil- oder Steuer-Compasses durch Beobachtung und Rechnung gefunden, so wird das arithmetische Mittel aller dieser Missweisungen, wenn dieselben nicht sehr differiren, nahe gleich der Missweisung eines Compasses, der nicht mit Localattraction (örtlicher Anziehung) behaftet ist, angenommen werden können. Man hat hierdurch also ein Mittel, mittelst eines Compasses, der mit Deviation behaftet ist, die Missweisung am Orte zu erhalten.

Wenn z. B. die Compass-Missweisung = 15° West und die Orts-Missweisung = 12° West, so ist die Localdeviation = 3° West.

Beispiel. 1852 den 11. Juni auf 49° 53′ NBr. und 2° 27′¾ WL. von Greenw.; Uhrcorr. — 1^h 4′ 53″ gegen wahre Schiffszeit, Missweisung eines Compasses, der keine Localdeviation hat = 25° 30′ West; man soll aus nachstehenden Azimuthen, welche von dem Nachthause aus mit dem Steuer-Compasse welcher ein Azimuth-Compass war, beobachtet sind, die Missweisung und Localdeviation des Steuer-Compasses finden.

Morgens 7^h 22′ 58″ ⦶ N. 100° Ost, das Schiff lag an S. 19° ½ Ost,
23′ 17″ » 102 » » » » » » 25 »

7^h 23′ 8″ ⦶ N. 101° Ost, » » » S. 22° 15′ O.

U. C. — 1^h 4′ 53″

wahre Schiffszeit = 6^h 18′ 15″
12^h

Stundenwinkel T = 5^h 41′ 45″.

Wahre Schiffszeit = 6^h 18′ Morgs.
WL. in Zeit = + 10′
ungef. wahre Greenw. Zeit = 6^h 28′ Morgs.
oder 5^h 32′ v. d. wahr. Greenw. Mittage den 11. Juni.

N. A. d. 11. Juni, ⊙ Decl. . = 23° 7′ 36″ N.
stündl. Diff. = 9″,6
$5{,}5^h$
52″,8 = — 53″
⊙ Decl. = 23° 6′ 43″ N.
P. D. = 66° 53′ 17″.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+S) = \frac{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} T \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p-b)}{\cos \tfrac{1}{2}(p+b)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-S) = \frac{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} T \cdot \sin \tfrac{1}{2}(p-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(p+b)}.$$

P. D.	= 66° 53′¼				
Compl. Breite . .	= 40° 7′				
½ Summe	= 53° 30′	log sec	= 0,22561	log cosec	= 0,09482
P. D. — ½ Summe	= 13° 23′¼	log cos	= 9,98803	log sin	= 9,36462
			0,21364		9,45944
½ T	= 2^h 50′ 52″	log cotg	= 0,03465	log cotg	= 0,03465
½ $(A+S)$	= 60° 33′	log tang	= 0,24829		
½ $(A-S)$	= 17° 19′ . . .			log tang	= 9,49409

wahr. Azimuth = N. 77° 52′ Ost,
Azimuth des
Steuer-Comp. = N. 101° 0′ Ost,
Missw. d. St.-C. = 23° 8′ West,
Missweisung . . = 25° 30′ West (Missweisung ohne Deviation),
Localdeviation . = 2° 22′ Ost d. St.-Comp. bei SSO-Curs.

Morgens 7^h 23′ 29″ ⌽ N. 103° Ost, das Schiff lag an S. 30° Ost,
23′ 46″ » 103½ » » » » » » 35 »
23′ 59″ » 103¾ » » » » » » 38 »
7^h 23′ 45″ ⌽ N. 103° 25′ O. » » » » S. 34° 20′ O.

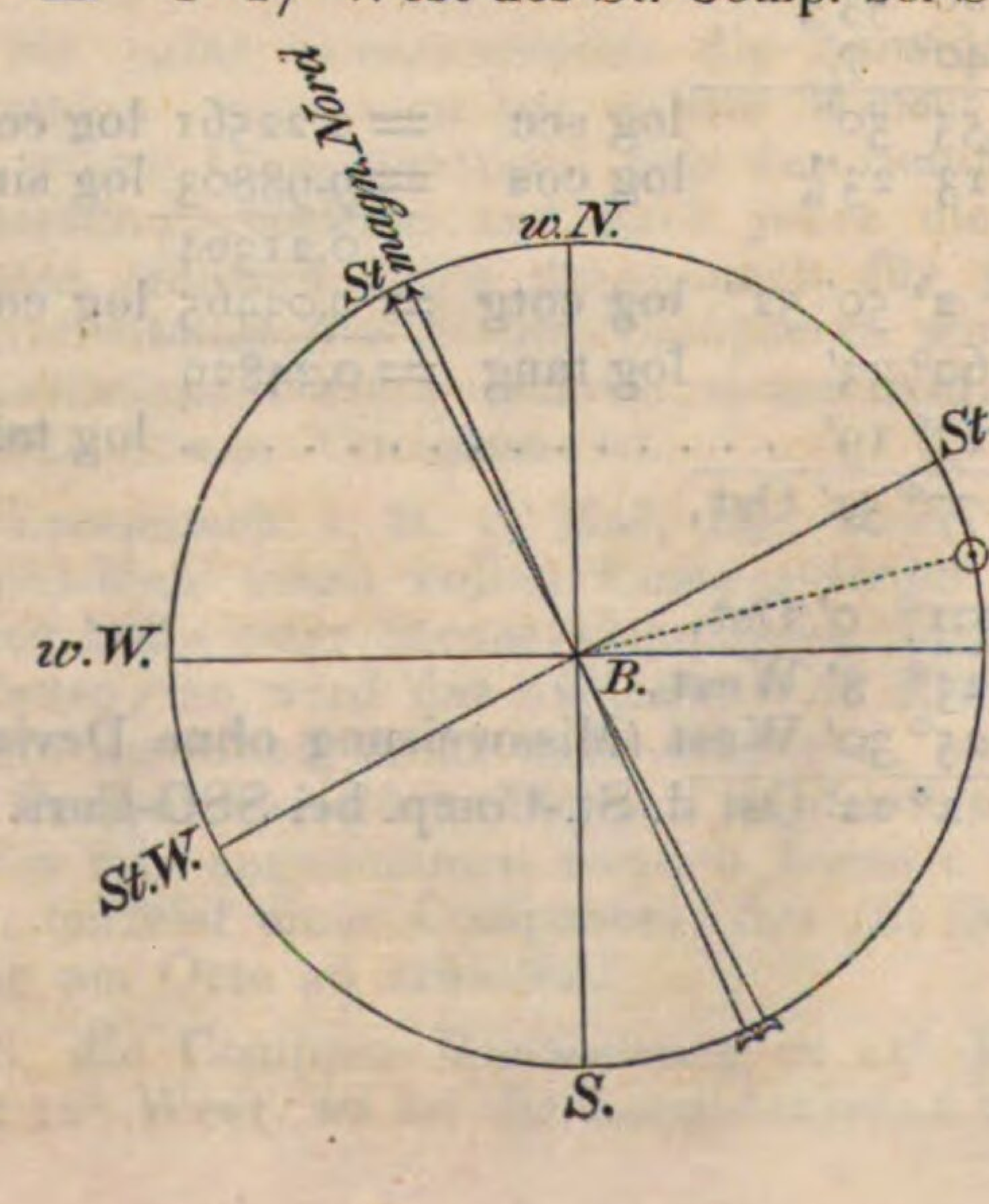
U. C. — 1^h 4′ 53″
wahre Schiffszeit = 6^h 18′ 52″
Stundenwink. T = 5^h 41′ 8″
½ T = 2^h 50′ 34″ log cotg = 0,03579 log cotg = 0,03579
log wie vor = 0,21364 log wie vor = 9,45944
60° 37′ log tang = 0,24943
17° 22′ log tang = 9,49523

wahr. Azimuth = N. 77° 59′ Ost,
Steuer-Cp.-Az. = N. 103° 25′ Ost,
Missw. d. St.-C. = 25° 26′ West,
25° 30′ West, (Missweisung ohne Deviation),
Localdeviation . = 0° 4′ Ost des St.-Comp. bei SOzS-Curs.

Morgens 7^h 24′ 9″ ⌽ N. 104° Ost, das Schiff lag an S. 42° Ost,
24′ 16″ » 104¾ » » » » » » 43 »
24′ 41″ » 105½ » » » » » » 49 »
24′ 50″ » 106 » » » » » » 48 »
7^h 24′ 29″ ⌽ N. 105° 4′ O. » » » » S. 45° 30′ O.

U. C. — 1^h 4′ 53″
wahre Schiffszeit = 6^h 19′ 36″
Stundenwinkel T = 5^h 40′ 24″
½ T = 2^h 50′ 12″ log cotg = 0,03719 log cotg = 0,03719
log wie vor = 0,21364 log wie vor = 9,45944
60° 42′ log tang = 0,25083
17° 25′ log tang = 9,49663

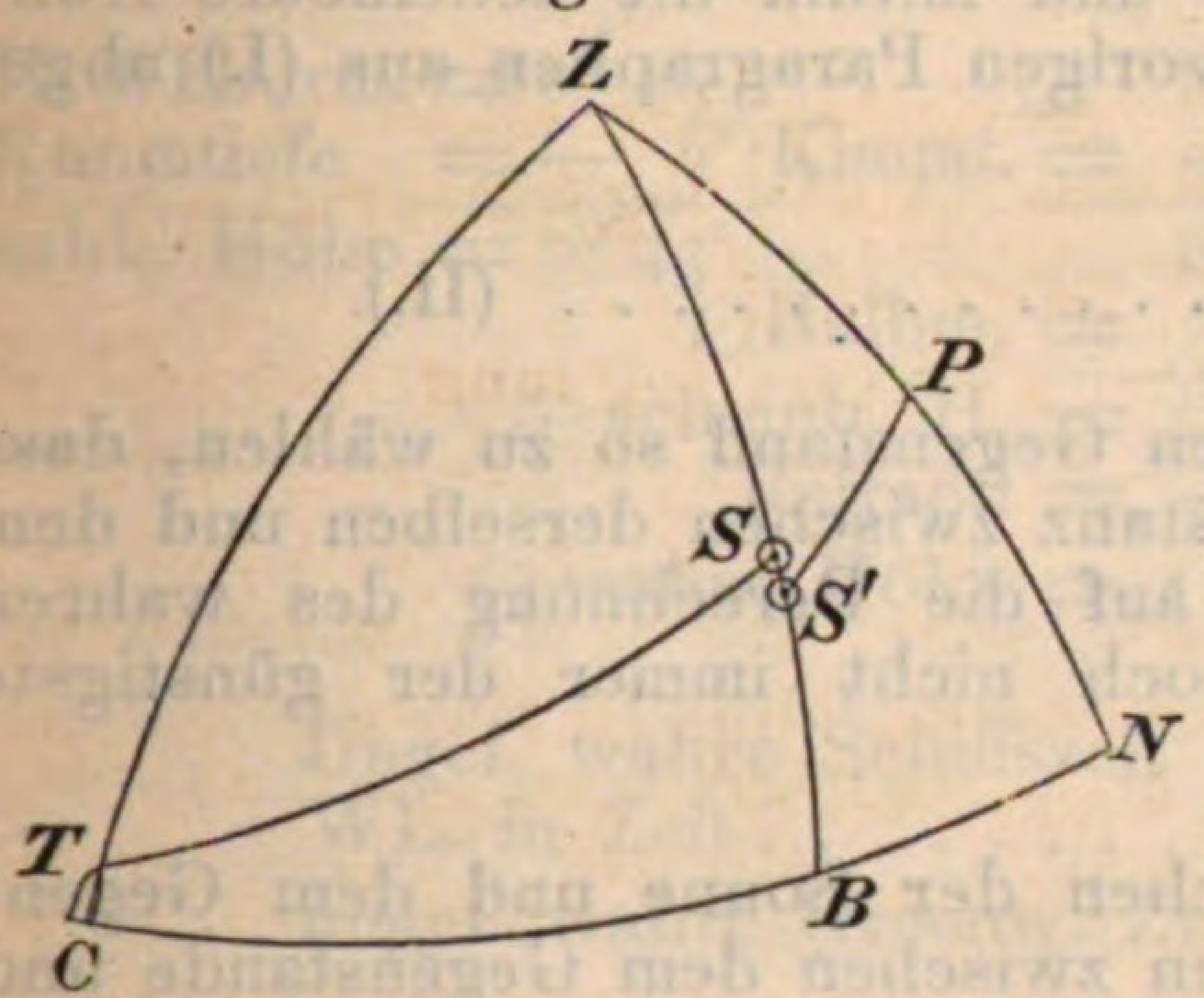
wahr. Azimuth = N. 78° 7′ Ost,
Steuer-Cp.-Az. = N. 105° 4′ Ost,
Missw. d. St.-C. = 26° 57′ West,
Missweisung . . = 25° 30′ West (ohne Deviation),
Localdeviation = 1° 27′ West des St.-Comp. bei SO-Curs.



§. 197.

Das wahre Azimuth terrestrischer (irdischer) Gegenstände zu finden, wenn die Breite des Ortes und die ungefähre Zeit bekannt ist.

Fig. 101.



Es sei in Fig. 101. Z das Zenith, P der obere Pol, also ZN der Meridian des Beobachtungsortes, CN ein Bogen des Horizontes, ZB ein Vertical durch den Mittelpunkt der Sonne und ZC ein Vertical durch die Thurmspitze T; so ist das Azimuth der Sonne = Winkel $S'ZN$ und das Azimuth der Thurmspitze = Winkel TZN = dem Azimuth der Sonne + $\angle\, TZS$.

Wenn aber die Thurmspitze zwischen dem Meridian und Vertical der Sonne läge und ebenfalls mit T bezeichnet wäre, so würde das Azimuth von T = dem Azimuth der Sonne — $\angle\, TZS$ sein.

Wenn endlich die Sonne auf der einen und der Thurm auf der anderen Seite des Meridians liegt, so ist das Azimuth der Thurmspitze, wenn dieselbe wieder mit T benannt wird, gleich Winkel SZT, der von den Verticalen durch die Sonne und Thurmspitze gebildet wird, minus dem Azimuth der Sonne.

Um diese Winkel zu bestimmen, messe man die Höhe der Sonne und gleichzeitig die Distanz zwischen derselben und der Thurmspitze, wie auch die Höhe der letzteren.

Will ein Beobachter alles allein messen, so kann derselbe zuerst oder zuletzt die Höhe des irdischen Gegenstandes, dann die Höhe der Sonne, darauf einige Distanzen (Winkel) zwischen der Sonne und dem Gegenstande, dann wieder eine Sonnenhöhe messen und die Zeiten der Uhr bei jeder Sonnenhöhe notiren. Die arithmetischen Mittel aus den Höhen des Gegenstandes, aus den Zeiten, aus den Sonnenhöhen und aus den Distanzen werden dann angesehen, als wenn dieselben gleichzeitig beobachtet wären. (Genauer ist es, wenn man die Uhrzeiten auch bei den Distanzen notirt, aus diesen dann das Mittel nimmt und die Sonnenhöhe auf dieses Mittel reducirt.) Die gemessene Distanz wird durch Anwendung der etwaigen Indexcorrection und des Halbmessers der Sonne (derselbe ist mit + anzuwenden, wenn der nächste Rand, mit —, wenn der entfernte Rand gemessen ist) zur scheinbaren Distanz reducirt, und aus der gemessenen Höhe des Sonnenrandes wird nach §. 119. die scheinbare Höhe des Mittelpunktes und die wahre Höhe des Mittelpunktes gefunden; aus der gemessenen Höhe des irdischen Gegenstandes aber wird, durch Anwendung der Indexcorrection und der Kimmtiefe mit Rücksicht auf die Entfernung des Gegenstandes, die scheinbare Höhe gefunden.

Das wahre Azimuth der Sonne wird nach der im vorigen Paragraphen unter A. gegebenen Regel berechnet.

Bezeichnet man die scheinbare Höhe des Mittelpunktes der Sonne mit h, die scheinbare Höhe des Gegenstandes mit h', die scheinbare Distanz zwischen dem Gegenstande und Mittelpunkte der Sonne mit d, $\frac{h + h' + d}{2}$ mit S und den Winkel zwischen dem Vertical der Sonne und

dem des Gegenstandes mit D, so ist nach §. 36. der sphärischen Trigonometrie

$$\cos \tfrac{1}{2} D = \sqrt{\frac{\cos S \cdot \cos (S - d)}{\cos h \cdot \cos h'}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)}.$$

Wenn der Gegenstand im scheinbaren Horizonte, also die gemessene Höhe desselben gleich der Kimmtiefe und mithin die scheinbare Höhe = 0 ist, so ergiebt sich aus dem im vorigen Paragraphen aus (I.) abgeleiteten vierten speciellen Fall

$$\cos D = \frac{\cos d}{\cos h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.)}.$$

Es ist am besten, die Zeit und den Gegenstand so zu wählen, dass die Höhe der Sonne klein und die Distanz zwischen derselben und dem Gegenstand nahe 90° ist; in Bezug auf die Berechnung des wahren Azimuths der Sonne ist dieses jedoch nicht immer der günstigste Augenblick.

Werden, wenn die Distanz zwischen der Sonne und dem Gegenstande gemessen ist, zugleich Distanzen zwischen dem Gegenstande und mehreren anderen Gegenständen gemessen, so ergeben sich auch aus der Beobachtung die wahren Azimuthe aller dieser Gegenstände, und zwar, wenn die Höhen derselben nur unbedeutend sind, durch Addition oder Subtraction der gemessenen, für etwaige Indexcorrection berichtigten beziehlichen Winkeldistanzen zum berechneten wahren Azimuth des ersten Gegenstandes. Sind die Höhen der irdischen Gegenstände aber nicht unbedeutend, so müssen dieselben gemessen und der Winkel, den der Vertical eines jeden Gegenstandes mit dem Vertical des ersten Gegenstandes (des Gegenstandes, von welchem die Distanz der Sonne gemessen ist) macht, nach Gleichung (I.) berechnet werden.

Wird der Gegenstand, von welchem das wahre Azimuth berechnet werden soll, auch gepeilt, so ergiebt sich aus der Vergleichung des wahren und Compass-Azimuths desselben auch die Missweisung des Compasses, und wenn man die von Localdeviation befreite Missweisung des Compasses kennt, so kann man die Localdeviation desselben Compasses finden. Wenn Faden und Sehspalte der Diopter nicht lothrecht stehen, gewährt diese Missweisungs-Bestimmung ein genaueres Resultat, als die Peilung der höher stehenden Sonne.

Ist der Gegenstand, von welchem man das wahre Azimuth berechnet hat, so weit entfernt, dass dieses nicht verändert wird, wenn man das vor Anker liegende Schiff, an dessen Bord die Beobachtung gemacht wird, schwajet, oder wenn man bei Windstille auf See das Schiff herumbugsirt; so lässt sich die Deviation des Compasses, für jeden Compassstrich, den das Schiff anliegt, ermitteln, wenn man jedesmal den vollen Strich, welchen das Schiff anliegt, notirt, und daneben die gleichzeitig gemachte Peilung des Gegenstandes.

Differiren diese Peilungen etwa 1 bis 2 Strich, so ist das Mittel aus allen nahe die magnetische Peilung und mit dieser jede Peilung verglichen, giebt die Localdeviation des Compasses für die entsprechenden Curse; ist jene grösser, so muss der Compass an Bord so weit erhöht werden, dass er die Peilungen desselben Gegenstandes bei Cursen, die 8 Strich differiren, gleich giebt, in welchem Falle diese Peilung als die magnetische anzusehen und wie vorhin angegeben, die Compassablenkung bei jenen Peilungen zu ermitteln ist.

Beispiel. 1853 den 7. Mai auf 57° 45′ NBr. und 2° WL. v. Greenw., um 5^h 10′ wahre Zeit Morgens, ist nachstehende Beobachtung gemacht, bei der die Indexcorr. für alle gemessenen Winkel = 0, die Augeshöhe 18′ Rheinl. und die Entfernung des Thurmes vom Beobachter = 2 Seemeilen war; man soll das wahre Azimuth der Thurmspitze bestimmen.

H. d. Thurm. = 0° 49′
Kimmtiefe = — 6′
schb. Höhe = 0° 43′

⊙ 10° 59′
Kimmt. = — 4′
10° 55′
⊙ Halbm. = + 16′
⊖ scheinb. H. = 11° 11′
Refract. = — 5′
⊖ wahre Höhe = 11° 6′.

⊙.....A̲ 95° 9′ = d. gemessenen Distanz zwischen d. nächsten Rande der Sonne und einer südl. von derselb. stehenden Thurmspitze.
⊙ Halbm. = + 16′
schb. Dist. = 95° 25′.

Ungef. wahre Schiffszeit . . = 5^h 10′ Morgens,
WL. in Zeit = + 8′
ungef. wahre Greenw. Zt. . = 5^h 18′ Morgens d. 7. Mai,
oder 6^h 42′ vor dem wahren Greenw. Mittage den 7. Mai

N. A. den 7. Mai, ⊙ Decl. = 16° 52′ 6″ N.
stündl. Diff. = — 41″,0
$6{,}7^h$
275″ = 4′ 35″
⊙ Declination = 16° 47′ 31″ N.
90°
P. D. = 73° 12′ 29″ N.

P. D. = 73° 12′,5
NBr. = 57° 45′ log sec = 0,27277
⊖ wahre H. = 11° 6′ log sec = 0,00820
S = 71° 2′ log cos = 9,51191
S—P. D. = 2° 10′ log cos = 9,99969
19,79257
log cos ½ Az. = 9,89628
½ Az. = 38° 3′
2
wahres Azimuth der Sonne = N. 76° 6′ Ost.

Scheinb. Dist. = 95° 25′
A̲ scheinb. Höhe = 0° 43′ log sec = 0,00003
⊖ » » = 11° 11′ log sec = 0,00833
S = 53° 39′,5 log cos = 9,77276
scheinb. Dist. — S = 41° 45′,5 log cos = 9,87272
19,65384
½∠ am Zen. zwisch. A̲ u. ⊙ = 47° 50′ log cos = 9,82692
2
∠ am Zenith = 95° 40′ (Thurm südl. von der Sonne),
⊙ wahres Azimuth = N. 76° 6′ Ost,
N. 171° 46′ Ost = S. 8° 14′ Ost = dem wahren Azimuth der Thurmspitze.

§. 198.

Ebbe und Fluth.

Ebbe und Fluth der Weltmeere besteht in dem abwechselnden, regelmässigen Fallen und Steigen des Wassers, welches so erfolgt, dass während eines Mondtages oder in nahe $24^h\ 50'$ mittlerer Zeit, zweimal die Ebbe und zweimal die Fluth läuft.

An den Küsten der grossen Meere und an den Küsten der in naher Verbindung mit diesen stehenden kleineren Meeren zeigt sich Ebbe und Fluth besonders.

Die Anziehung, welche Mond und Sonne auf die Erde ausüben, bewirkt Ebbe und Fluth.

Nach dem von Newton entdeckten Gesetze ziehen sich nämlich die Himmelskörper in geradem Verhältnisse ihrer Massen, aber umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen an. Hiernach wird die Erde von der Sonne und auch vom Monde angezogen, und alle drei Himmelskörper würden zusammenkommen, wenn keine andere Kraft da wäre, die dieses verhinderte.

Bekanntlich läuft die Erde in einer elliptischen Bahn um die Sonne, welche letztere sich in einem der Brennpunkte dieser Bahn befindet. Der Mond bewegt sich auch in einer ellipsenförmigen Bahn um die Erde, die in einem Brennpunkte dieser Bahn bleibt, und läuft zugleich mit der Erde um die Sonne.

Um diese Bahnen zu erklären, nimmt man an, dass sowohl die Erde als der Mond von der Natur einen Stoss in der Richtung der Tangente ihrer Bahnen erhalten haben, welche Stosskräfte, vereint mit den erwähnten Anziehungskräften, die Erde wie auch den Mond zwingen, sich in den gedachten Bahnen zu bewegen.

Setzt man die Erdmasse $= 1$, so ist die Sonnenmasse $= 354936$ und die Mondmasse $= 0{,}01439$, oder nahe $\frac{1}{69{,}5}$.

Wenn ferner der mittlere Abstand des Mondes von der Erde $= 1$ gesetzt wird, so ist der mittlere Abstand der Sonne von derselben nahe $= 400$.

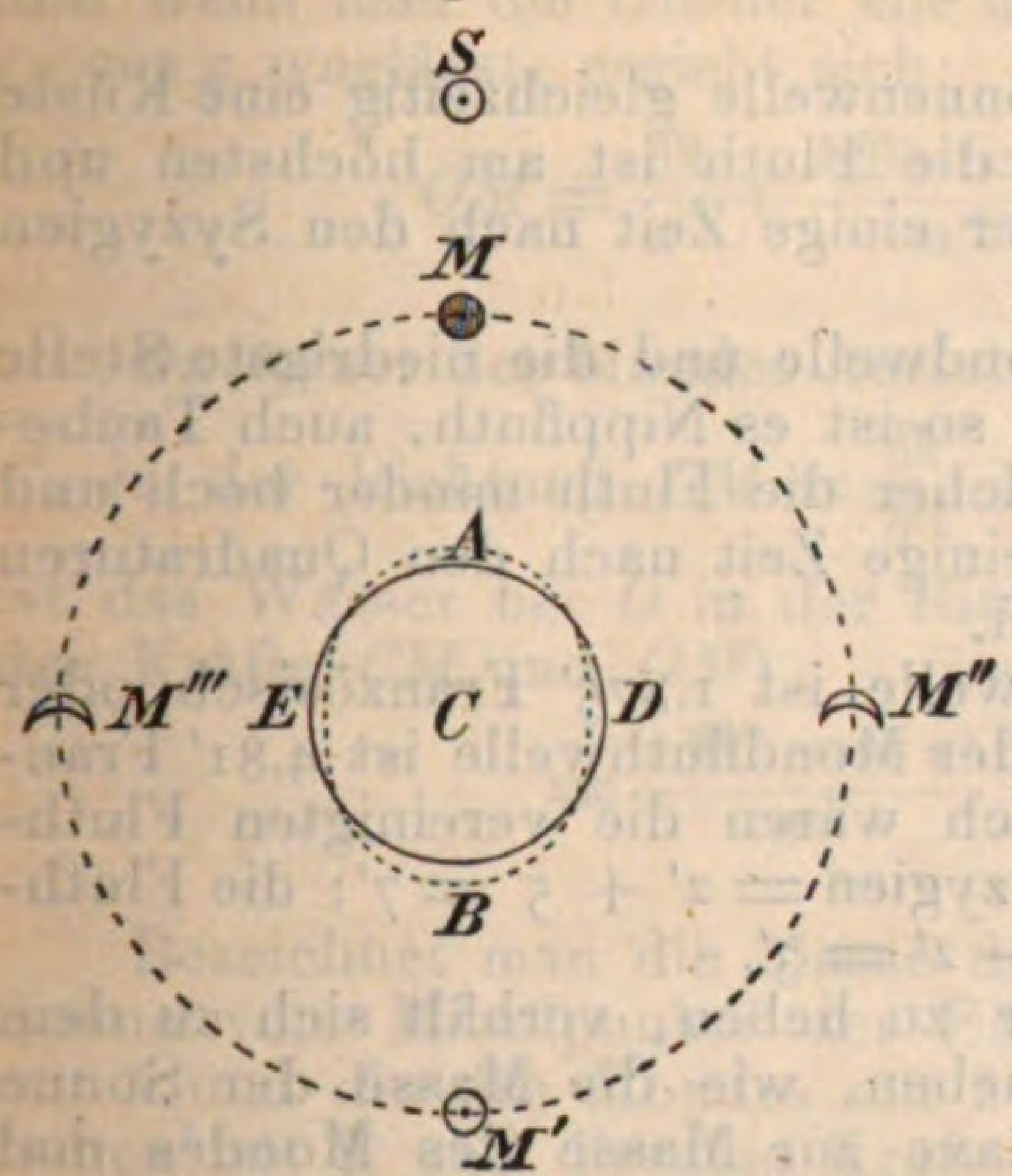
Es ist demnach die Anziehung, welche der Mond auf die Erde ausübt $= \frac{0{,}01439}{1^2} = 0{,}01439$, und die Anziehung der Sonne auf die Erde ist $= \frac{354936}{400^2} = 2{,}21835$.

Hiernach zieht die Sonne die Erde nahe 154 Mal stärker an, als der Mond, und doch ist es letzterer, der hauptsächlich Ebbe und Fluth hervorbringt. Dies kommt daher, dass der Erdhalbmesser einen nahe 400 Mal grösseren Theil der Entfernung des Mondes von der Erde, als der Entfernung der Sonne von der Erde ausmacht, und nicht die Anziehungskraft, die auf den Mittelpunkt der Erde wirkt, sondern der Unterschied dieser Kraft und derjenigen, welche auf die dem Monde bezw. der Sonne nächsten oder entferntesten Punkte der Meeresfläche wirken, Ebbe und Fluth erzeugt.

Die Anziehung der Sonne und des Mondes bringt keine Veränderung in der Form des festen Erdkörpers hervor, sondern in der die Erde

umgebenden Flüssigkeit, also dem Wasser, welches eine bedeutend geringere Cohäsion (Zusammenhangskraft) hat, als die festen Theile der Erde haben.

Fig. 102.



Denkt man sich (Fig. 102.) den Mond in M zwischen der Erde C und der Sonne S, wie er beim Neumonde steht, so wird der Mittelpunkt der Erde zwar durch den Mond etwas nach der Sonne in S hingezogen; aber das Wasser in A wird, da es nahe 859 Meilen dem Monde näher ist als der Mittelpunkt der Erde C, mehr angezogen; das Wasser bei B dagegen wird, da es 859 Meilen weiter als C vom Monde entfernt ist, weniger angezogen, welches verursacht, dass das Wasser eine sphäroidische Form, gehoben bei A und B, und gesenkt bei D und E, annehmen muss.

Nicht allein der Mond, sondern auch die Sonne trägt bei dieser Stellung der drei Himmelskörper dazu bei, dass das Wasser sich bei A und B hebt und bei D und E senkt, denn die Anziehungskraft beider Himmelskörper wirkt nach derselben Richtung hin.

Denkt man sich den Mond auf der entgegengesetzten Seite der Erde in M', wie beim Vollmonde, so wirkt die Anziehungskraft desselben gerade in der entgegengesetzten Richtung, wie die der Sonne; beide Kräfte wirken jedoch wieder dahin, das Wasser bei B und A zu heben und bei D und E zu senken.

Denkt man sich aber den Mond in M'' oder in M''', wie er beim letzten und ersten Viertel steht, so hebt er das Wasser bei D und E, senkt es bei A und B, wogegen die Sonne das Wasser bei A und B hebt und bei D und E senkt.

Sowohl der Mond, wie auch die Sonne sind also bestrebt, das Wasser an den Orten, in deren Zenith sie sich befinden, wie auch an den diesen gegenüberliegenden Orten zu heben, und an denjenigen Orten, die 90° von diesen entfernt liegen, zu senken.

Demnach entsteht an zwei Stellen der Erde eine Hebung des Wassers durch den Mond, Mondwelle genannt, deren höchste Spitze dem Laufe des Mondes zu folgen bestrebt ist, und ebenso entsteht eine Sonnenwelle, deren höchste Spitze der Stellung der Sonne gegen die Erde zu folgen sucht. Diese Mondwelle und Sonnenwelle bilden die eigentliche Fluthwelle, welche stets grösser als die Sonnenwelle, aber abwechselnd grösser und kleiner als die Mondwelle ist, je nachdem die Sonnenwelle die Mondwelle vergrössert oder verkleinert.

Die Fluthwelle erzeugt im offenen Ocean ein Heben und Senken des Wassers und keine merkliche Strömung, so lange sie nicht Widerstand findet.

Wenn der höchste Punkt der Fluthwelle die Küste erreicht, so ist es an derselben Hochwasser, und wenn der niedrigste Punkt dieser Welle die Küste erreicht, so ist es dort Niedrigwasser.

Man sagt: die Ebbe läuft, wenn das Wasser fällt; es läuft die Fluth, wenn das Wasser steigt; es ist Hochwasser in dem Augenblicke, wenn das Wasser anfängt zu fallen; es ist Niedrigwasser in dem Augen-

blicke, wenn das Wasser anfängt zu steigen; es ist Stillwasser in einer kurzen Zwischenzeit, während welcher das Wasser weder steigt noch fällt.

Ebbe und Fluth haben auch den gemeinschaftlichen Namen Gezeiten.

Wenn die Spitze der Mond- und Sonnenwelle gleichzeitig eine Küste erreichen, so ist es Springfluth, d. h. die Fluth ist am höchsten und die Ebbe am niedrigsten, welches immer einige Zeit nach den Syzygien (Neu- und Vollmondszeit) statthat.

Erreicht dagegen die Spitze der Mondwelle und die niedrigste Stelle der Sonnenwelle gleichzeitig eine Küste, so ist es Nippfluth, auch Taubefluth oder Schlaffluth genannt, bei welcher die Fluth minder hoch und die Ebbe weniger niedrig ist, welches einige Zeit nach den Quadraturen (erstem und letztem Mondviertel) zutrifft.

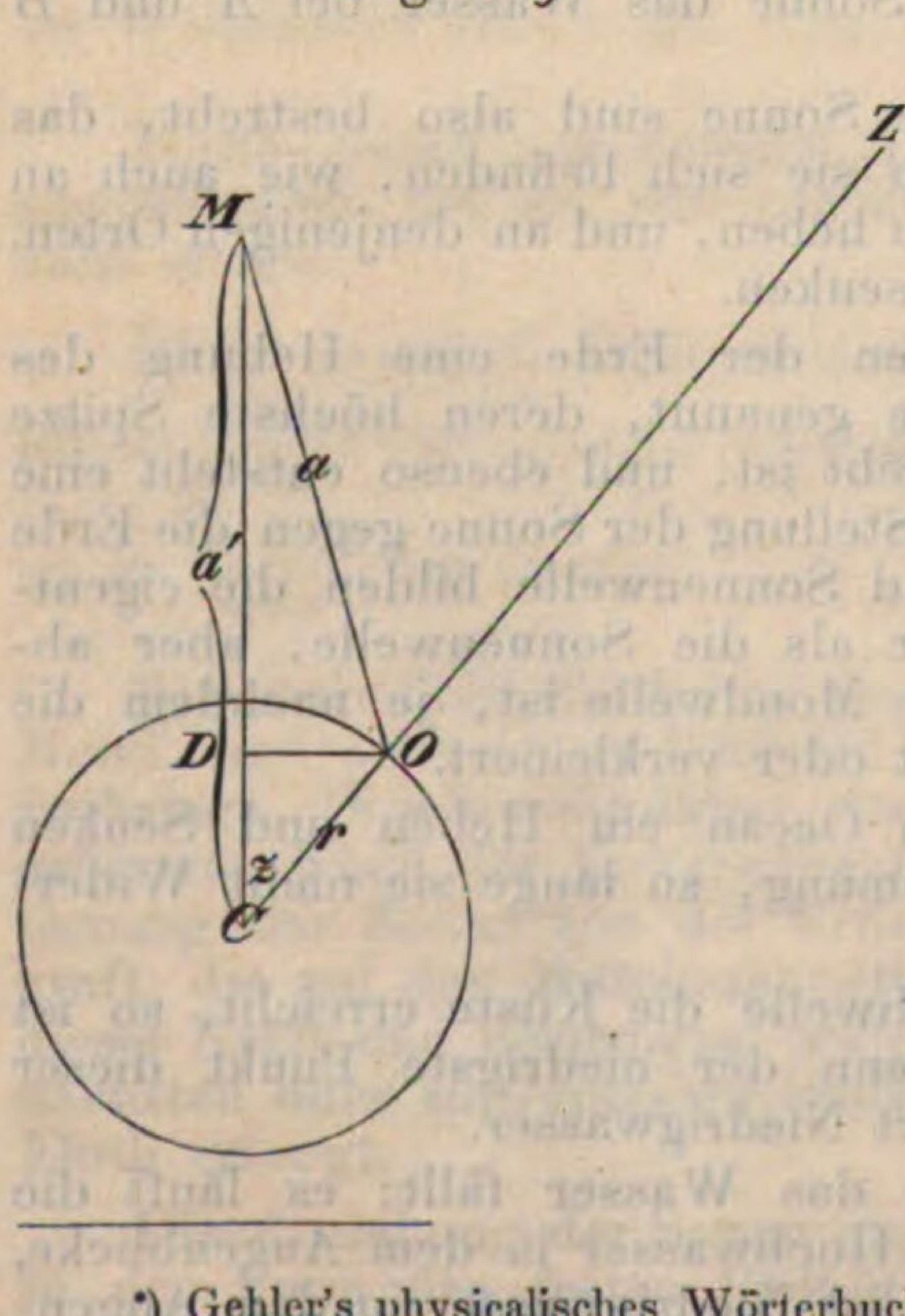
Die mittlere Höhe der Sonnenfluthwelle ist 1,875′ Französisch oder nahe 2′ Rheinl. und die mittlere Höhe der Mondfluthwelle ist 4,81′ Französisch oder nahe 5′ Rheinl.*) Hiernach wären die vereinigten Fluthhöhen von Mond und Sonne bei den Syzygien $= 2' + 5' = 7'$; die Fluthhöhen bei den Quadraturen aber $= 5' - 2' = 3'$.

Der Einfluss der Sonne das Wasser zu heben, verhält sich zu dem Einflusse des Mondes das Wasser zu heben, wie die Masse der Sonne mal dem Cubus ihrer Horizontal-Parallaxe zur Masse des Mondes mal dem Cubus seiner Horizontal-Parallaxe, wie im Nachstehenden bewiesen ist.

Tegner giebt in seiner nautischen Astronomie Pag. 379 an, dass demnach der Einfluss der Sonne das Wasser zu heben, nach dem grössten, mittleren und kleinsten Abstande, zwischen 21, 22 und 24, und derselbe Einfluss des Mondes in seinem grössten, mittleren und kleinsten Abstande zwischen 39, 46 und 54 verändert. Daher verhält sich:

die höchste Springfl. : niedrig. Nippfl. $= 54 + 24 : 39 - 24 = 78 : 15 = 5{,}2 : 1$,
die mittlere Springfl. : mittler. Nippfl. $= 46 + 22 : 46 - 22 = 68 : 24 = 2{,}8 : 1$,
die niedrigst. Sprgfl. : höchst. Nippfl. $= 39 + 21 : 54 - 21 = 60 : 33 = 1{,}8 : 1$.

Fig. 103.



Es sei (Fig. 103.) C der Mittelpunkt der Erde, O ein Ort auf der Oberfläche derselben, dessen Zenith Z ist, M sei der Mond, dessen Masse $= \mathfrak{M}$ gesetzt wird, a bezeichne den Abstand des Mondes von O, a' den Abstand desselben vom Mittelpunkte der Erde, r den Erdhalbmesser und z die Zenithdistanz $= \angle MCZ$, so ist die Anziehung, womit der Mond auf die Erde bei O in

der Richtung OM wirkt $= \frac{\mathfrak{M}}{a^2}$. . (1.).

Zieht man OD normal auf CM, so kann man, da die Entfernung des Mondes gegen OD sehr gross ist, $DM = OM$ und $OM \mp CM$ annehmen, mithin ist

$$a = a' - CD = a' - r \cdot \cos z.$$

*) Gehler's physicalisches Wörterbuch, 3ter Band, E, Pag. 31.

Setzt man diesen Werth für a in (1), so ergiebt sich die Kraft, womit der Mond auf die ganze Erde in O nach OM wirkt $= \frac{\mathfrak{M}}{(a' - r \cdot \cos z)^2}$, und wenn man die Glieder mit den zweiten und höheren Potenzen von $r \cdot \cos z$ weglässt, ergiebt sich:

$$OM = \frac{\mathfrak{M}}{a'^2} + \frac{2\,\mathfrak{M} r \cdot \cos z}{a'^3} \qquad (2).$$

Da ferner des Mondes Anziehungskraft auf den Mittelpunkt der Erde C, in der Richtung $CM = \frac{\mathfrak{M}}{a'^2}$ ist, so wird dessen Kraft, die bestrebt ist das Wasser bei O in der Richtung OM zu heben (d. i. die Differenz der Kräfte CM und OM)

$$= \frac{2\,\mathfrak{M} r \cdot \cos z}{a^3} \qquad (3).$$

Bezeichnet man die Masse der Sonne mit $\mathfrak{S}$ und die Entfernung der Sonne vom Mittelpunkte der Erde mit a, die Meridianhöhe der Sonne mit h und die des Mondes mit h', die Kraft der Sonne das Wasser zu heben mit $\mathfrak{A}$ und dieselbe Kraft des Mondes mit $\mathfrak{A}'$, so ist nach (3)

$$\mathfrak{A} = \frac{2\,\mathfrak{S} r \cdot \sin h}{a^3} \qquad (4),$$

$$\mathfrak{A}' = \frac{2\,\mathfrak{M} r \cdot \sin h'}{a'^3} \qquad (5).$$

Bezeichnet man ferner die Horizontal-Parallaxe der Sonne und des Mondes mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$, so ist:

$$a = \frac{r}{\mathfrak{p}}, \qquad a' = \frac{r}{\mathfrak{P}},$$

mithin $a^3 = \frac{r^3}{\mathfrak{p}^3}$ und $a'^3 = \frac{r^3}{\mathfrak{P}^3}$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (4) und (5), so erhält man

$$\mathfrak{A} = \frac{2\,\mathfrak{S}\mathfrak{p}^3 \cdot \sin h}{r^2} \qquad (6),$$

$$\mathfrak{A}' = \frac{2\,\mathfrak{M}\mathfrak{P}^3 \cdot \sin h'}{r^2} \qquad (7).$$

Wenn nun $h = h'$, also beide Himmelskörper dieselbe Höhe über oder unter dem Horizonte haben, so verhält sich

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{A}' = \mathfrak{S}\mathfrak{p}^3 : \mathfrak{M}\mathfrak{P}^3 \qquad (8),$$

mithin verhält sich die Kraft der Sonne das Wasser zu heben, zu der Kraft des Mondes das Wasser zu heben, wie die Masse der Sonne mal dem Cubus ihrer Horizontal-Parallaxe zur Masse des Mondes mal dem Cubus seiner Horizontal-Parallaxe.

Aus den Gleichungen (4) oder (5) ergiebt sich, dass die Kräfte eines und desselben Himmelskörpers, das Wasser zu heben, zu verschiedenen Zeiten, wenn die Höhe des Himmelskörpers dieselbe ist, sich verhalten, umgekehrt wie die Cuben der resp. Entfernungen desselben vom Mittelpunkt der Erde.

Es ist die Masse der Erde $= 1$ gesetzt, die Masse der Sonne $= 354936$ und die Masse des Mondes $= 0{,}01439$ oder nahe $= \frac{1}{69{,}5}$ $\left(\text{nach Laplace } \frac{1}{75} \text{ und nach Lalande } \frac{1}{68{,}5}\right)$.

Ferner ist die Horizontal-Parallaxe der Sonne in ihrem kleinsten, mittleren und grössten Abstande von der Erde $= 8'',7241$; $8'',5776$; $8'',4360$; die Horizontal-Parallaxe des Mondes bei seiner kleinsten, mittleren und grössten Entfernung von der Erde $= 3608'',7$; $3420'',9$ und $3233'',1$.

Setzt man diese Werthe in (8), so ergiebt sich:

1. $\mathfrak{A} : \mathfrak{A}' = 354936 \cdot (8{,}7241)^3 : 0{,}01439 \cdot (3608{,}7)^3$
$= 0{,}23567 : 0{,}67626$, oder beinahe $= 1 : 2{,}87$ (9),

2. $\mathfrak{A} : \mathfrak{A}' = 354936 \cdot (8{,}5776)^3 : 0{,}01439 \cdot (3420{,}9)^3$
$= 0{,}22400 : 0{,}57608$, oder $= 1 : 2{,}57$. . . (10),

3. $\mathfrak{A} : \mathfrak{A}' = 354936 \cdot (8{,}4360)^3 : 0{,}01439 \cdot (3233{,}1)^3$
$= 0{,}21309 : 0{,}48632$, oder nahe . . $= 1 : 2{,}28$. . . (11).

Da sich nun die Springfluth zur Nippfluth verhält $= \mathfrak{A}' + \mathfrak{A} : \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$, so erhält man, wenn hierin die für die mittlere Entfernung berechneten Zahlen gesetzt werden:

Mittlere Springfl. : Mittleren Nippfl. $= 3{,}57 : 1{,}57$, nahe $= 2{,}28 : 1$. . (12).

Wenn Sonne und Mond beide im mittleren Abstande von der Erde sind, so verhält sich nach Laplace's Bestimmung der Mondmasse $\left(= \frac{1}{75}\right)$:

Attraction der Sonne : Attraction des Mondes $= 1 : 2{,}38294$,

nach Lalande's Bestimmung für die Mondmasse $\left(= \frac{1}{68{,}5}\right)$:

Attraction der Sonne : Attraction des Mondes $= 1 : 2{,}60945$.

Die Declinationen des Mondes und der Sonne haben auch auf die unter verschiedenen Breiten liegenden Orte einen verschiedenen Einfluss in Bezug auf die Höhe der Ebbe und Fluth; denn der höchste Punkt der Fluthwelle ist bestrebt, vertical unter dem Himmelskörper zu sein, der dieselbe erzeugt hat.

Der Umlauf der Mondknoten um die Erde hat daher Einfluss auf die Fluthhöhe; denn die Declination des Mondes ist in dem einen Theil seiner Periode ungefähr 29° und in dem anderen nur 18°.

Aus Gleichung (6) folgt, wenn man keine Rücksicht auf die Höhen nimmt, dass die Sonnenfluthen sich für einen unterm Aequator liegenden Ort wie die Cuben der Horizontal-Parallaxe der Sonne verhalten.

Es müssen daher die Winter-Sonnenfluthen grösser als die Sommer-Sonnenfluthen sein, weil die Sonne der Erde im Winter näher als im Sommer ist.

Da die Sonnenhöhe im Sommer grösser als im Winter, so können nördlich vom Aequator liegende Orte, deren Breite gross genug, die Sommer-Sonnenfluthen grösser als die Winter-Sonnenfluthen haben. Z. B. für Brest in 48° 23′ NBreite ist die Meridianhöhe der Sonne am 1. Januar,

wenn die Erde im Perihel ist und die Sonne 8″,72 Horizontal-Parallaxe hat, nahe 18° 34′; wenn die Erde aber im Aphel ist $(\partial \frac{1}{7})$ und die Sonne 8″,44 Horizontal-Parallaxe hat, beträgt die Meridianhöhe 64° 47′.

Setzt man diese Werthe in (6), so ergiebt sich:

die Winter-Sonnenfluth $(\partial \frac{1}{1})$: Sommer-Sonnenfluth $(\partial \frac{1}{7})$

$$= (8'',72)^3 \cdot \sin 18^\circ\, 34' : (8'',44)^3 \cdot \sin 64^\circ\, 47' = 1 : 2{,}6 \; \ldots\ldots \; (13).$$

Um für die nördliche Halbkugel die Grenzen zu finden, zwischen welchen die grösste Sonnenfluth, wenn die Erde in der Sonnenferne, und die kleinste Sonnenfluth, wenn die Erde in der Sonnennähe ist, eintrifft, setze man $\left(\frac{8{,}72}{8{,}44}\right)^3 = m$, die Breite des Ortes $= p$ und die Declination der Sonne $= d$, so ist die Meridianhöhe der Sonne für das Perihel $= 90^\circ - p - d$ und für das Aphel ist dieselbe $= 90^\circ - p + d$, mithin verhält sich die Sonnenfluth, wenn die Erde im Perihel, zur Sonnenfluth, wenn die Erde im Aphel $= m \cdot \sin(90^\circ - p - d) : \sin(90^\circ - p + d)$. Damit die Sonnenfluth, wenn die Erde im Perihel $=$ der Sonnenfluth wird, wenn die Erde im Aphel ist, muss

$$m \cdot \sin(90^\circ - p - d) = \sin(90^\circ - p + d), \text{ oder}$$

$$m \cdot (\cos p \cdot \cos d - \sin p \cdot \sin d) = \cos p \cdot \cos d + \sin p \cdot \sin d, \text{ oder}$$

$$m \cdot \cos d - m \cdot \sin d \cdot \operatorname{tang} p = \cos d + \sin d \cdot \operatorname{tang} p,$$

$$\text{mithin } \operatorname{tang} p = \frac{m-1}{m+1} \cdot \operatorname{cotg} d = \frac{0{,}1029}{2{,}1029} \cdot \operatorname{cotg} 23^\circ\, 10' \text{ sein} \; \ldots\ldots \; (14);$$

dieses giebt $p = 6^\circ\, 32'$.

Mit Hinsicht auf die südliche Halbkugel verhält sich die Sommer-Sonnenfluth $(\partial \frac{1}{1})$: Winter-Sonnenfluth $(\partial \frac{1}{7}) = (8{,}72)^3 \cdot \sin(90^\circ - p + d)$:

$$(8{,}44)^3 \cdot \sin(90^\circ - p - d) = m \cdot \cos(p - d) : \cos(p + d) \; \ldots\ldots\ldots \; (15).$$

Mit Rücksicht auf den Mond wird, wenn man seine Horizontal-Parallaxe und Declination im Perigäum mit P und D und im Apogäum mit P' und D' bezeichnet,

$$☾ \text{ Fluth i. Perigä.} : ☾ \text{ Fluth i. Apogä.} = P^3 \cdot \cos(p \pm D) : P'^3 \cdot \cos(p \pm D') \; .. \; (16),$$

worin $-$ oder $+$ zu nehmen ist, je nachdem Breite und Declination gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

Das vormittägige und nachmittägige Hochwasser oder Niedrigwasser ist von ungleicher Grösse, denn es verhält sich

> die Sonnenfluth oder Mondfluth nach der oberen Culmination zur Sonnenfluth oder Mondfluth nach der unteren Culmination, wie der Cubus der Horizontal-Parallaxe mal sin Meridianhöhe zu dem Cubus der Horizontal-Parallaxe mal sin Meridiandepression;

mithin ist, wenn Breite und Declination gleichnamig, die Meridianhöhe grösser als die Meridiandepression, die Sonnen- oder Mondfluth nach der oberen Culmination grösser als die Sonnen- oder Mondfluth nach der unteren Culmination. Sind Breite und Declination ungleichnamig, so findet das Entgegengesetzte statt.

Die Höhen der Fluthen sind indessen am meisten von der Lage und Beschaffenheit der Küsten abhängig. Wo diese den Abfluss der

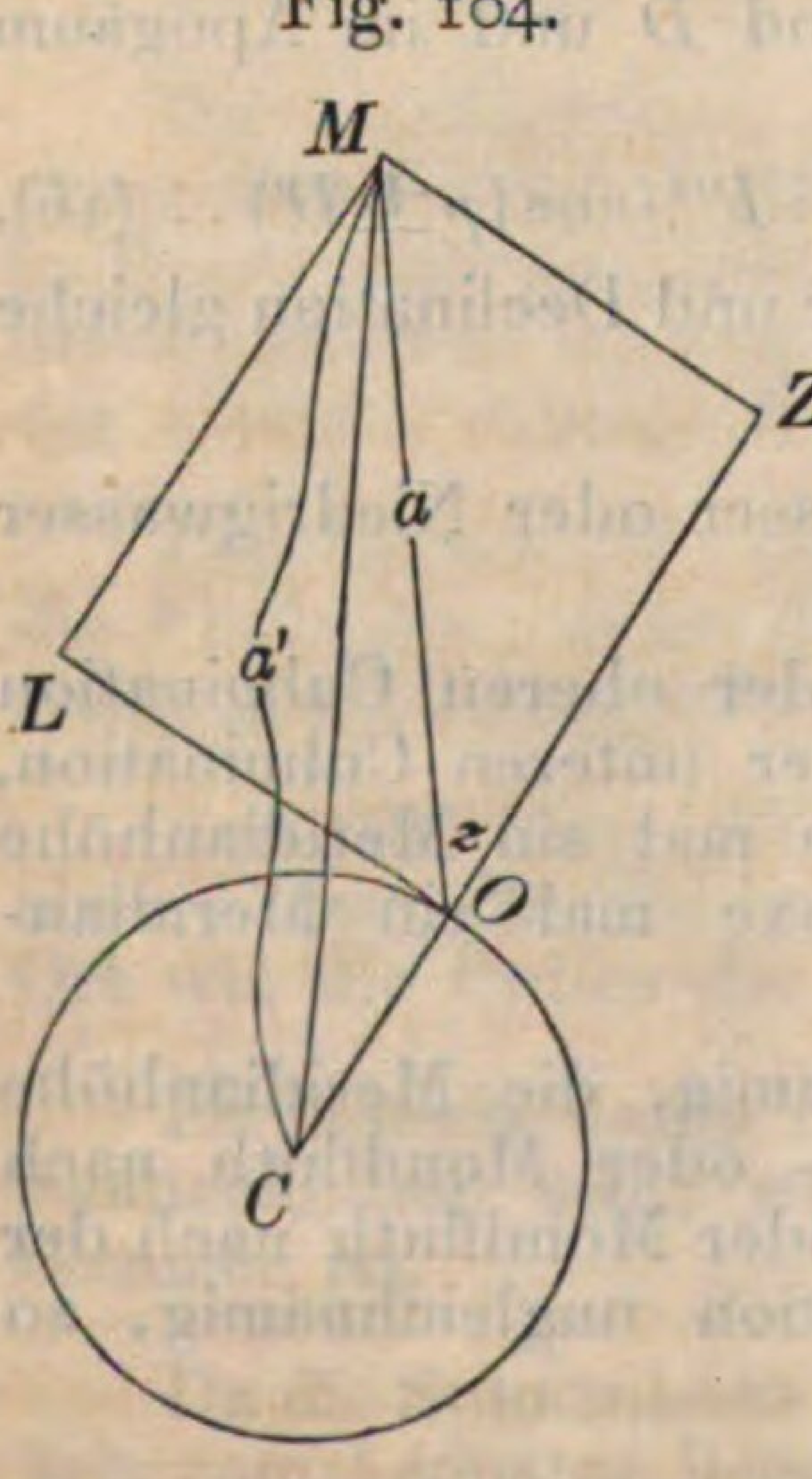
Fluthwellen hindern, thürmen die nachfolgenden sich über die vorhergehenden auf und die Springfluthen erreichen an solchen Stellen eine beträchtliche Höhe.

Die vorhin angegebenen Höhen der Springfluthen zur Zeit der Syzygien gelten daher nur für den offenen Ocean; denn an den Küsten steigen die Fluthen meistens viel höher. An der Küste von Portugal z. B. steigt die Springfluth 11 bis 12 Fuss über das Niveau der niedrigsten Ebbe, an der Spanischen Küste 12 bis 15 Fuss, an der westlichen Küste von Frankreich 15 bis 18 Fuss, an der Irländischen und Schottischen Küste bis 18 Fuss, bei den Hebriden 12 bis 22 Fuss. An der Nordfranzösischen Küste, wo die Enge des Kanals und der Rückstoss des Fluthstromes von der Englischen Küste mitwirkt, steigt die Springfluth sehr hoch, z. B. bei St. Malo bis 45 Fuss; bei Bristol soll sie 50 Fuss, bei Chepstow, schräg über Bristol, sogar 70 Fuss erreichen, und bei Annapolis in der Fundybay soll sie noch höher steigen.

Die Sonnenfluthwelle trägt nicht allein zur Vergrösserung und Verkleinerung der Mondfluthwelle bei, sondern beschleunigt oder verzögert die letztere, wodurch dann auch eine Beschleunigung oder Verzögerung der eigentlichen Fluthwelle entsteht.

Wenn der Mond allein die Fluthwelle erzeugte und sich gleichmässig im Aequator bewegte, so würde die Zeit zwischen den aufeinanderfolgenden Fluthwellen an einem Orte gleich einem Mondtage sein. Ebenso würde, wenn die Sonne allein die Fluthwelle bewirkte und sich im Aequator bewegte, der gedachte Zeitraum einen Sonnentag betragen. Da aber sowohl der Mond wie die Sonne zur Erzeugung der eigentlichen Fluthwelle beitragen, so wird der Zeitraum zwischen den beiden aufeinanderfolgenden Wiederkehren dieser Fluthwelle nach demselben Orte sich ändern. Denn wenn die Sonnen- und Mondfluthwelle nicht zusammentreffen, liegt die eigentliche Fluthwelle zwischen beiden, jedoch am nächsten der Mondfluthwelle.

Fig. 104.

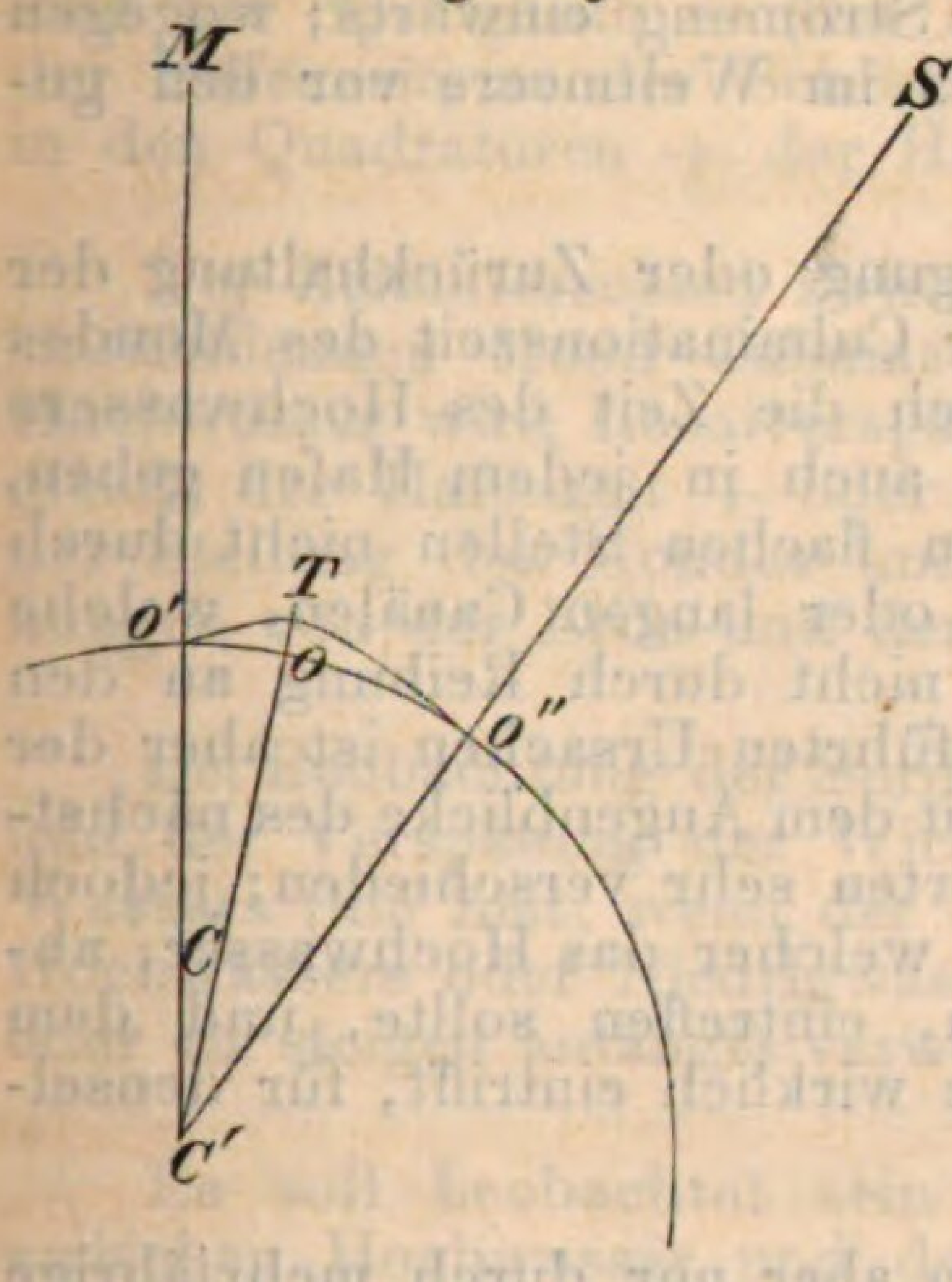


Wenn OM (Fig. 104.) die Kraft vorstellt, mit welcher ein Himmelskörper in M das Wasser in O nach M zieht, so ist diese, nach Gleichung (3.) $= \frac{2\,\mathfrak{M}r \cdot \cos z}{a'^3}$, worin $\mathfrak{M}$ die Masse des Gestirns, r den Erdhalbmesser, z die Zenithdistanz und a' die Entfernung des Gestirns vom Mittelpunkte der Erde bezeichnet. Die Kraft OM aber kann in zwei andere Kräfte zerlegt werden, nämlich in die horizontale Kraft OL und in die verticale Kraft OZ. Da nun Dreieck LOM bei L rechtwinklig ist, so ergiebt sich die horizontal wirkende Kraft bei

$$O(OL) = OM \cdot \sin \angle LMO = \frac{2\,\mathfrak{M}r \cdot \cos z \cdot \sin z}{a'^3} \quad (17.).$$

Die verticalwirkende Kraft bei O (OZ) aber ergiebt sich $= OM \cdot \cos \angle LMO = \frac{2\,\mathfrak{M}r \cdot \cos^2 z}{a'^3}$ (18.).

Fig. 105.



Wenn ferner (Fig. 105.) die Orte o, o', o'', sowie die Spitze der eigentlichen Fluthwelle T (die Resultirende der Mond- und Sonnenwelle), die Sonne S und der Mond M in der Aequator-Ebene angenommen werden, und wenn die Massen der Sonne und des Mondes wie vorhin, resp. mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{M}$, ihre Abstände vom Mittelpunkte der Erde mit a und a' und ihre Horizontal-Parallaxen mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden; der Rectascensions-Unterschied ($\angle MC'S$) aber mit A und der Winkel $MC'T$, den die Spitze der eigentlichen Fluthwelle mit der Verticallinie des Mondes macht, mit C bezeichnet wird: so verhält sich nach (17.) die horizontale Kraft, welche die Sonne bei o auf das Wasser ausübt, zu der horizontal wirkenden Kraft des Mondes bei o

$$= \frac{2\,\mathfrak{S}\cdot r\cdot\cos(A-C)\cdot\sin(A-C)}{a^3} : \frac{2\,\mathfrak{M}\cdot r\cdot\cos C\cdot\sin C}{a'^3},$$

$$= \mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3\cdot\sin 2(A-C) : \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3\cdot\sin 2C.$$

Da nun diese beiden Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so ist

$$\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3\cdot\sin 2(A-C) = \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3\cdot\sin 2C, \text{ oder}$$

$$\sin 2A\cdot\cos 2C - \cos 2A\cdot\sin 2C = \frac{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3}\cdot\sin 2C, \text{ oder}$$

$$\sin 2A - \cos 2A\cdot\operatorname{tang} 2C = \frac{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3}\cdot\operatorname{tang} 2C, \text{ mithin}$$

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} 2C} - \cos 2A = \frac{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3}, \text{ oder } \frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} 2C} = \frac{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3} + \cos 2A, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tang} 2C = \frac{\sin 2A}{\frac{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3} + \cos 2A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(19.)}.$$

Bei den bisher gemachten Schlüssen ist die Erde als eine Kugel überall mit tiefem Wasser umgeben gedacht. Die durch die Wirkung des Mondes und der Sonne erzeugte Fluthwelle würde dann überall nur durch Steigen und Fallen des Wassers bemerkbar werden und keine wesentliche Strömung verursachen. Auf der Erde, deren Oberfläche aus $\frac{1}{3}$ Land und $\frac{2}{3}$ Wasser besteht, äussert sich aber die Fluth und Ebbe in der Nähe der Küsten und besonders in Flüssen und Buchten, die mit den grossen Meeren nahe genug in Verbindung stehen, durch eine Strömung des Wassers, die an manchen Orten sehr stark ist. Obgleich die Anziehung des Mondes und der Sonne auf alle Punkte eines kleinen Gewässers sehr nahe gleichwirkend ist, sonach ein merkliches Steigen und Fallen des Wassers in demselben dadurch nicht hervorgebracht werden kann, so muss doch auf Flüssen und sogar auf kleinen Seen — wenn nämlich die Mündung eines solchen Flusses oder eine Bucht mit dem Weltmeere in unmittelbarer Verbindung steht, oder wenn ein kleiner See durch einen Canal mit dem Weltmeere verbunden ist — eine Strömung entstehen. Denn wenn die Fluthwelle des Weltmeeres die

Mündung eines solchen Flusses, einer solchen Bucht oder eines solchen Canals erreicht, so entsteht natürlich eine Strömung einwärts; wogegen der Strom auswärts laufen muss, wenn es im Weltmeere vor den gedachten Mündungen Niedrigwasser ist.

Die vorstehend angeführte Beschleunigung oder Zurückhaltung der Mondfluthwelle durch die Sonne, mit der Culminationszeit des Mondes in Verbindung gebracht, würde daher auch die Zeit des Hochwassers nicht allein im freien Weltmeere, sondern auch in jedem Hafen geben, wenn das Wasser keine Trägheit hätte, an flachen Stellen nicht durch Reibung gegen den Grund und in engen oder langen Canälen, welche die Fluth oder Ebbe durchlaufen muss, nicht durch Reibung an den Seiten aufgehalten würde. Aus den angeführten Ursachen ist aber der Augenblick der Culmination des Mondes mit dem Augenblicke des nächstfolgenden Hochwassers an verschiedenen Orten sehr verschieden; jedoch ist der Unterschied zwischen der Zeit, an welcher das Hochwasser, abgesehen von den gedachten Hindernissen, eintreffen sollte, und dem Augenblicke, an welchem es an einem Orte wirklich eintrifft, für denselben Ort fast constant (unveränderlich).

Diese Verspätung der Fluthwelle kann aber nur durch mehrjährige sorgfältige Beobachtungen mit einiger Genauigkeit bestimmt werden; denn es wirkt ausser den erwähnten Hindernissen noch besonders der an vielen Orten unregelmässig verändernde Wind auf das wirkliche Eintreffen des Hochwassers. Man beobachtet daher oder leitet vielmehr aus jeder der in Rede stehenden Beziehung gemachten Beobachtung die Zeit ab, welche zwischen dem wahren Mittage — an welchem zur Zeit der Nachtgleichen, wenn der Mond im mittleren Abstande von der Erde ist, mit der Sonne gleichzeitig durch den Meridian des Ortes geht — und dem nächstfolgenden Hochwasser verfliesst; welcher Zeitunterschied Hafenzeit genannt wird.

Die ungefähre Hafenzeit eines Ortes ist die Zeit, welche zwischen der Culmination des Mondes in den Syzygien und dem nächstfolgenden Hochwasser verfliesst.

Die Wirkungen der Anziehung des Mondes und der Sonne zeigen sich in der Nordsee und an den Westküsten Englands und Frankreichs erst nach Verlauf von etwa 36 Stunden und darüber. Dieses Aufhalten der Wirkung ist nicht gleich für alle Orte, aber constant für denselben Ort. Man sollte es daher für jeden Ort, dessen Hochwasser man zu einer bestimmten Zeit berechnen will, kennen; es ist aber nur für die wenigsten Orte bekannt und in der nautischen Tafel LII., welche die Hafenzeiten enthält, gar nicht angegeben.

In Tegners nautischer Astronomie, Tafel 69., ist die Verspätung der Wirkung wie folgt angegeben:

Für die Französischen Häfen an der Westküste nahe 41 Stunden, für Brest $36^h,2$; Plymouth Dock 60^h; Portsmouth 49^h; Ramsgate Pier 59^h; London Bridge $59^h,1$; Leith Pier $35^h,4$; Bristol (Kings Road) 59^h; Liverpool-Dock 37^h.

Die Verspätung der Wirkung wird durch mehrjährige genaue Beobachtungen bestimmt und ist gleich der Zwischenzeit zwischen dem wahren Mittage, an welchem Sonne und Mond gleichzeitig durch den Meridian des Ortes gehen, und dem Augenblicke, an welchem der Mond durch den Meridian des Ortes zunächst vor der Springfluth geht.

Näherungsweise ist die Verspätung der Wirkung gleich der mittleren Zeit der Springfluth — (der Mond-Culminationszeit in den Syzygien + der Hafenzeit) = der Schlaffluth — (der Culminationszeit des Mondes in den Quadraturen + der Hafenzeit).

Der Zeitunterschied zwischen jeder nicht gleichzeitig mit der Sonne stattfindenden Mond-Culmination und dem zunächst darauf folgenden Hochwasser wird Localverspätung (örtliche Verspätung) genannt; sie ist gleich der Hafenzeit + oder — einer Correction, welche abhängt von der Stellung des Mondes und der Sonne gegen einander, ihren Entfernungen von der Erde und der Verspätung der Wirkung.

Bei Beobachtung der Springfluth, der Hafenzeit, der Localverspätung und der Verspätung der Wirkung muss man nicht die Zeit des stillen Wassers (die Zeit, wenn der Strom aufhört zu fliessen) mit der Zeit des Hochwassers oder Niedrigwassers (die Zeit, wenn das Wasser zu fallen oder zu steigen anfängt) verwechseln.

Es soll beobachtet sein im freien Meere, dass die Zeit, welche zwischen Hochwasser und dem nächsten Niedrigwasser, und zwischen Niedrigwasser und dem nächsten Hochwasser verfliesst, im Mittel nahe $6^h\ 12',5$ mittlere Zeit beträgt; wogegen dieser Zeitverlauf in Häfen und Flüssen ungleich ist. Es ist z. B. bei Altona der Zeitverlauf von Hochwasser bis Niedrigwasser $7^h\ 50'$; die Zeit von Niedrigwasser bis Hochwasser beträgt aber nur $4^h\ 35'$. Die Summe dieser beiden Zeitverläufe, nämlich, von Hoch- bis Niedrigwasser und von Niedrigwasser bis Hochwasser, ist gleich einem halben Mondtage, welcher im Mittel $= 12^h\ 25'$ mittlere Zeit beträgt. Da wo Fluthwellen von verschiedenen Richtungen kommen, hat dieser regelmässige Verlauf nicht statt. Es giebt Orte, die in 24 Stunden nur einmal Hoch- und Niedrigwasser haben, z. B. im Meerbusen von Tunking.

Die nautische Tafel LI. enthält die durch die Sonne entstehende Beschleunigung oder Verzögerung der Fluthwelle. Die Argumente dieser Tafel sind: Halbmesser des Mondes und Culminationszeit des Mondes in wahrer Zeit. Die Formel zur Berechnung der in dieser Tafel enthaltenen Correction lässt sich wie folgt ableiten:

Es ist nach Formel (19)

$$\operatorname{tang} 2\,C = \frac{\sin 2\,A}{\frac{\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{P}^3}{\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{p}^3} + \cos 2\,A},$$

worin C die Correction, A den Rectascensions-Unterschied zwischen Sonne und Mond, $\mathfrak{M}$ die Masse des Mondes, $\mathfrak{P}$ die Horizontalparallaxe desselben, $\mathfrak{S}$ die Masse der Sonne und $\mathfrak{p}$ ihre Horizontalparallaxe bezeichnet.

Es sei a die Veränderung des Rectascensions-Unterschiedes zwischen Sonne und Mond während der Verspätung der Wirkung, so wird der Mond, als die Ursache zur Fluthwelle stattfand, um $a°$ weniger von der Sonne entfernt gewesen sein, als derselbe zur Zeit der Mond-Culmination, die dem Hochwasser zunächst vorhergegangen ist, von derselben entfernt war; man muss daher in vorstehender Gleichung $A - a$ statt A setzen, folglich wird

$$\operatorname{tang} 2\,C = \frac{\sin 2\,(A - a)}{\frac{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3} + \cos 2\,(A - a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

oder wenn d den Halbmesser des Mondes bezeichnet

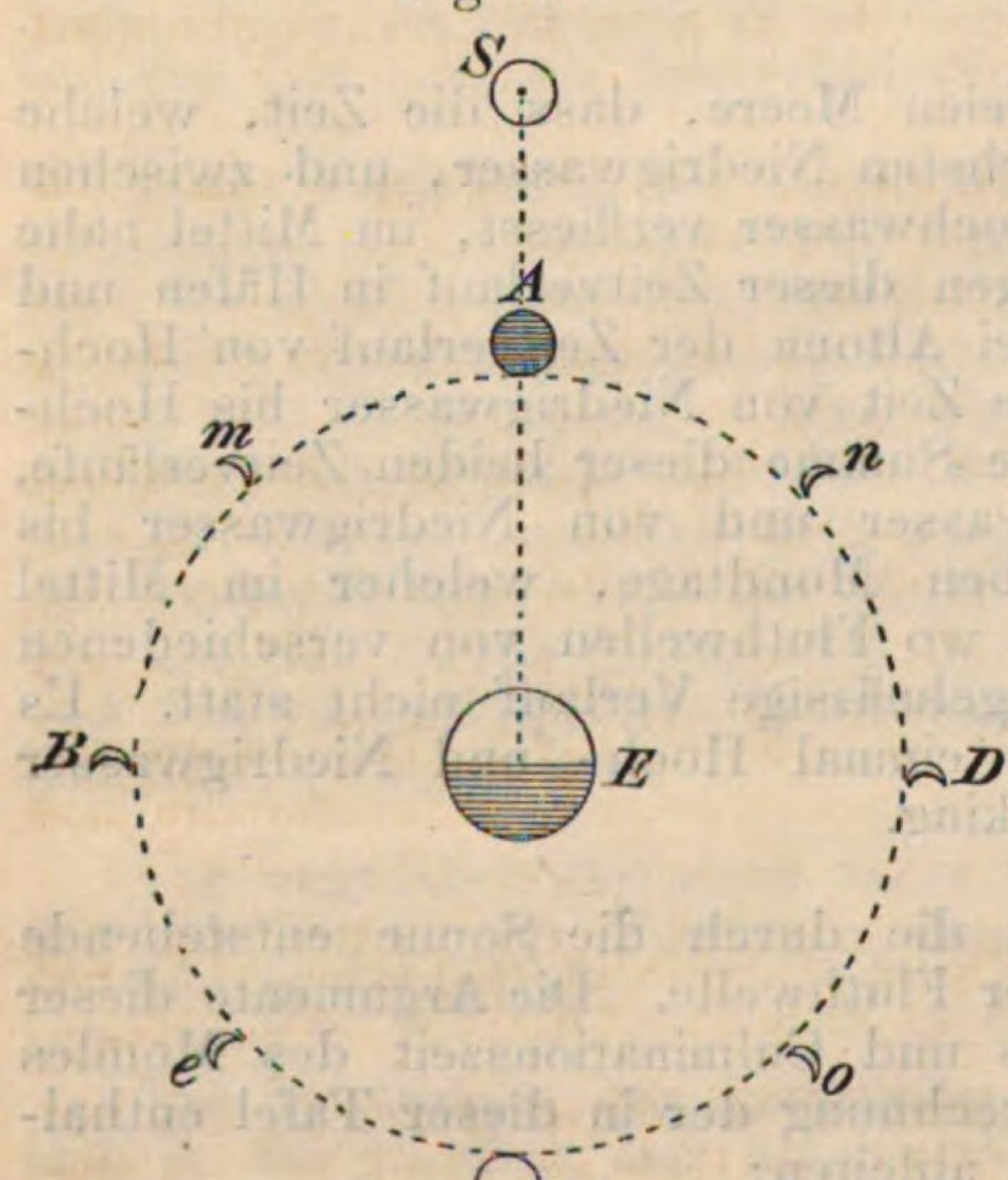
$$\operatorname{tang} 2\,C = \frac{\sin 2\,(A - a)}{\frac{\mathfrak{M}(d\cdot 3{,}67)^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3} + \cos 2\,(A - a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

$$\operatorname{tang} 2\,C = \frac{\sin 2\,(A - a)}{E + \cos 2\,(A - a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

$$\text{worin } E = \frac{\mathfrak{M}\,(d\cdot 3{,}67)^3}{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p}^3} = \frac{0{,}01439\cdot(3{,}67)^3}{354936\cdot(8{,}5776)^3}\cdot d^3 \text{ ist,}$$

$$\text{also } \log E = 0{,}501811 - 8 + (\log d)\cdot 3.$$

Fig. 106



Um zu untersuchen, ob die Correction mit — oder + zu bezeichnen ist, sei (Fig. 106.) E die Erde, S die Sonne, A, m, B, e, G, o, D und n der Mond, so ist, wenn man von der Verspätung der Wirkung absieht, leicht einzusehen, dass zur Zeit des Neu- und Vollmondes (also wenn der Mond sich in A und G befindet) keine Correction statthat, indem die Anziehungskraft der Sonne dann mit der des Mondes in derselben oder in gerade entgegengesetzter Richtung wirkt. Denkt man sich aber den Mond in m, zwischen A und B, so muss die höchste Erhebung der vereinigten Fluthwellen in einem Punkte zwischen A und m, und zwar näher an m als an A liegen. Sie geht daher auch, weil der Mond sich durch die Axendrehung der Erde von Osten nach Westen, also von m nach A bewegt, durch die Sonne beschleunigt, eher durch den Meridian. Die Correction ist daher —, bis der Mond sich im ersten Viertel in B befindet, wo dieselbe = o wird, weil die Sonnenfluthwellen dann in A und in G sind und daher weder eine Beschleunigung noch Verzögerung der Mondfluthwelle bewirken können. Befindet der Mond sich zwischen dem ersten Viertel und Vollmonde irgend wo, z. B. in e, so verursacht die Sonnenfluthwelle G, dass der erhabenste Theil beider Fluthwellen zwischen e und G liegt; der Meridiandurchgang der Fluthwelle wird daher durch die Anziehung der Sonne verzögert und die Correction ist +, bis der Mond in G anlangt und es Vollmond ist, bei welchem letzteren die Correction wieder = o sein muss.

Ganz auf ähnliche Art lässt sich zeigen, dass die Correction zwischen Vollmond und dem letzten Viertel, also wenn der Mond zwischen G und D ist, minus, beim letzten Viertel, wo der Mond in D ist = o und zwischen dem letzten Viertel und Neumonde, also wenn der Mond zwischen D und A ist, plus sein muss.

Obgleich nun nicht, wie in der Erklärung angenommen, die Mondfluthwelle ohne den Einfluss der Sonne gerade unter dem Monde und die Sonnenfluthwelle ohne Einfluss des Mondes gerade unter der Sonne sein würde, sondern jede dieser Fluthwellen etwas östlich von dem sie erzeugenden Himmelskörper sich befindet, so hat dies doch keinen Einfluss auf die Richtigkeit der gegebenen Erklärung, wenn man annimmt, dass jede der in Rede stehenden Fluthwellen gleichweit östlich von dem sie erzeugenden Himmelskörper ist.

Wenn man aber auf die Verspätung der Wirkung Rücksicht nimmt, so ergiebt sich leicht aus dem Gesagten, dass $C = 0$ sein muss, wenn $A - a = 0 = 6^h = 12^h$ und $= 18^h$ ist; ferner dass C — ist, wenn $A - a$ kleiner als 90°, oder grösser als 180°, aber kleiner als 270°; endlich, dass C + wird, wenn $A - a$ grösser als 90° und kleiner als 180°, oder grösser als 270° und kleiner als 360° ist.

Da die Sonnenmasse = 354936, die mittlere Horizontalparallaxe des Mondes = 3420″,9 und die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne = 8″,5776 ist, so wird, wenn man die Mondmasse = 0,01439 annimmt, $E = 2{,}572$.

Nach Lindenau's Bestimmung der Mondm. $= \frac{1}{87{,}83}$ wird $E = 2{,}037$.

» Laplace's » » » $= \frac{1}{75}$ » $E = 2{,}383$.

» Lalande's » » » $= \frac{1}{68{,}5}$ » $E = 2{,}609$.

» Bernoulli's Beobachtungen über Ebbe und Fluth $E = 2{,}500$.

» Lubbock's » » » » » $E = 2{,}643$.

In der nautischen Tafel LI. ist 15′ 30″ als mittlerer Halbmesser des Mondes angenommen, und diesem entspricht eine Horizontalparallaxe von 3413,1 Secunden.

Berechnet man mit dieser mittleren Horizontalparallaxe und der Mondmasse = 0,01439 die Grösse E, so ergiebt sich diese = 2,554.

Ferner ist bei Berechnung der Tafel LI. $a = 20°$ gesetzt, welches, wenn man annimmt, dass der Mond sich stündlich im Mittel 0,°508 von der Sonne in Rectascension entfernt, einer Wirkungsverspätung von 39,4 Stunden entspricht.

Da die Hafenzeit gleich der Zeit des nachmittägigen Hochwassers ist, wenn Sonne und Mond im mittleren Abstande von der Erde sind und gleichzeitig culminiren; ferner die nach Formel (22) berechnete Correction dann nicht = 0, sondern unter den bei Berechnung der Tafel angenommenen Voraussetzungen = 22′ wird, und die Hafenzeit zur Berechnung eines jeden Hochwassers nöthig ist: so sind von jeder berechneten Correction 22′ abgezogen und der Rest ist als Correction in Tafel LI. aufgenommen.

Da die Verspätung der Wirkung nicht an allen Orten gleich ist, sondern schon nach den vorhin angeführten Grössen 36,2 Stunden bis 60 Stunden werden kann, so genügt es eigentlich nicht, nur für eine bestimmte Verspätung der Wirkung eine Tafel zu haben, sondern es sollte wohl für das Minimum und Maximum dieser Grösse eine Correctionstafel berechnet sein. Mit diesen Tafeln könnte man dann durch Interpolation für jede Verspätung der Wirkung die entsprechende Cor-

rection finden; weil aber die Verspätung der Wirkung nur für wenige Orte bekannt ist, so würde durch die Berechnung zweier solcher Tafeln kein wesentlicher Vortheil erzielt sein, weshalb es vorgezogen wurde, nur eine Tafel mit der an den meisten Orten der Europäischen Küste stattfindenden Verspätung der Wirkung zu berechnen.

§. 199.

Regel. Die mittlere Zeit des Hochwassers für einen gegebenen Tag und Ort zu berechnen.

1. Finde die mittlere astronomische Zeit der Mond-Culmination (§. 131. B. 1.) und für diese mitlere Zeit minus der Verspätung der Wirkung den Halbmesser des Mondes (§. 103. A.).

2. Finde die der mittleren astronomischen Zeit der Culmination des Mondes entsprechende wahre astronomische Zeit und für diese und den Halbmesser des Mondes entnimm aus der nautischen Tafel LI. die entsprechende Correction, wenn die Verspätung der Wirkung des Ortes ungefähr gleich der bei Berechnung der Tafel angenommenen, also ungefähr = 39,4 Stunden ist; anderen Falles kann man die Correction nach Formel (22) berechnen, oder wenn man sich diese Mühe nicht machen will, dieselbe doch aus Tafel LI. entnehmen, weil der dadurch entstehende Fehler nur klein ist.

3. Die mittlere astronomische Zeit des Hochwassers ist gleich der mittleren astronomischen Zeit der Mond-Culmination + der Hafenzeit (nautische Tafel LII.) ± der Correction (nautische Tafel LI.).

Anmerkung. Fällt die so gefundene mittlere astronomische Zeit des Hochwassers zwischen 12 und 24^h, so ist dieselbe — 12^h = der mittleren bürgerlichen Zeit Morgens des nächstfolgenden Tages. Will man aber in diesem Falle die nachmittägige mittlere Zeit des Hochwassers des gegebenen bürgerlichen Datums haben, so subtrahirt man ½ ☾ Tag oder im Mittel $12^h\ 25'$ von der gefundenen mittleren astronomischen Zeit; ist diese aber kleiner als $12^h\ 25'$ oder vielmehr als ½ ☾ Tag, so findet an dem gegebenen Tage Nachmittags kein Hochwasser statt. Genauer ist es indessen, wenn man in gedachtem Falle die mittlere astronomische Zeit der, der oberen Culmination vorhergegangenen, unteren Culmination des Mondes für den gegebenen Tag sucht (§. 131. C. 1.), für diese minus der Verspätung der Wirkung den Mondhalbmesser interpolirt und dann die mittlere Zeit des Hochwassers, wie vorhin angegeben, berechnet.

Wenn die gefundene mittlere astronomische Zeit des Hochwassers 24^h übersteigt, so ist der Ueberschuss über 24^h = der nachmittägigen mittleren Zeit des Hochwassers am folgenden Tage. Will man in diesem Falle die mittlere Zeit des Hochwassers Nachmittags für den gegebenen Tag haben, so muss man die Länge des letzten Mondtages, oder im Mittel $24^h\ 50'$ von der gefundenen, $24^h\ 50'$ übersteigenden Zeit des Hochwassers subtrahiren. Uebersteigt die gefundene Zeit des Hochwassers zwar 24^h, aber nicht die Länge des Mondtages, so subtrahirt man die Länge des halben Mondtages (im Mittel $12^h\ 25'$); wenn dann aber der Rest noch 12^h übersteigt, so findet an dem gegebenen bürgerlichen Tage Nachmittags kein Hochwasser statt. Genauer ist es indessen, wenn man, im

Falle die berechnete Zeit des Hochwassers $24^h\ 50'$ übersteigt, die obere Culmination des Mondes für den nächstvorhergehenden Tag berechnet (§. 131. B. 1.), für diese minus der Verspätung der Wirkung den Halbmesser des Mondes interpolirt und dann die Zeit des Hochwassers nach vorstehend gegebener Regel findet.

Aus einer bekannten Zeit des Hochwassers findet man die nächstfolgende mittlere Zeit des Hochwassers ungefähr, wenn man $12^h\ 25'$ addirt; die nächstvorhergehende ungefähre mittlere Zeit des Hochwassers aber ergiebt sich, wenn man $12^h\ 25'$ subtrahirt.

§. 200.

Regel. Die mittlere Zeit des Niedrigwassers zu finden.

Die mittlere Zeit des Hochwassers plus der Zeit, welche vom Hoch- bis Niedrigwasser verfliesst, ist gleich der mittleren Zeit des nächstfolgenden Niedrigwassers, und die mittlere Zeit des Hochwassers minus der Zeit, welche von Niedrig- bis Hochwasser verfliesst, ist gleich der mittleren Zeit des nächstvorhergegangenen Niedrigwassers.

Anmerkung. Ist die Zeit, welche von Hoch- bis Niedrigwasser oder von Niedrig- bis Hochwasser verfliesst, nicht bekannt, so nimmt man dafür $6^h\ 12'$.

Beispiel 1. Man soll am 9. Januar 1872 die mittlere Zeit des Hochwassers Nachmittags und Vormittags bei Nantes in $1^\circ,5$ WL. von Greenwich finden. Hafenzeit $6^h\ 14'$ und die Verspätung der Wirkung nahe 40^h.

Die WL. ist zu klein, als dass es nöthig wäre, die Culminationszeit des Mondes dafür zu interpoliren, und da am 9. Januar der Mond nicht durch den oberen Meridian in Greenwich geht, so ist in diesem Falle aus dem nautischen Jahrbuch zu nehmen

d. 8. Jan. ☾ Culmination = $22^h\ 55',5$ = ungef. mittl. Grw. Zt.
Zeitgl. = — $7'$
giebt w. Zt. d. ☾ C. = $22^h\ 48',5$
Verspätung der Wirkung . . . = 1 Tag 16^h
ungef. mittl. Greenw. Zeit d. 7. Jan. um $6^h\ 55',5$ Abends,
wofür der Halbmesser des Mondes = $16'\ 30''$ gefunden wird.

☾ Culm. nach m. Z. = $22^h\ 55',5$ d. 8. Jan.
Hafenzeit = + $6^h\ 14'$
Corr. Taf. LI. für $22^h\ 49'$
und $16'\ 30''$ Halbmesser = + $10',5$
Hochwasser den 8. Jan. um $29^h\ 20'$ mittl. Zeit,
» » 9. » um $5^h\ 20'$ mittl. Zeit Nachmittags,
Hochwasser den 9. Jan. um $4^h\ 48'$ mittl. Zeit Morgens.

Die mittlere Zeit des Hochwassers Vormittags findet man genauer wie folgt:

Naut. Jahrb. den 7. Januar ☾ Culm. = 21^h 51',3
den 8. Januar ☾ Culm. = 22^h 55',5
☾ Tag = 25^h 4',2

½☾ Tag = 12^h 32',1
den 7. Januar ☾ obere Culm. = 21^h 51',3
den 7. Januar ☾ untere Culm. = 34^h 23',4 mittl. Zeit,
den 8. Januar ☾ Culm. = 10^h 23',4
Hafenzeit = + 6^h 14',0
wahre Zt. d. unteren Culm. = 10^h 16' }
☾ Halbm. d. 6. Jan. 18^h 23' = 16' 24" } Corr. = + 14',5
Hochwasser den 8. Januar um 16^h 51',9 mittl. Zeit,
12^h
Hochwasser den 9. Januar um 4^h 51',9 mittl. Zt. Morg.,
mithin nur 4 Minuten grösser als vorher.

Lösung nach dem Hochwasser von London Brücke.

Hafenzeit bei { London Brücke = 2^h 7'
{ Nantes = 6^h 14'
Unterschied = 7^h 53'.

Am $\frac{9}{1}$ 72 Hochw. London Brücke	0^h 48'	13^h 17'
davon ab Diff. der Hafenz.	7^h 53'	7^h 53'
giebt Hochw. zu Nantes	4^h 55' Mrg. . . .	5^h 24' Abds.

Beispiel 2. 1872 den 9. April soll die mittl. Zeit des nachmittägigen Hochwassers bei Plymouth Dock gefunden werden.

Länge = 4°,2 West von Greenw.; Hafenzeit = 5^h 33'; Verspätung der Wirkung = 60^h; Zeitgl. = — 1',5 a. mittl. Zeit.

Naut. Jahrb. den 9. April ☾ obere Culm. = 1^h 16',7
den 10. April ☾ Culm. = 2^h 3',4
24^h : 0^h 17' = 46',7 : x
x = + 0',6
☾ obere Culm. = 1^h 17',3 m. Zt. d. 21. Apr.
Hafenzeit = + 5^h 33',0
☾ Culm. wahre Zeit = 1^h 16' }
☾ Halb. d. $\frac{6}{4}$ 13^h 34' = 15' 49" } Corr. Tf. I.I. = — 20',9 (berechn. — 22',7)
Hochwasser = 6^h 29',4 mittl. Zeit Nachmittags d. 9. April.

Lösung nach dem Hochwasser von London Brücke.

Hafenz. London Brücke = 2^h 7'
» Plymouth = 5^h 33'
Diff. = + 3^h 26'.

Am $\frac{9}{4}$ 72 Hochw. London Brücke 3^h 12'
Diff. + 3^h 26'
Hochw. Plymouth = 6^h 38' Abds.

Beispiel 3. 1872 den 18. Juli soll die mittl. Zeit des Hochwassers Nachmittags bei Ramsgate Pier gefunden werden.

Länge = 1°,4 Ost; Verspätung der Wirkung = 59^h; Hafenzeit = 11^h 46′; Zeitgl. = — 5′,8 a. mittl. Zeit.

Da hier die obere ☾ Culm. den 18ten + der Hafenzeit 12^h bedeutend übersteigt, so ist die nächstvorhergehende untere Culm. zu nehmen. Die Correction für OL. ist = 0 anzunehmen.

Naut. Jahrb. den 17. Juli ☾ obere Culm. = 9^h 21′,9
den 18. Juli ☾ » » = 10^h 25′,5

25^h 3′,6
½ ☾ Tag = 12^h 31′,8
9^h 21′,9

☾ untere Culm. den 17. Juli = 21^h 53′,7 mittl. Zeit.
Hafenzeit = + 11^h 46′,0

☾ Culm. wahre Zeit = 21^h48′ }
☾ Hbm. d. $\frac{15}{7}$ um 10^h 50′ = 16′ 0″ } Corr. Tf. LI. = + 19′,5

Hochwasser den 17. Juli um 33^h 59′,2
24^h

Hochwasser den 18. Juli um 9^h 59′,2 mittl. Zeit Abds.

Lösung nach dem Hochwasser von London Brücke.

Hafenzeit London Brücke = 2^h 7′
» Ramsgate Pier = 11^h 46′

Differenz = — 2^h 21′.
Am $\frac{18}{7}$ 72 Hochw. bei London Brücke = 12^h 17′
Diff. = — 2^h 21′

Hochw. Ramsgate Pier = 9^h 56′ Abds.

Beispiel 4. 1872 den 8. Februar soll die mittlere Zeit des Hochwassers Nachmittags bei Calcutta gefunden werden.

Länge = 88° 27′ Ost von Greenwich; Hafenzeit = 3^h 5′; Verspätung der Wirkung unbekannt; Zeitgl. = + 14′,4 a. wahre Zeit.

Naut. Jahrb. den 7. Februar ☾ obere Culm. = 23^h 46′,5
den 6. Februar ☾ » » = 22^h 43′,8

24^h : 5^h 54′ = 62′,7 : x

6^h | 4 15′,7
— 6′ | .60 — 0′,3

x = — 15′,4

☾ obere Culm. den 7. Februar = 23^h 31′,1
Hafenzeit = + 3^h 5′,0

☾ Culm. wahre Zeit = 23^h 17′ }
☾ Halbm. d. $\frac{6}{2}$ um 2^h 13′ = 16′ 34″ } Corr. Tf. LI. = + 5′,4

Hochwasser den 7. Februar um 26^h 41′,5 mittl. Zeit,
Hochwasser den 8. Februar um 2^h 41′,5 mittl. Zeit.

Beispiel 5. 1872 den 8. März (bürgerliche Zeit) soll die mittlere Zeit des Hochwassers und Niedrigwassers in New-York, East River, gefunden werden.

Länge = 74° 3′ W. von Greenwich; Hafenzeit = 8^h 54′; Verspätung der Wirkung unbekannt; Zeitgl. = — 10′,8 a. mittl. Zeit.

Naut. Jahrb. den 7. März ☾ Culm. = $23^h\ 25',2$
den 9. März ☾ Culm. = $0^h\ 17',3$

$24^h : 4^h\ 56' = 52',1 : x$

4^h	6	$8',7$
1	4	$2',2$
$-4'$	15	$-\ 0',1$

$x = +\ 10',8$

☾ Culm. den 7. März = $23^h\ 36',0$
Hafenzeit = + $8^h\ 54',0$

☾ Culm. wahre Zeit = $23^h\ 25',2$ }
☾ Halbm. d. $\frac{7}{3}$ um 13^h = $16'\ 22''$ } Corr. Tf. LI. = + $5',0$

Hochwasser den 7. März um $32^h\ 35'$ mittl. Zeit,
Hochwasser den 8. März um $8^h\ 35'$ m. Zt. Ab.
$6^h\ 13'$
Niedrigwasser den 8. März um $2^h\ 22'$ m. Zt. Ab.

§. 201.

Kauffahrer, die von einem Ostseehafen nach der Nordsee oder weiter nach Portugal und Spanien fahren und zufällig mit keinen astronomischen Tafeln versehen sein sollten, werden fast immer einen gewöhnlichen Kalender haben, in welchem die Zeit des Neumondes u. s. w. angegeben ist. Unter diesen Umständen kann die Zeit des Hochwassers wie folgt gefunden werden.

Regel. Die Zeit des Hochwassers mit Hülfe eines gewöhnlichen Kalenders ungefähr zu finden.

1. Subtrahire das astronomische Datum des jüngstvergangenen Neumondes (wenn die Zeit des Neumondes im gewöhnlichen Kalender des Morgens erfolgt, so ist das astronomische Datum um 1 kleiner, als das im Kalender angegebene bürgerliche Datum) vom gegebenen Datum, so ist der Rest das Alter des Mondes in Tagen.

2. Multiplicire das Alter des Mondes in Tagen ausgedrückt mit 0,8 (die ungefähre mittlere tägliche Verspätung des Mondes in Stunden), so ist das Product die astronomische wahre Zeit der oberen Culmination des Mondes.

3. Die so gefundene Culminationszeit + der Hafenzeit (nautische Tafel LI.) ist die astronomische Zeit des Hochwassers (Zeit vom Mittage gerechnet).

4. Uebersteigt die so gefundene Zeit des Hochwassers $12^h\ 24'$ oder $24^h\ 48'$, so subtrahire man im ersten Falle $12^h\ 24'$, im letzten Falle aber $24^h\ 48'$ und der Rest ist Abendzeit des gegebenen bürgerlichen Tages.

5. Jedenfalls bekommt man ungefähr die nächstvorhergehende Zeit des Hochwassers, wenn man $12^h\ 24'$ subtrahirt.

Beispiel 6. Berechne die in Beispiel 3. gegebene Aufgabe nach dieser Regel.

Nach dem Kalender fällt der Neumond auf den 5. um $6^h\ 25'$ Abds.; mithin ist das astronom. Datum des Neumondes 5.

Gegebenes Datum den		18. Juli,
Alter des Mondes	=	13 Tage,
		0,8
☾ culminirt den 18. Juli um		$10^h,4$ Nachmittags,
	=	10^h 24′
Hafenzeit	=	11^h 46′
Hochwasser den 18. Juli .	=	22^h 10′ astronom.
	=	12^h 24′
Hochwasser den 18. Juli .	=	9^h 46′ Abends,
		12^h 24′
Hochwasser den 18. Juli .	=	9^h 22′ Morgens.

§. 202.

Für den Fall, dass selbst kein gewöhnlicher Kalender zu Gebote stehen sollte, kann dennoch die ungefähre Zeit des Hochwassers wie folgt gefunden werden.

Vom Schaltjahr.

Die Länge eines tropischen Sonnenjahres ist nahe 365 Tage 6 Stunden; das gewöhnliche bürgerliche Jahr wird aber nur zu 365 Tagen gerechnet. Die hierdurch entstehende Differenz wird nahe dadurch ausgeglichen, dass man jedes vierte Jahr zu 366 Tagen annimmt, indem der Monat Februar zu 29 Tagen gerechnet wird; ein solches Jahr nennt man Schaltjahr. Es ergiebt sich daher folgende Regel, das Schaltjahr zu finden:

> Dividire die gegebene Jahreszahl durch 4 und wenn kein Rest bleibt, so ist es ein Schaltjahr; bleibt der Rest 1, 2 oder 3, so zeigt er, dass es das sovielste gemeine Jahr nach dem Schaltjahr sei.*)

Z. B. das Jahr 1874 ist das zweite Jahr nach dem Schaltjahr, denn $\frac{1874}{4}$ giebt den Rest = 2.

Von den Jahresepacten.

Die Jahresepacten geben das Alter des Mondes in Tagen beim Anfang des Jahres an, sie nehmen jährlich um 11 zu, welches der Ueberschuss eines gemeinen Jahres von 365 Tagen über ein Mondjahr von 354 Tagen = 12 synodischen Monden ist. Man hat ferner gefunden, dass der Mond alle Aspecten (Stellungen) in Bezug auf die Sonne in nahe 19 Jahren durchläuft, so dass am Ende dieser Periode, welche Mondzirkel genannt wird, die Neu- und Vollmonde an denselben Tagen des Monats und nahe zu derselben Stunde wiederkehren. Es ergiebt sich daher folgende Regel, die Jahresepacten zu finden:

> Dividire das gegebene Jahr durch 19, multiplicire den Rest mit 11 und das Product ist die Jahresepacte, wenn es nicht 29 übersteigt; wenn es aber 29 übersteigt, so dividirt man dasselbe durch 30 und der Rest ist dann die Epacte.

*) Es ist hierbei noch zu bemerken, dass nach dem Gregorianischen, oder Kalender neuen Styls drei Säcularjahre hintereinander, und zwar die Jahre 1700, 1800 und 1900 gemeine Jahre sind, und nur das vierte Säcularjahr ein Schaltjahr ist. Das Jahr 2000 ist daher ein Schaltjahr.

Beispiel. Die Epacte für das Jahr 1872 soll gefunden werden.

1872 : 19 = 98 und der Rest ist 10; 10 • 11 = 110, und 110 : 30 lässt 20 als Rest, welches die gesuchte Epacte ist.

Von den Monatsepacten.

Die Monatsepacten geben das Alter des Mondes beim Anfange des Monats in Tagen an, wenn es Neumond am 1. Januar gewesen ist, also wenn die Mondperiode mit dem Jahresanfang zusammenfällt. Es ergiebt sich daher folgende Regel, die Monatsepacten zu finden.

Dividire die vom Januar an bis zu Anfang des gegebenen Monats verflossenen Tage mit 29,53 (die Länge eines mittleren synodischen Monats) und drücke den Rest durch die nächst ganze Zahl aus, so ist diese die Monatsepacte. Hierbei ist zu beachten, ob das Jahr ein gemeines oder ein Schaltjahr ist, weil im letzteren Falle Februar 29 Tage hat.

Beispiel. Gesucht wird die Monatsepacte für September.

Von Anfang Januar bis Ende August sind im gemeinen Jahre 243 Tage verflossen; diese Zahl durch 29,53 dividirt, giebt den Quotienten 8 und den Rest 6,76, dessen nächst ganze Zahl 7 ist; mithin sind die Monatsepacten für September im gemeinen Jahre 7 und im Schaltjahre 8.

Führt man die Rechnung für alle 12 Monate durch, so ergeben sich folgende zwei Reihen für die Monatsepacten:

	Janr.,	Febr.,	März,	April,	Mai,	Juni,	Juli,	Aug.,	Septbr.,	Octbr.,	Novbr.,	Decbr.
Im gemeinen Jahre:	0	1	0	1	2	3	4	5	7	7	9	9
» Schaltjahre:	0	2	1	2	3	4	5	6	8	8	10	10

Regel. Das Alter des Mondes zu finden.

Addire die Jahresepacte, die Monatsepacte und die Datumzahl des gegebenen Tages; die Summe ist, wenn sie nicht 30 übersteigt, das Mondalter; ist sie aber über 30, so ziehe man 30 oder 60 davon ab und der Rest ist das verlangte Alter des Mondes.

Beispiel. Gesucht wird das Mondalter am 18. Juli 1872.

Die Jahresepacte für 1872 ergiebt sich . .	=	20
» Monatsepacte für Juli im Schaltjahre	=	5
Datum .	=	18
Mondalter .	=	13 Tage.

§. 203.

Regel. Die Zeit der Culmination des Mondes nach dem Alter desselben zu finden.

Multiplicire das Alter des Mondes in Tagen mit 0,8, so ist das Product gleich der wahren astronomischen Zeit der oberen Culmination des Mondes in Stunden.

Beispiel. Gesucht wird des Mondes obere Culmination den 18. Juli 1872.

Das Alter des Mondes ist vorstehend 13 Tage gefunden,
0,8
Culminationszeit des Mondes um $10{,}4^h$ wahre astron. Zeit.

Regel. Die Zeit des Hochwassers für ein gegebenes Datum und einen gegebenen Ort, dessen Hafenzeit bekannt ist, mittelst Epacten zu finden.

Zu der nach der letzten Regel gefundenen Culminationszeit des Mondes addire die Hafenzeit (nautische Tafel LII.); die Summe ist die astronomische wahre Zeit des Hochwassers für das gegebene Datum. Uebersteigt diese Summe $12^h\,24'$ oder $24^h\,48'$, so erhält man die Zeit des Hochwassers am Nachmittage des gegebenen Tages, wenn man im ersten Falle $12^h\,24'$, im zweiten Falle aber $24^h\,48'$ subtrahirt.

Beispiel 7. Die Aufgabe sei dieselbe wie in Beispiel 3.

Jahresepacte für 1872 . . . =	20	
Monatsepacte für Juli 1872 =	5	
Datum =	18	
	43	
	30	
Mondalter =	13	Tage,
	0,8	
☾ culminirt um	$10{,}4^h$	den 18. Juli,
	$= 10^h\,24'$	wahre Zeit Abends den 18. Juli,
Hafenzeit	$= 11^h\,46'$	
Hochwasser den 18. Juli um	$22^h\,10'$	wahre astronomische Zeit,
	$12^h\,24'$	
Hochwasser um	$9^h\,46'$	wahre Zeit Abends den 18. Juli,
	$12^h\,24'$	
Hochwasser um	$9^h\,22'$	wahre Zeit Morgens den 18 Juli.

§. 204.

Regel. Die Zeit des Hochwassers nach Tafel I. und Tafel II. zu finden.*)

1. Man suche in Tafel I. für das gegebene Jahr und den gegebenen Monat die Zahl und addire zu derselben das Datum; die Summe ist, wenn sie nicht 29 übersteigt, des Mondes Alter in Tagen, ist sie aber grösser, so subtrahirt man 30 und der Rest ist das gesuchte Alter des Mondes.

2. Für das Alter des Mondes sucht man in Tafel II. die Fluthverspätung und addirt zu derselben die Hafenzeit des gegebenen Ortes (nautische Tafel LII.), so ist die Summe gleich der astronomischen wahren Zeit des Hochwassers. Uebersteigt diese Zeit $12^h\,24'$ oder $24^h\,48'$, so zieht man im ersten Falle $12^h\,24'$ und im letzten Falle $24^h\,48'$ ab; der Rest ist die Zeit des Hochwassers am Nachmittage des gegebenen Tages. Subtrahirt man von diesem Reste wieder $12^h\,24'$, so erhält man die Zeit des Hochwassers am Vormittage des gegebenen Tages.

Von der Zeit des Hochwassers $6^h\,12'$ subtrahirt, giebt das nächst vorhergehende Niedrigwasser: addirt man aber zu der Zeit des Hochwassers $6^h\,12'$, so erhält man die Zeit des nächstfolgenden Niedrigwassers.

*) Die nach den folgenden Tafeln I. und II. gefundene Zeit des Hochwassers ist nächst der mit Hülfe der Ephemeriden berechneten (Tafel LI. und London Brücke) die genaueste, welches aus der Construction der Tafeln erhellet, die sich aus den Ueberschriften ergiebt.

Tafel I.

Summen der Jahres- und Monatsepacten.

Jahre.	Jan.	Febr. April.	März.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept. Oct.	Nov. Dec.
1871	9	11	10	12	13	14	15	17	19
1872	20	22	21	23	24	25	26	28	0
1873	1	3	2	4	5	6	7	9	11
1874	12	14	13	15	16	17	18	20	22
1875	23	25	24	26	27	28	29	1	3
1876	4	6	5	7	8	9	10	12	14
1877	15	17	16	18	19	20	21	23	25
1878	26	28	27	29	0	1	2	4	6
1879	7	9	8	10	11	12	13	15	17
1880	18	20	19	21	22	23	24	26	28
1881	0	2	1	3	4	5	6	8	10
1882	11	13	12	14	15	16	17	19	21
1883	22	24	23	25	26	27	28	0	2
1884	3	5	4	6	7	8	9	11	13
1885	14	16	15	17	18	19	20	22	24
1886	25	27	26	28	29	0	1	3	5
1887	6	8	7	9	10	11	12	14	16
1888	17	19	18	20	21	22	23	25	27
1889	28	0	29	1	2	3	4	6	8

Tafel II.

Fluthverspätung $= 48\frac{3}{4}'$ mal Alter des Mondes $\mp$ der mittleren Correction aus der nautischen Tafel LI.

(Die Fluthverspätung + Hafenzeit ist = der astronomischen Zeit des Hochwassers.)

Mondalter. Tage.	Fluthverspätung.	Mondalter. Tage.	Fluthverspätung.
0	^{h} 0′	15	12^h 9′
1	0 36	16	12 44
2	1 11	17	13 19
3	1 46	18	13 54
4	2 22	19	14 31
5	3 2	20	15 11
6	3 46	21	15 56
7	4 35	22	16 49
8	5 40	23	17 55
9	6 57	24	19 15
10	8 14	25	20 29
11	9 17	26	21 30
12	10 9	27	22 19
13	10 54	28	23 2
14	11 31	29	23 40
15	12 9	29,53	24 0

Beispiel 8. Berechne die in Beispiel 3. gegebene Aufgabe nach dieser Regel.

Gegebenes Datum den 18. Juli.
Für 1872 unter Juli findet man Tafel I. 25

43
30

Alter des Mondes = 13 Tage, wofür in Taf. II.
die Fluthverspätung = 10^h 54′ gefunden wird.
Hafenzeit = 11^h 46′

Hochwasser den 18. Juli um 22^h 40′ astronom. wahre Zeit,
12^h 24′

Hochwasser den 18. Juli um 10^h 16′ wahre Zeit Nachmittags.

Anmerkung.

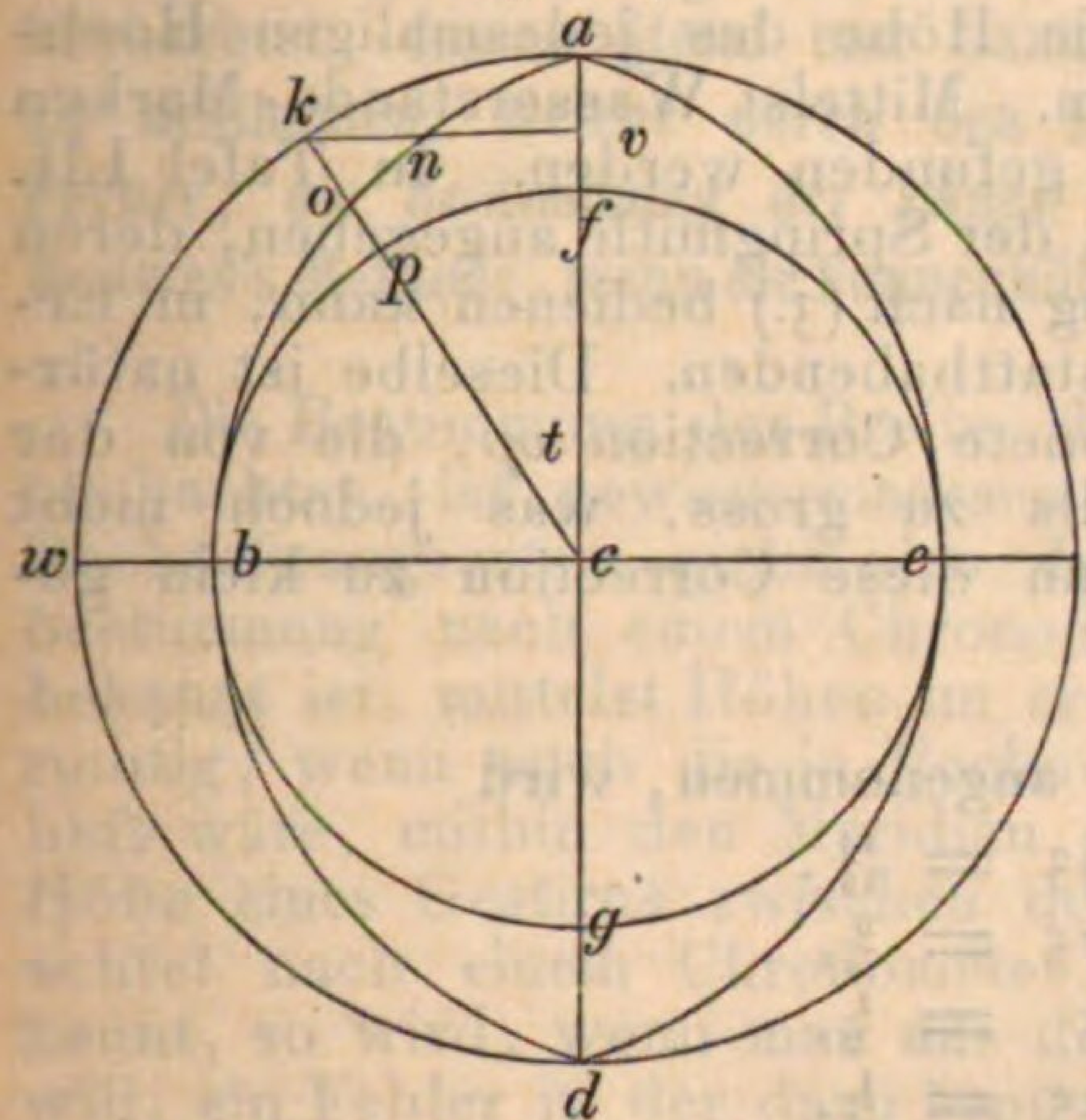
Wenn man die Verspätung der Wirkung kennt, könnte man aus einer an einem Orte beobachteten Zeit des Hochwassers die Hafenzeit dieses Ortes berechnen, weil

> Hafenzeit = der beobachteten Zeit des Hochwassers — (☾ Culmination ± der nach Formel (22.) in §. 198. zu berechnenden Correction — der Correction, die sich nach derselben Formel ergiebt, wenn $A = 0$ ist).

§. 205.

Ueber die Berichtigung der Lothung auf Niedrigwasser.

Fig. 107.



In Figur 107. sei c der Mittelpunkt der Erde, $af = h$ die Fluthhöhe am Orte a, das Wasser-Ellipsoid sei $abde$, dann würde man von der Lothung bei Hochwasser af abzuziehen haben, um dieselbe, für Niedrigwasser geltend, zu erhalten. Unter der Voraussetzung, dass an dem Orte a genau 6 Stunden zwischen Hoch- und Niedrigwasser liegen, würde man von der Lothung, die t Stunden vor oder nach Hochwasser gemacht wird, die Grösse op abziehen müssen, denn wenn die Fluthwelle sich von a nach e zu bewegt, so wird t Stunden nach Hochwasser bei a, der Punkt o zwischen f und a fallen und p in f sein. Es kommt also darauf an, op zu finden. Zu dem Zwecke sei $kv \perp ad$, $we \perp ad$, c Centrum der beiden concentrischen Kreise und der Ellipse; dann ist $\angle kca = t$, $wb = kp = af$ und Δkon als eben und bei o rechtwinklig anzusehen, worin $\angle kno = t$.

Nach §. 76. Gleichung (12.) der Ellipse hat man

$$wc : bc = kv : nv, \text{ woraus folgt}$$
$$wc : wc - bc = kv : kv - nv, \text{ das ist}$$
$$wc : wb = kv : kn, \text{ oder}$$
$$1 : h = \sin t : kn, \text{ also}$$
$$kn = h \cdot \sin t \quad \text{. (1.),}$$

denn setzt man den Radius $kc = 1$, so ist $kv = \sin t$.

Im Δkon ist, da $\angle kno = t$ (beide Complement von $\angle k$),

$$ko = kn \cdot \sin t,$$

und wenn aus (1.) der Werth für kn gesetzt wird, ergiebt sich

$$ko = h \cdot \sin^2 t \quad \text{. (2.).}$$

Es ist aber $op = kp - ko$, folglich nach dem Vorstehenden

$$op = h - h \cdot \sin^2 t,$$
$$= h(1 - \sin^2 t),$$
$$= h \cdot \cos^2 t \quad \text{. (3.).}$$

Nach (3.) kann man op leicht berechnen, wenn man h und t kennt. Ist nun die Zeit von Hochwasser bis Niedrigwasser 8 Stunden und von Niedrigwasser bis Hochwasser 4,4 Stunden an dem Orte der Lothung, so wird zur Berechnung von op nach (3.) für 2 Stunden vor und nach Hochwasser gemachten Lothungen zu nehmen sein:

$$\text{im ersten Falle } t = \frac{2}{4{,}4} \cdot 90^\circ = \frac{5}{11} \cdot 90^\circ = 40^\circ\ 55' \text{ und}$$

$$\text{im zweiten Falle } t = \frac{2}{8} \cdot 90^\circ = \frac{1}{4} \cdot 90^\circ = 22^\circ\ 30'.$$

Die Wassertiefen in den Seekarten beziehen sich auf den Wasserstand bei Niedrigwasser der mittleren Springfluth, die auf das Aequinoctium folgt, wenn der Mond in seinem mittleren Abstande von der Erde und seine Declination Null ist. Das Mittel aus den beiden Wasserständen bei Niedrigwasser zunächst vor und nach der mittleren Springfluth ist eigentlich der Wasserstand, für den die Lothungen in den Seekarten gelten. Demnach müsste h in (3.) die Höhe des jedesmaligen Hochwassers über diesem Niedrigwasser sein. Mittelst Wasserstands-Marken an den Küstenpunkten kann dieselbe gefunden werden. In Tafel LII. findet man aber die Fluthhöhe zur Zeit der Springfluth angegeben, deren man sich an Bord auch zur Berechnung nach (3.) bedienen kann, in Ermangelung der zur Zeit der Lothung statthabenden. Dieselbe ist natürlich zu gross, also die damit berechnete Correction op, die von der Lothung zu subtrahiren ist, ebenfalls zu gross, was jedoch nicht so nachtheilig werden kann, als wenn diese Correction zu klein gefunden würde.

Für den Radius = 1, wie bei (3.) angenommen, wird

$$\begin{aligned}
\cos^2 15^\circ &= 0{,}93 = \tfrac{14}{15},\\
\cos^2 30^\circ &= 0{,}75 = \tfrac{3}{4},\\
\cos^2 45^\circ &= 0{,}5 = \tfrac{1}{2},\\
\cos^2 60^\circ &= 0{,}25 = \tfrac{1}{4},\\
\cos^2 75^\circ &= 0{,}067 = \tfrac{1}{15},
\end{aligned}$$

folglich ist es ausreichend, wenn h nicht bedeutend, zu nehmen:

$$\begin{aligned}
op &= \tfrac{14}{15}\cdot h \text{ für } t = 15^\circ,\\
&= \tfrac{3}{4}\cdot h \text{ » } t = 30^\circ,\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot h \text{ » } t = 45^\circ,\\
&= \tfrac{1}{4}\cdot h \text{ » } t = 60^\circ,\\
&= \tfrac{1}{15}\cdot h \text{ » } t = 75^\circ.
\end{aligned}$$

Um aber eine Lothung auf Niedrigwasser möglichst genau reduciren zu können, ist nach Vorstehendem erforderlich für den Ort der gemachten Lothung:

1. die mittlere Ortszeit der Lothung,
2. die mittlere Ortszeit des Hochwassers,
3. die Zeitunterschiede von Niedrigwasser bis Hochwasser und umgekehrt,
4. die mittlere Springfluthhöhe, und wie viel die Fluth an dem Tage der Lothung höher oder niedriger als die mittlere Springfluth steht; denn, zur Ermittelung von t bedarf man der Angaben unter 1. bis 3., und zur Ermittelung von h der unter 4. Bei hydrographischen Vermessungen wird man so verfahren müssen, weil, wie schon angedeutet, die Lothungen auf den Wasserstand bei Niedrigwasser der mittleren Springfluth zu reduciren sind, bevor sie als Wassertiefen in den Seekarten vermerkt werden können.

§. 206.

Aus einer Höhe der Sonne in beliebigem Azimuth nach einem Chronometer beobachtet, dessen Stand und Gang bekannt ist, eine Linie in der Seekarte zu bestimmen, welche durch den Beobachtungsort geht (Sumner's Methode). Ferner, die Bestimmung der Länge mittelst Chronometer und der Breite nach Douwes's Methode, wenn die Sonnenhöhen in der Nähe des Meridians beobachtet sind.

Die Bestimmung der Breite, durch Höhen eines Gestirns im Meridian beobachtet, ist gewissermaassen ganz unabhängig von der Länge des Beobachtungsortes, giebt also den Parallel des letzteren. Die Längenbestimmung nach einem Chronometer, dessen Stand und Gang genau bekannt ist, mittelst Höhen im ersten Vertical, giebt die Länge fast ganz richtig, wenn auch die in Rechnung genommene Breite etwa 30′ fehlerhaft wäre, mithin den Meridian des Beobachtungsortes. Ist jedoch die Höhe eines Gestirns zwischen dem Meridian und ersten Vertical beobachtet nach einem Chronometer, dessen Stand und Gang man genau kennt, so wird, wenn man aus dieser Beobachtung die Länge berechnen will, ein Fehler in der dazu benutzten Breite einen desto grösseren Fehler in der Länge verursachen, je weiter das Gestirn vom ersten Vertical absteht, und wenn man aus derselben Beobachtung die Breite berechnen wollte, so würde ein Fehler in der Länge einen desto grösseren Fehler in der Breite hervorbringen, je weiter das Gestirn vom Meridian entfernt beobachtet worden ist. Man erhält also, wenn man auf See nach einem Chronometer, welches die mittlere Greenwicher Zeit richtig angiebt, die Höhe eines Gestirns — zwischen erstem Vertical und Meridian befindlich — beobachtet, aus dieser Höhe und der Declination des Gestirns nebst der Besteckbreite nicht die richtige Länge, und aus derselben Höhe und Declination, sowie dem Stundenwinkel aus der Bestecklänge und mittleren Greenwicher Zeit nach dem Chronometer abgeleitet, nicht die richtige Breite, wenn die in Rechnung genommene Breite bezw. Länge nach dem Besteck fehlerhaft ist, was fast immer der Fall sein wird, folglich keine bestimmte Linie, welche durch den Beobachtungsort geht. Die folgende Betrachtung führt indess zu einer Methode, nach der aus einer solchen Beobachtung immer doch eine bestimmte Linie gefunden werden kann, in welcher der Beobachtungsort liegt. Denkt man sich nämlich um die Sonne mit ihrer Zenithdistanz als Radius einen Kreis beschrieben, so liegen die Zenithe aller Orte auf der Erde, welche in demselben Augenblicke dieselbe Zenithdistanz der Sonne haben, in diesem kleineren Kreise, und diese Orte auf der Oberfläche der Erde liegen in einem ähnlichen kleineren Kreise, dessen Pol die Sonne im Zenith hat. Diese kleineren Kreise werden um so grösser sein, je grösser die Zenithdistanz, also je näher das Gestirn dem Horizonte beobachtet worden ist, und gehen in einen Punkt über, wenn die Zenithdistanz Null wird. Die Zenithdistanz der Sonne steht normal auf diesem kleineren Kreise an der Himmelskugel, und die grössten Kreisbögen auf der Erdoberfläche zwischen dem Punkte, in dessen Zenith die Sonne steht, und demjenigen kleineren Kreise, der durch die Orte geht, deren Zenithe in dem erwähnten kleineren Kreise an der Himmelskugel liegen, stehen ebenfalls normal auf jenem kleineren Kreise. Hierdurch wird es möglich, sobald der entsprechende kleinere Kreis auf der Oberfläche der Erde bestimmt ist, die Richtung der Sonne leicht angeben zu können. Wenn man nun mit der

aus der Beobachtung ermittelten wahren Höhe der Sonne, ihrer Declination und zwei gegissten Breiten zwei Längen, oder mit derselben Höhe, Declination und den entsprechenden Stundenwinkeln der Sonne — die aus zwei gegissten Längen und der mittleren Greenwicher Zeit nach dem Chronometer gefunden sind — zwei Breiten berechnet; so werden jedesmal zwei Punkte bestimmt, die in dem vorhin angegebenen kleineren Kreise auf der Erdoberfläche liegen, dessen Pol die Sonne im Augenblicke der Beobachtung im Zenith hatte. Wenn diese beiden Punkte einander ziemlich nahe stehen, der Bogen zwischen denselben also als gerade Linie angesehen werden kann, wird man, nachdem die Punkte auch in der Seekarte nach Länge und Breite niedergelegt worden sind, eine gerade Linie durch dieselben zu ziehen haben, in welcher oder in deren Verlängerung der Beobachtungsort sich befindet, und deren Lage nur von der beobachteten Höhe und der mittleren Greenwicher Zeit, die das Chronometer angiebt, abhängig ist. Wird in einem Punkte dieser Linie eine Normale auf dieselbe nach der Seite hin errichtet, auf welcher die Sonne sich befindet, so hat man die Richtung der letzteren und kann ihr Azimuth in der Karte messen.

Mittelst Construction in der Karte kann auch, wie später angegeben werden wird, leicht ermittelt werden, welchen Einfluss ein Fehler in der Höhe und Breite oder Höhe und Länge auf die gesuchte Länge bezw. Breite haben kann. Da dem Vorstehenden nach die auf die angegebene Weise ermittelte Linie in der Karte normal auf der Richtung der Sonne steht, so muss jene Linie nahe in einen Meridian fallen, wenn die Sonne in der Nähe des ersten Verticals, und nahe in einen Breitenparallel, wenn diese nahe dem Meridian beobachtet worden ist. Wenn die Sonne nun bei dieser Beobachtung näher dem ersten Vertical als dem Meridian steht, so ist es am zweckmässigsten, mit zwei gegissten Breiten zwei Längen zu berechnen, und wenn sie näher dem Meridian als dem ersten Vertical beobachtet wird, so würde man mit zwei gegissten Längen die entsprechenden Stundenwinkel der Sonne ermitteln, und mit diesen, der Höhe und Declination zwei Breiten zu berechnen haben. Es ist einleuchtend, dass die Methode um so genauer wird, je kleiner die Höhe der Sonne ist — von der Unsicherheit der Refraction abgesehen —, weil dann der kleinere Kreis sich dem grössten Kreise nähert, und die Linie zwischen beiden Punkten als eine gerade angesehen werden kann. Die beiden gegissten Breiten oder Längen können meistens so gewählt werden, dass die richtige Breite bezw. Länge des Beobachtungsortes zwischen beide fällt; nothwendig ist dies jedoch nicht.

Diese Methode ist von derjenigen nicht wesentlich verschieden, die gewöhnlich angewandt wird, um mittelst einer Längen- oder Breiten-Beobachtung das Besteck zu berichtigen; es gewährt aber die Linie, in welcher der Beobachtungsort sich befindet, den Vortheil, dass, wenn der Beobachter mit seinem Schiffe in der Nähe des Landes segelt, die Verlängerung dieser Linie die Richtung des Landes, welches sie in der Karte trifft, also die Peilung desselben vom Schiffe aus, angiebt; läuft diese Linie aber parallel mit der Küste, so giebt sie zwar nicht die Richtung eines Punktes derselben vom Schiffe aus an, wohl aber dient sie zur Bestimmung des Abstandes dieses letzteren von der Küste.

Die Anwendung dieser Methode ist denjenigen Seeleuten, welche zur Bestimmung der Länge nach dem Chronometer sich nur der Sonne bedienen, dann zu empfehlen, wenn diese nicht im ersten Vertical beobachtet werden kann, und Sonnenhöhen, zur Douwes'schen Methode geignete, nicht beobachtet worden sind.

Da eine Höhe der Sonne für den Beobachtungsort eine Linie giebt, so muss eine spätere Sonnenhöhe an demselben Orte beobachtet, eine zweite Linie geben. Wenn diese beiden Höhen ziemlich verschiedene Azimuthe haben, so werden diese beiden Linien sich unter einem nicht zu spitzen Winkel schneiden, und der Schnittpunkt derselben (Beobachtungsort in der Karte) wird möglichst genau werden, von dem nur Breite und Länge zu messen sind. Hat aber der Beobachter zwischen beiden Höhen seinen Ort verändert, wie dies auf See fast immer der Fall sein wird, so hat man, nachdem beide Linien in der Karte niedergelegt sind, Curs und Distanz von dem ersten Orte nach dem zweiten, von einem beliebigen Punkte der Linie des ersten Ortes aus abzutragen, und durch den Endpunkt dieser Curslinie eine Parallele mit der Linie des ersten Beobachtungsortes zu ziehen, bis die Linie des zweiten Ortes von dieser Parallelen durchschnitten wird, welcher Schnittpunkt dann der Ort des Schiffes im Augenblicke der zweiten Beobachtung ist, von dem Breite und Länge nur gemessen werden dürfen.

Nachdem der Ort des Schiffes so ermittelt ist, lässt sich auch in der Karte der Einfluss bestimmen, den ein Fehler in der Breite auf die berechnete Länge, oder ein Fehler in der Länge auf die berechnete Breite hat. Construirt man nämlich ein ebenes rechtwinkliges Dreieck, so dass seine Hypotenuse in die gefundene Linie fällt, und die Katheten desselben parallel mit der Längen- bezw. Breitenscale sind, so ist, die Kathete, parallel mit der Breitenscale, gleich dem Fehler in der Breite auf der Breitenscale genommen, die andere Kathete auf der Längenscale gemessen, der entsprechende Fehler in der Länge. Der Einfluss, den ein Fehler der Höhe auf Länge und Breite hervorbringt, kann auf ähnliche Weise ermittelt werden. Man mache ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete in die gefundene Linie fällt, die andere Kathete gleich dem Fehler in der Höhe genommen (auf der Breitenscale gemessen), so ist die Hypotenuse parallel mit der Breitenscale gezogen und auf der Breitenscale gemessen, der entsprechende Fehler in der Breite, und die Hypotenuse parallel mit der Längenscale — in einem anderen Dreieck — auf dieser gemessen, der entsprechende Fehler in der Länge.

Der günstigste Fall für diese Methode ist derjenige, wenn die eine Sonnenhöhe des Vormittags und die andere des Nachmittags beobachtet ist. Zur möglichst genauen Bestimmung des Schnittpunktes der beiden Linien für ein und denselben Ort geltend, gehört jedoch auch eine Karte, die nach einem nicht zu kleinen Maassstabe construirt ist, wie z. B. die Preussischen Segelkarten oder die Nordseekarten.

Auf die hier vorgetragene Methode, den Ort des Schiffes zu bestimmen, machte zuerst Capitain Sumner aufmerksam, und sie ist, wie bereits erwähnt, denjenigen Seeleuten zu empfehlen, welche in höheren Breiten Seereisen während des Winters machen, mit einem guten Chronometer versehen sind, zur Längenbestimmung nach demselben sich auf die Beobachtung von Sonnenhöhen beschränken, und die Douwes'sche Methode nicht anwenden können oder wollen.

Zur näheren Erläuterung der Sumner'schen Methode dienen die folgenden beiden Beobachtungen. Aus jeder derselben werden mit zwei gegissten Breiten die entsprechenden Längen berechnet und demnächst die vier Punkte nach diesen Breiten und Längen in der wachsenden Karte (Fig. 108.) bestimmt. Hiernach wird der Schnittpunkt der beiden

Linien, in welchem das Schiff nach der Vor- und Nachmittagsbeobachtung im Augenblicke der letzteren ist, durch Construction gefunden und dessen Länge und Breite angegeben.

1856 den 3. October, nach der Beobachtung auf 59° 0′ NBr. und 1° 30′ OL. von Greenwich ist bei 20′ Rheinl. Augeshöhe beobachtet nach Beobachtungsuhr um $9^h\,8'\,28''$ ⨀ 18° 13′,5.

Bei der Beobachtung war Beobachtungsuhr $0^h\,10'\,20''$ vor Chronometer, dessen Stand am 1. October zur Zeit des mittl. Mittags in Grw. 6′ 32″ vor der mittl. Grw. Zeit war und täglich 5″,6 gegen mittl. Zeit zurückbleibt. I. C. = — 1′,5.

Beobacht.-Uhr zeigte	$= 9^h\ 8'\ 28''$. . . ⨀		$18°\ 13',5$
B.-Uhr vor Chronom.	$= 0^h\ 10'\ 20''$	I. C.	$—\ 1',5$
Chronometer zeigte . .	$= 8^h\ 58'\ 8''$		$18°\ 12',0$
Stand d. Chr. d. 1. Oct.	$= —\ 6'\ 32''$	Kimmt. . .	$= —\ 4',4$
	$8^h\ 51'\ 36''$		$18°\ 7',6$
Corr. für Gang d. Chr.	$= +\ 10'',5$	⨀ Halbm.	$= +\ 16',0$
Mittlere Greenw. Zeit			$18°\ 23',6$
Morg. d. 3. Oct. . .	$= 8^h\ 51'\ 46'',5.$	Ref. — P. .	$= —\ 2',7$
		h	$= 18°\ 20',9.$
		⨀ Decl.	$= —\ 4°\ 5'\ 31''.$
		Zeitgl.	$= —\ 11'\ 2'',17$
			a. wahre Zeit.

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

φ	$= + 59°\ 0'$	log sec	$= 0{,}28816$
δ	$= —\ 4°\ 5',5$	log sec	$= 0{,}00111$
$\varphi - \delta$	$= 63°\ 5',5$	n. cos $= 45256$	
h	$= 18°\ 20',9$	n. sin $= 31479$	
		13777 log	$= 4{,}13915$
t	$= 2^h\ 51'\ 50'',5$	log $(2 \sin^2 \frac{1}{2} t)$. . .	$= 4{,}42842$
wahre Schiffszeit . . .	$= 9^h\ 8'\ 9'',5$	Morgens den 3. October,	
Zeitgl.	$= — 11'\ 2'',2$	auf wahre Zeit,	
mittl. Schiffszeit . . .	$= 8^h\ 57'\ 7'',3$	Morgens den 3. October,	
mittl. Greenw. Zeit . .	$= 8^h\ 51'\ 46'',5$	Morgens den 3. October,	
	$0^h\ 5'\ 20'',8$	OL. in Zeit,	
Länge	$= 1°\ 20',2$	Ost v. Grw. d. Br. 59° 0′ N. entsprechend.	

φ	$= + 59°\ 30'$	log sec	$= 0{,}29453$
δ	$= —\ 4°\ 5',5$	log sec	$= 0{,}00111$
$\varphi - \delta$	$= 63°\ 35',5$	n. cos $= 44477$	
h	$= 18°\ 20',9$	n. sin $= 31479$	
		12998 log	$= 4{,}11388$
t	$= 2^h\ 47'\ 57'',9$	log $(2 \sin^2 \frac{1}{2} t)$. . .	$= 4{,}40952$
wahre Schiffszeit . . .	$= 9^h\ 12'\ 2'',1$	Morgens den 3. October,	
Zeitgl.	$= — 11'\ 2'',2$	auf wahre Zeit,	
mittl. Schiffszeit . . .	$= 9^h\ 0'\ 59'',9$	Morgens den 3. October,	
mittl. Greenw. Zeit . .	$= 8^h\ 51'\ 46'',5$	Morgens den 3. October,	
	$0^h\ 9'\ 13'',4$	OL. in Zeit,	
Länge	$= 2°\ 18',4$	Ost v. Grw. d. Br. 59° 30′ N. entsprechend.	

Nach obiger Beobachtung ist gesegelt nach Compass und Logg SO ½ S. 18,5 Seem.; Missweisung 24°,5 West, und dann wieder beobachtet nach Beobachtungsuhr um $2^h\ 15'\ 21''$ ⨀ 21° 20'.

Stand und Gang des Chronometers wie vorher. Beobachtungsuhr war bei der Beobachtung $0^h\ 10'\ 23''$ vor Chronometer.

Rechtw. Curs = S. 64° Ost, Dist. = 18,5 Seem.

Die veränd. Breite = 0° 8',1 S.	Mittelbr. = 58° 56'	Abweichung . . = 16,6 Seem. O.	
verlassene Breite = 59° 0' N.		veränd. Länge . = 0° 32',2 O.	
erreichte Breite . . = 58° 51',9 N.		verlass. Länge = 1° 30' O.	
		erreichte Länge = 2° 2',2 O.	

Beobacht.-Uhr zeigte = $2^h\ 15'\ 21''$. . .	⨀ 21° 20'
B.-Uhr vor Chronom. = $0^h\ 10'\ 23''$	I. C. — 1',5
Chronometer zeigte . . = $2^h\ 4'\ 58''$	21° 18',5
Stand d. Chr. d. 1. Oct. = — 6' 32''	Kimmt. . . = — 4',4
$1^h\ 58'\ 26''$	21° 14',1
Corr. für Gang d. Chr. = + 11'',7	⨀ Halbm. = + 16',0
Mittlere Greenw. Zeit	21° 30',1
Mittags d. 3. Oct. . . = $1^h\ 58'\ 37'',7$.	Ref. — P. . = — 2',3
	h = 21° 27',8.
	⨀ Decl. = — 4° 10' 27''.
	Zeitgl. . = — 11' 6'',02 auf wahre Zeit.

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos\varphi \cdot \cos\delta}$$

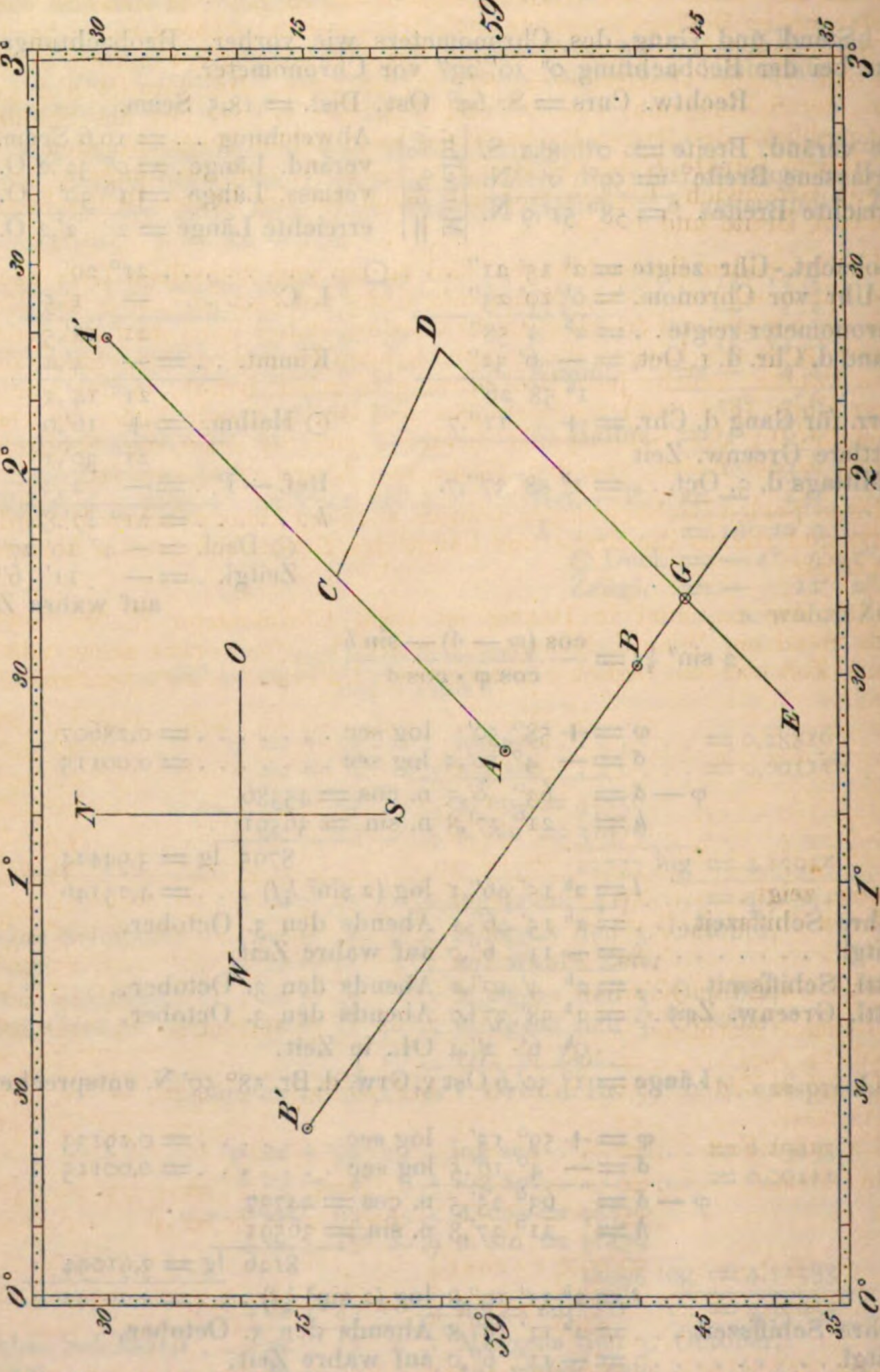
$\varphi = +\ 58°\ 50'$ log sec = 0,28607
$\delta = -\ 4°\ 10',5$ log sec = 0,00115
$\varphi - \delta =$ 63° 0',5 n. cos = 45386
$h =$ 21° 27',8 n. sin = 36591
8795 lg = 3,94424
$t = 2^h\ 15'\ 46'',1$ log ($2\sin^2 \frac{1}{2}t$) . . . = 4,23146

wahre Schiffszeit . . . = $2^h\ 15'\ 46'',1$ Abends den 3. October,
Zeitgl. = — 11' 6'',0 auf wahre Zeit,
mittl. Schiffszeit . . . = $2^h\ 4'\ 40'',1$ Abends den 3. October,
mittl. Greenw. Zeit . . = $1^h\ 58'\ 37'',7$ Abends den 3. October,
$0^h\ 6'\ 2'',4$ OL. in Zeit,
Länge = 1° 30',6 Ost v. Grw. d. Br. 58° 50' N. entsprechend.

$\varphi = +\ 59°\ 15'$ log sec = 0,29133
$\delta = -\ 4°\ 10',5$ log sec = 0,00115
$\varphi - \delta =$ 63° 25',5 n. cos = 44737
$h =$ 21° 27',8 n. sin = 36591
8146 lg = 3,91094
$t = 2^h\ 11'\ 19'',8$ log ($2\sin^2 \frac{1}{2}t$) . . . = 4,20342

wahre Schiffszeit . . . = $2^h\ 11'\ 19'',8$ Abends den 3. October,
Zeitgl. = — 11' 6'',0 auf wahre Zeit,
mittl. Schiffszeit . . . = $2^h\ 0'\ 13'',8$ Abends den 3. October,
mittl. Greenw. Zeit . . = $1^h\ 58'\ 37'',7$ Abends den 3. October,
$0^h\ 1'\ 36'',1$ OL. in Zeit.
Länge = 0° 24',0 Ost v. Grw. d. Br. 59° 15' N. entsprechend.

Fig. 108.



Die Mercator'sche Karte (Fig. 108.) erstreckt sich von 0° bis 3° Ostlänge und von 58° 35′ bis 59° 35′ NBr.

Die beiden Punkte der ersten Beobachtung nach Länge und Breite in dieser Karte abgetragen, sind A und A', das Schiff ist also hiernach

in der geraden Linie AA', und die beiden Punkte der zweiten Beobachtung nach Länge und Breite darin niedergelegt, sind B und B', das Schiff ist also nach dieser letzten Beobachtung in BB'; da dasselbe aber von dem ersten Beobachtungsorte nach dem zweiten rechtweisend S. 64° O. 18,5 Seem. gesegelt und diese Curslinie von dem beliebigen Punkte C in der Linie AA' richtig abgetragen $= CD$ ist, so muss, DE parallel $A'A$ gezogen, der Schnittpunkt von DE und $B'B$, hier G, der Ort des Schiffes im Augenblicke der letzten Beobachtung nach beiden Beobachtungen sein. Von diesem Punkte G ist die Breite 58° 46',1 N. und die Länge 1° 41',6 Ost von Greenwich, folglich war das Schiff bei der letzten Beobachtung auf dieser Breite und Länge.

Die folgenden Beobachtungen sind an ein und demselben Orte nach einem Chronometer, dessen Stand und Gang bekannt ist, näher am Meridian als am ersten Vertical gemacht worden, daher wird man aus jeder mit zwei gegissten Längen die entsprechenden Breiten zu berechnen, die beiden Punkte, welche jede Beobachtung hiernach liefert, in der wachsenden Karte (Fig. 109.) niederzulegen und durch gerade Linien zu verbinden haben; der Schnittpunkt beider Linien ist dann der Beobachtungsort in der Karte, von dem Breite und Länge zu messen ist.

Diese beiden Beobachtungen können auch zur Douwes'schen Methode benutzt und daraus die Breite und Länge des Beobachtungsortes berechnet werden.

1857 den 24. Juni in Danzig ist nach Chronometer K. No. 1267, dessen Stand am $\frac{24}{6}$ mittl. Mittags in Greenw. 19' 3",0 voraus gegen mittl. Greenw. Zeit war und täglich 1",2 accelerirt, I. C. = + 1' 21", beobachtet:

	9^h 37' 20",7	 ☉̬	109° 14' 30"
	37' 42"		18' 10"
	38' 8",8		22' 20"
	38' 31"		26' 40"
	38' 53",5		30' 20"
	39' 14",3		34' 20"
Chronom. zeigt =	9^h 38' 18",4	☉̬	109° 24' 35"
Stand des Chron. d. $\frac{23}{6}$ =	— 19' 4",2	I. C. . . . =	+ 1' 21"
=	9^h 19' 14",2		109° 25' 56"
Correct. f. Gang Chr. K. =	— 0' 1",1		54° 42' 58"
Mittl. Greenw. Zeit Morgens d. 24. Juni =	9^h 19' 13",1	☉ Halbm. =	+ 15' 46"
			54° 58' 44"
Geg. O. Lg. in Zeit . . . =	1^h 13' 0"	Ref. — Par. =	— 0' 35"
Mittl. Ortszeit =	10^h 32' 13",1	h . . . =	54° 58' 9".
Zeitgl. a. mittl. Zeit . . =	— 2' 2",1		
Wahre Ortszeit =	10^h 30' 11"	☉ Decl. =	+ 23° 25' 54".
t . . =	1^h 29' 49".	Zeitgl. a. w. Zt. =	+ 2' 2",1.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} N \ldots\ldots = \operatorname{cotg} \delta \cdot \cos t \\ \sin(\varphi + N) = \dfrac{\sin h}{\sin \delta} \cdot \cos N \end{array}\right\} \ldots \text{(III. §. 164.)}.$$

δ . . . = 23° 25',9	lg cotg = 0,363116		lg cosec	= 0,400493
t . . . = 1^h 29' 49"	lg cos = 9,965759	h = 54° 58',1	lg sin	= 9,913196
N . . = 64° 52',6	lg tg = 0,328875		lg cos	= 9,627947
$\varphi + N$ = 119° 2',6			lg sin	= 9,941636

Breite = 54° 10',0 N. der Länge 18° 15' Ost entsprechend.

Mittl. Greenw. Zeit . . . =	$9^h\ 19'\ 13'',1$
Geg. O. Lg. in Zeit . . . =	$1^h\ 17'\ 0''$
Mittl. Ortszeit =	$10^h\ 36'\ 13'',1$
Zeitgl. a. mittl. Zeit . . =	$-\ 2'\ 2'',1$
Wahre Ortszeit =	$10^h\ 34'\ 11''$
t . . =	$1^h\ 25'\ 49''$.

δ . . . =	$23^\circ\ 25',9$	lg cotg = 0,363116		lg cosec = 0,400493
t . . . =	$1^h\ 25'\ 49''$	lg cos = 9,968814	$h = 54^\circ\ 58',1$	lg sin = 9,913196
N . . =	$65^\circ\ 1',8$	lg tg = 0,331930		lg cos = 9,625460
$\varphi + N$ =	$119^\circ\ 37',6$	. .		lg sin = 9,939149

Breite = $54^\circ\ 35',8$ N. der Länge $19^\circ\ 15'$ Ost entsprechend.

Einige Stunden später ist nach demselben Chronometer beobachtet:

		I. C. + $1'\ 27''$
$12^h\ 8'\ 7'',3$	$\underline{\odot}$	$113^\circ\ 26'\ 50''$
$8'\ 32'',3$		$23'\ 40''$
$8'\ 51'',3$		$21'\ 0''$
$9'\ 9'',9$		$19'\ 10''$
$9'\ 30'',8$		$16'\ 5''$
$9'\ 51'',4$		$13'\ 10''$

Chronom. zeigte =	$12^h\ 9'\ 0'',5$	$\underline{\odot}$	$113^\circ\ 19'\ 59''$
Stand d.Chron.d.24.Juni =	$-\ 19'\ 5'',5$	I. C. =	$+\ 1'\ 27''$
	$11^h\ 49'\ 55''$		$113^\circ\ 21'\ 26''$
Correct.f.GangChron.K. =	$0''$		$56^\circ\ 40'\ 43''$
Mittl. Greenw. Zeit Mit-		$\odot$ Halbm. =	$+\ 15'\ 46''$
tags den 24. Juni . . . =	$11^h\ 49'\ 55''$		$56^\circ\ 56'\ 29''$
Geg. O. Lg. in Zeit . . . =	$1^h\ 13'\ 0''$	Ref. — Par. =	$-\ 0'\ 36''$
Mittl. Ortszeit =	$1^h\ 2'\ 55''$	h =	$56^\circ\ 55'\ 53''$.
Zeitgl. a. mittl. Zeit . . =	$-\ 2'\ 3'',5$	$\odot$ Decl. =	$+\ 23^\circ\ 25'\ 48''$.
Wahre Ortszeit = t . . =	$1^h\ 0'\ 51'',5$.	Zeitgl. a. w. Zt. =	$+\ 2'\ 3'',5$.

$$\operatorname{tg} N \ldots = \operatorname{cotg} \delta \cdot \cos t,$$

$$\sin(\varphi + N) = \frac{\sin h}{\sin \delta} \cdot \cos N.$$

δ . . . =	$23^\circ\ 25',8$	lg cotg = 0,363150		lg cosec = 0,400522
t . . . =	$1^h\ 0'\ 51'',5$	lg cos = 9,984504	$h = 56^\circ\ 55',9$	lg sin = 9,923255
N . . =	$65^\circ\ 48',9$	lg tg = 0,347654		lg cos = 9,612449
$\varphi + N$ =	$120^\circ\ 17',8$	. .		lg sin = 9,936226

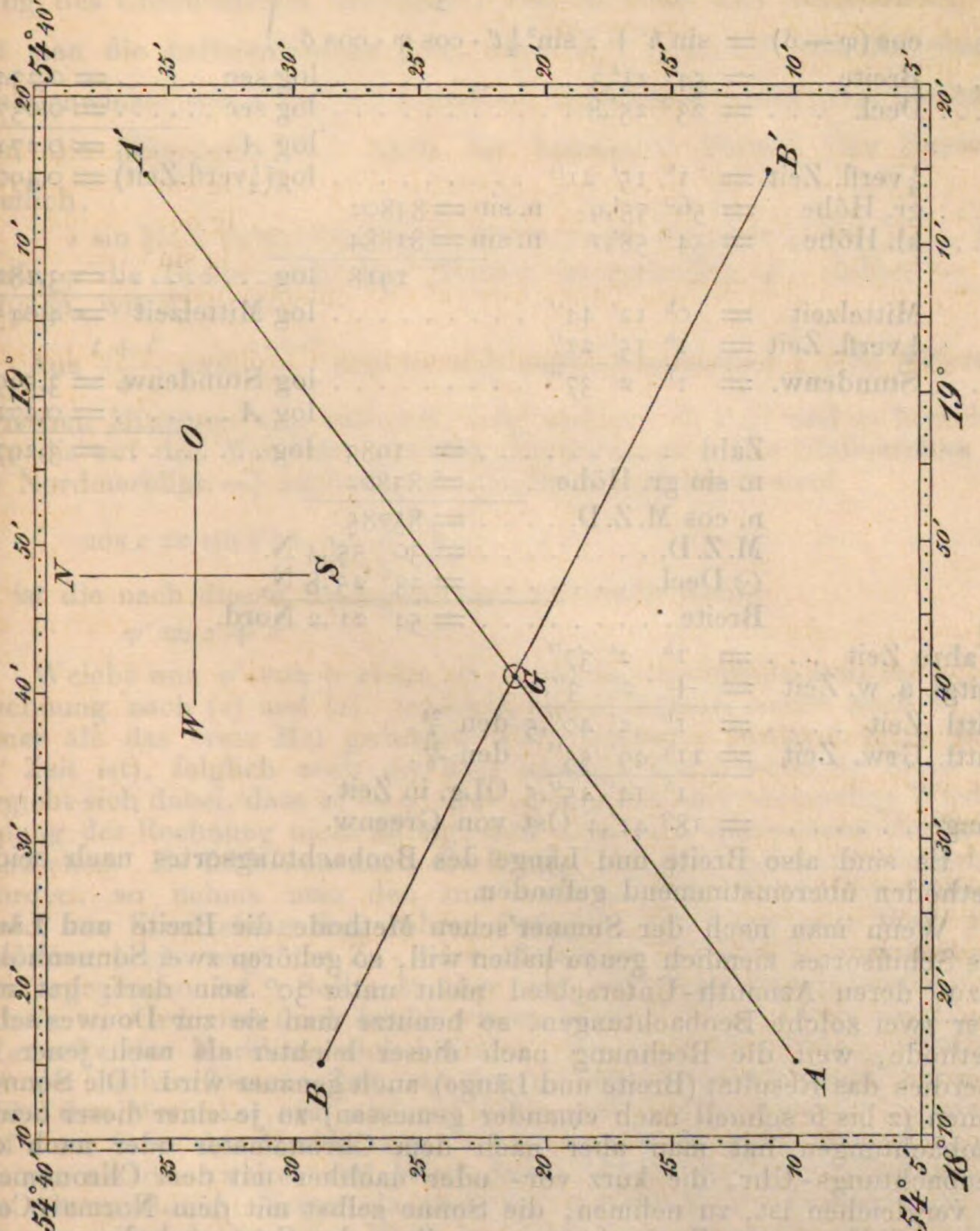
Breite = $54^\circ\ 28',9$ N. der Länge $18^\circ\ 15'$ Ost entsprechend.

Mittl. Greenw. Zeit . . . =	$11^h\ 49'\ 55''$
Geg. O. Lg. in Zeit . . . =	$1^h\ 17'\ 0''$
Mittl. Ortszeit =	$1^h\ 6'\ 55''$
Zeitgl. a. mittl. Zeit . . =	$-\ 2'\ 3'',5$
Wahre Ortszeit = t . . =	$1^h\ 4'\ 51'',5$.

δ . . . =	$23^\circ\ 25',8$	lg cotg = 0,363150		lg cosec = 0,400522
t . . . =	$1^h\ 4'\ 51'',5$	lg cos = 9,982372	$h = 56^\circ\ 55',9$	lg sin = 9,923255
N . . =	$65^\circ\ 42',6$	lg tg = 0,345522		lg cos = 9,614217
$\varphi + N$ =	$119^\circ\ 53',6$	. .		lg sin = 9,937994

Breite = $54^\circ\ 11',0$ N. der Länge $19^\circ\ 15'$ Ost entsprechend.

Fig. 109.



Die Mercator'sche Karte (Fig. 109.) erstreckt sich von 18° 10′ bis 19° 20′ Ostlänge und von 54° 5′ bis 54° 40′ Nordbreite.

Die beiden Punkte der ersten Beobachtung nach Länge und Breite in dieser Karte abgetragen, sind *A* und *A′*, der Beobachtungsort ist also hiernach in der geraden Linie *AA′*, und die beiden Punkte der zweiten Beobachtung nach Länge und Breite darin niedergelegt, sind *B* und *B′*, der Beobachtungsort ist also nach dieser letzten Beobachtung in *BB′*, mithin der Schnittpunkt derselben, hier *G*, der Ort nach beiden Beobachtungen. Von diesem Punkte *G* ist die Breite 54° 21′,3 N. und die Länge 18° 41′ Ost von Greenwich.

Benutzt man nun die beiden Beobachtungen zur Douwes'schen Methode, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} 2\sin\frac{t+t'}{2} &= \frac{\sin h' - \sin h}{\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\sin\frac{t-t'}{2}}; \\ \cos(\varphi-\delta) &= \sin h' + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cdot\cos\varphi\cdot\cos\delta. \end{aligned}\right\}\ \text{(I. u. IV. §. 181.)}$$

φ ... Breite ... = 54° 21',3 log sec = 0,23451
δ ... Decl. ... = 23° 25',8 log sec = 0,03737
log A = 0,27188
$\frac{1}{2}$verfl. Zeit = 1^h 15' 21" log($\frac{1}{2}$verfl. Zeit) = 0,49095
h' ... gr. Höhe = 56° 55',9 n. sin = 83802
h ... kl. Höhe = 54° 58',1 n. sin = 81884
1918 log = 3,28285
Mittelzeit = 0^h 12' 44" log Mittelzeit = 4,04568
$\frac{1}{2}$verfl. Zeit = 1^h 15' 21"
t' ... Stundenw. = 1^h 2' 37" log Stundenw. = 3,56928
log A = 0,27188
Zahl = 1983 log = 3,29740
n. sin gr. Höhe. ... = 83802
n. cos M.Z.D. = 85785
M.Z.D. = 30° 55',4 N.
⊙ Decl. = 23° 25',8 N.
Breite = 54° 21',2 Nord.

Wahre Zeit ... = 1^h 2' 37"
Zeitgl. a. w. Zeit = + 2' 3",5
Mittl. Zeit = 1^h 4' 40",5 den $\frac{24}{6}$.
Mittl. Grw. Zeit = 11^h 49' 55" den $\frac{24}{6}$.
1^h 14' 45",5 OLg. in Zeit,
Länge = 18° 41',4 Ost von Greenw.

Es sind also Breite und Länge des Beobachtungsortes nach beiden Methoden übereinstimmend gefunden.

Wenn man nach der Sumner'schen Methode die Breite und Länge des Schiffsortes ziemlich genau haben will, so gehören zwei Sonnenhöhen dazu, deren Azimuth-Unterschied nicht unter 30° sein darf; hat man aber zwei solche Beobachtungen, so benutze man sie zur Douwes'schen Methode, weil die Rechnung nach dieser leichter als nach jener ist, überdies das Resultat (Breite und Länge) auch genauer wird. Die Sonnenhöhen (2 bis 6 schnell nach einander gemessen) zu je einer dieser beiden Beobachtungen hat man aber nach dem Chronometer oder nach der Beobachtungs-Uhr, die kurz vor- oder nachher mit dem Chronometer zu vergleichen ist, zu nehmen, die Sonne selbst mit dem Normal-Compasse bei der ersten Beobachtung zu peilen, den Curs nach diesem sowie die gesegelte Distanz bis zur zweiten Beobachtung zu notiren und das Besteck für den Ort der letzteren aufzumachen. Hiernach nehme man die arithmetischen Mittel aus den Chronometer- bezw. Uhrzeiten und Höhen der bezüglichen Beobachtungen, wende auf erstere die entsprechende Vergleichung der Beobachtungs-Uhr mit dem Chronometer regelrecht an, wenn nach jener beobachtet, so hat man die Chronometerzeiten; dann reducire man die Mittel der Höhen auf den wahren Horizont, und auf die erste dieser Höhen wende man noch die Berichtigung wegen Segelung an, so gelten beide wahren Höhen (h und h') für den zweiten Beobachtungsort. Demnächst wende man den Stand des Chronometers für den Augenblick der grössten Höhe (h') geltend, auf die Chronometerzeit dieser Höhe richtig an, das giebt die mittl. Greenw. Zeit für denselben Augenblick, und dieser entsprechend nehme man die Declination

der Sonne (δ), sowie die Zeitgleichung mit dem Zeichen auf wahre Zeit. Endlich nehme man die halbe Differenz der Chronometerzeiten für den Gang des Chronometers verbessert, also in mittl. Zeit ausgedrückt, so hat man die halbverflossene Zeit, oder $\frac{t-t'}{2}$ (t und t' sind die oberen Stundenwinkel von h und h', östlich —, westlich +), und jetzt berechne man die Mittelzeit $\frac{t+t'}{2}$ nach der bekannten Formel von Douwes, nämlich,

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(t+t') = (\sin h' - \sin h) \sec \varphi \cdot \sec \delta \cdot \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(t-t') \quad \ldots \quad (1),$$

worin φ die Breite nach dem Besteck ist (nördlich +, südlich — zu nehmen, wie δ).

Aus $\frac{t+t'}{2}$ und $\frac{t-t'}{2}$ ergiebt sich durch Subtraction t' (die Differenz zwischen Mittelzeit und halbverfl. Zeit) und mit t', h', δ und φ berechne man die auf den Meridian reducirte Zenithdistanz z (im Südmeridian +, im Nordmeridian —) nach der gleichfalls bekannten Formel

$$\cos z = \sin h' + \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t'}{\sec \varphi \cdot \sec \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

so ist die nach diesen Beobachtungen ermittelte Breite

$$\varphi' = z + \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Weicht nun φ' von φ mehr als 4' ab, so wiederhole man mit φ' die Rechnung nach (1) und (2), wodurch die Mittelzeit, somit auch t', genauer als das erste Mal gefunden wird, ebenso z (wenn t' nicht unter 15' Zeit ist), folglich auch die zum zweiten Mal berechnete Breite φ''. Ergiebt sich dabei, dass $\varphi'' - \varphi' < \varphi' - \varphi$, so ist eine nochmalige Wiederholung der Rechnung nicht nöthig, und φ'' als die wahrscheinliche Breite anzusehen. Es fehlt nun noch die Länge. Ist die Rechnung wiederholt worden, so nehme man den zum zweiten Male berechneten Werth von t' zur Ermittelung der wahren Ortszeit. Ob t' Ost oder West vom Meridian liegt, zeigt das Zu- oder Abnehmen der Höhen, aus denen h' hervorgegangen ist. Sollte h' aber nur auf einer Höhenmessung beruhen, so wird man doch leicht wissen können, ob t' auf der Ost- oder Westseite des Meridians sich befindet. Denn, ist die Mittelzeit grösser als die halbverflossene Zeit, so liegen beide Stundenwinkel auf einer Seite des Meridians, im anderen Falle auf verschiedenen. Liegen sie auf einer Seite des Meridians, so ist t' Ost davon, wenn die erste Höhe kleiner als die zweite, und West davon, wenn die erste Höhe grösser als die zweite ist; liegen sie aber auf verschiedenen Seiten des Meridians, so ist t' Ost oder West zu nehmen, je nachdem die grössere Höhe die erste oder zweite ist. Die wahre Ortszeit ist nun t' selbst, wenn t' West vom Meridian, und $12^h - t'$, wenn t' Ost vom Meridian. Auf diese wahre Ortszeit die Zeitgleichung richtig angewandt, giebt mittl. Ortszeit für den Augenblick der grösseren Höhe, darunter die schon bekannte mittl. Greenw. Zeit nach dem Chronometer gesetzt, und von beiden Zeiten die Differenz genommen, giebt die Länge in Zeit, welche in Bogen verwandelt, mit Ost oder West zu bezeichnen ist, je nachdem die mittl. Ortszeit grösser oder kleiner als die mittl. Greenw. Zeit ist.

Diese Methode ist noch auf See brauchbar zur Breiten- und Längenbestimmung nach dem Chronometer, falls t und t' auch klein ($t < 20'$ Zeit), also h und h' in der Nähe des Meridians beobachtet worden sind, wenn in folgenden Fällen:

1. die Sonne im Ostvertical oder in dessen Nähe zur Bestimmung der Länge nach dem Chronometer nicht hat beobachtet werden können, ebenso wenig zur Bestimmung der Breite eine zweite Höhe nahe dem Meridian oder in demselben, oder

2. Sonnenhöhen, geeigneter als die angedeuteten zu dieser Douwesschen Methode, wegen bewölkten Himmels nicht gemessen werden konnten, oder

3. wie das auch vorkommt, die Sonne durch den Meridian zu beobachten, und dabei gleiche Höhen zu messen, nicht gelungen ist.

Die in Rede stehende Methode wird in diesem ungünstigen Falle immer noch ein Resultat liefern, was besser als gar keins ist. In dem Falle, wenn $t' = 0$, also h' die Meridianhöhe, und $t < 20'$ Zeit, ist sie brauchbarer als in dem, wenn t' nicht $= 0$; denn nun hat man erst die Breite aus der Meridianhöhe und mit dieser Breite nach Formel (1) die Mittelzeit, demnächst die mittl. Ortszeit zu berechnen, und aus letzterer und der mittl. Greenw. Zeit nach dem Chronometer die Länge zu ermitteln, die der Breite entspricht. In jenem ungünstigen Falle aber, wenn nämlich t und t' klein sind, sowie in dem anderen, differiren h und h' nicht viel, und wenn man dann in (1) $2 \cos \frac{1}{2}(h' + h) \cdot \sin \frac{1}{2}(h' - h)$ für $\sin h' - \sin h$ setzt, so geht diese Gleichung über in:

$$\sin \tfrac{1}{2}(t + t') = \frac{\cos \frac{1}{2}(h' + h) \cdot \sin \frac{1}{2}(h' - h)}{\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \frac{1}{2}(t - t')} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

und mit hinreichender Genauigkeit ist

$$\sin \tfrac{1}{2}(t + t') = \frac{h' - h}{t - t'} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(h' + h)}{\cos \varphi \cdot \cos \delta} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Diese Formel kann man anwenden zur Berechnung von $\frac{1}{2}(t + t')$. Wer aber im Besitze der Douwes'schen Hülfstafeln ist, wird zu $\frac{1}{2}(t + t')$ ebenso leicht nach Formel (1) gelangen als nach Formel (5).

Wenn $h' = h$ ist, so wird $\frac{1}{2}(t + t') = 0$, folglich $t = t' = \frac{1}{2}(t - t')$, was aus (1) ebenso zu ersehen ist, als aus (5).

Die Berichtigung wegen Segelung unberücksichtigt zu lassen, wenn t und t' klein sind, empfiehlt sich nicht, denn dieselbe ist leicht zu ermitteln. Wer dies dennoch will, ohne auf Genauigkeit zu verzichten, der muss zwischen beiden Sonnenhöhen rechtweisend Ost oder West segeln. Sind die Höhen dabei gleich, also auf beiden Seiten des Meridians beobachtet, so fällt das Mittel der Chronometerzeiten, den gleichen Höhen entsprechend, auf den wahren Mittag. In diesem Falle darf man nur aus diesem Mittel der Chronometerzeiten die mittl. Greenw. Zeit und aus $0^h\,0'\,0''$ wahrer Ortszeit, durch Anwendung der Zeitgleichung, die mittl. Ortszeit suchen, so giebt die Differenz beider die Länge des Schiffsortes im wahren Mittage. Die Breite dieses Ortes findet man alsdann aus einer der gleichen Höhen (auf den wahren Horizont reducirt), der halbverflossenen Chronometerzeit, die = dem Stundenwinkel dieser Höhe ist, der Mittags-Declination der Sonne und der Besteckbreite nach den Formeln (2) und (3), oder mittelst Culminations-Secunden nach den nautischen Tafeln XXIX. und XXX. Die erste Tafel enthält den Werth von $dh' = 1'',963 \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)}$, die Culminations-Secunden, d. i. die Differenz zwischen der wahren oberen Meridianhöhe H und derjenigen wahren Höhe, deren Stundenwinkel = 1' Zeit ist, in Secunden ausgedrückt; die letztere das Quadrat der Zeitminuten des Stundenwinkels (t'), der wahren Höhe (h') entsprechend.

Dann ist $H = h' + dh' \cdot t^2$ (6)
und $\varphi' = z + \delta$. (7),
worin $z = 90^\circ - H$.

Dies ist gewiss einfach. Hat man mehre gleiche Sonnenhöhen beobachtet, so nehme man das arithmetische Mittel aus den Mitteln der Chronometerzeiten, den gleichen Höhen entsprechend, und verfahre damit zur Ermittelung der Länge wie bereits angegeben. Will man dieselben Vor- und Nachmittagshöhen auch zur Bestimmung der Breite benutzen, so suche man von jeder den Stundenwinkel (t) wie angegeben, und addire zu jeder abgelesenen Höhe die Grösse $dh' \cdot t^2$. Aus den so reducirten Höhen nehme man das arithmetische Mittel und dieses Mittel reducire man auf den wahren Horizont, so hat man H, also auch z, und daraus ergiebt sich $\varphi' = z + \delta$.

Die folgenden Beobachtungen sind dem Vorstehenden gemäss gemacht; ebenso die Berechnung derselben.

1864 d. 3. Juni Mittags befand sich das Schiff nach der Chronometerlänge, des Morgens ermittelt und auf den Mittag reducirt, sowie nach der durch Beobachtung am vorigen Tage gefundenen und auf den gegebenen Mittag reducirten Breite, auf 54° 14′ NBr. und 2° 37′,5 OL. v. Greenw., und es wurden — rechtw. Ost steuernd, in 11 Fuss Rheinl. Augeshöhe, I. C. + 0′ 30″, Beob.-Uhr vor Chronometer 4′ 43″, Chronometer vor mittl. Greenw. Zeit 0^h 50′ 42″, tägl. Gang desselben + 4″,5 gegen mittl. Zeit — folgende Sonnenhöhen durch den Meridian gemessen:

	Beob.-Uhr		
1)	12^h 36′ 14″	☉̲	57° 57′ 0″
2)	37′ 57″		57′ 30″
3)	38′ 56″		57′ 50″
4)	39′ 24″		58′ 0″
5)	40′ 34″		58′ 10″
6)	42′ 32″		58′ 20″
7)	43′ 36″		58′ 20″
8)	44′ 44″		58′ 15″
9)	46′ 31″		58′ 0″
10)	47′ 57″		57′ 30″
11)	49′ 45″		57′ 0″.

Benutzt man die gleichen Höhen 1) und 11), 2) und 10), 4) und 9) zur Längenbestimmung nach dem Chronometer für den wahren Mittag, so kommt die Rechnung wie folgt zu stehen:

	Vormitt.	Nachmitt.	Mittel.
☉̲ 57° 57′ 0″	12^h 36′ 14″	12^h 49′ 45″	12^h 42′ 59″,5
57′ 30″	37′ 57″	47′ 57″	42′ 57″,0
58′ 0″	39′ 24″	46′ 31″	42′ 57″,5

Beob.-Uhr zeigt im wahr. Mittg. . . 12^h 42′ 58″
Beob.-Uhr vor Chron. — 4′ 43″
Chron. zeigt im wahr. Mittg. 12^h 38′ 15″
Chron. vor mittl. Grw. Zeit — 50′ 42″
Mittl. Grw. Zeit i. wahr. Mittg. . . 11^h 47′ 33″.

Die dieser Zeit entsprechende Zeitgleichung ist — 2′ 6″,3 a. w. Z., also mittl. Ortszt. im w. Mittg. 11^h 57′ 53″,7,
mithin OL. in Zeit = 10′ 20″,7
oder OL. v. Grw. im w. Mittg. = 2° 35′,2.

Das Mittel aus den Höhen 6) und 7) kann offenbar als die obere Meridianhöhe genommen werden.

Die Berechnung der Breite hiernach ist:

	⊙ 57° 58′ 20″	im Süd-Merid.
I. C.	+ 0′ 30″	
	57° 58′ 50″	
Kimmt.	— 3′ 18″	
	57° 55′ 32″	
Refr. — Par. . .	— 31″	
	57° 55′ 1″	
⊙ r	+ 15′ 48″	
⊖ w. M. H. . . .	= 58° 10′ 49″ S.	
M. Z. D.	= 31° 49′ 11″ N.	
δ	= 22° 23′ 0″ N.	
Breite	= 54° 12′ 11″ N.	

Am 3. Juni 1864 im wahren Mittage war hiernach das Schiff in 54° 12′,2 NBr. und 2° 35′,2 OL. v. Greenw.

Will man noch die Breite aus den Höhen 1), 2) und 4) ableiten, so hat man ihre Stundenwinkel erst zu ermitteln, die gleich der halben Differenz der Uhrzeiten von 1) und 11), 2) und 10), 4) und 9) sind.

	1)	2)	4)
Das giebt für	t = 6′ 46″	$t_{,}$ = 5′ 0″	t_2 = 3′ 34″
Taf. XXX. giebt	t^2 = 45,5	$t_{,}^2$ = 25	t^2_2 = 12,7
und Taf. XXIX.	dh = 2″,02	dh = 2″,02	dh = 2″,02
mithin	$dh \cdot t^2$ = 92″	$dh \cdot t_{,}^2$ = 51″	$dh \cdot t^2_2$ = 26″.
Es ist	⊙ 57° 57′ 0″	⊙ 57° 57′ 30″	⊙ 57° 58′ 0″
folgl. a. d. Mrd. reduc.	⊙ 57° 58′ 32″	57° 58′ 21″	57° 58′ 26″
	21″		
	26″		

Das Mittel ist .	⊙ 57° 58′ 26″	im Süd-Merid.
I. C.	+ 30″	
	57° 58′ 56″	
Kimmt	— 3′ 18″	
	57° 55′ 38″	
Refr. — Par. . .	— 31″	
	57° 55′ 7″	
⊙ r	+ 15′ 48″	
⊖ w. M. H. . . .	= 58° 10′ 55″ S.	
z . . . M. Z. D. .	= 31° 49′ 5″ N.	
δ	= 22° 23′ 0″ N.	
φ′ Breite	= 54° 12′ 5″ N.	

Hätte man nur die Höhen 1) und 8) beobachtet und wollte man damit Länge und Breite ermitteln nach den Formeln (1), (6) und (7) — da t' klein wird, kann (6) statt (2) benutzt werden —, so wird der Gang der Rechnung folgender sein:

Beob.-Uhr . 12h 36′ 14″	⊙ 57° 57′ 0″	Beob.-Uhr. . . .	12h 44′ 44″		⊙ 57° 58′ 15″
I. C.	+ 30″	Bo.-Uhr v. Chr.	— 4′ 43″	I. C. .	+ 30″
	57° 57′ 30″	Chr.-Zeit	12h 40′ 1″		57° 58′ 45″
Kimmt. . . .	— 3′ 18″	Chr. v. m. Gr. Zt.	— 50′ 42″	Kimmt.	— 3′ 18″
	57° 54′ 12″	mittl. Grw. Zt.	11h 49′ 19″.		57° 55′ 27″
Refr.—Par.	— 31″			Refr. — Par.	— 31″
	57° 53′ 41″				57° 54′ 56″
⊙ r =	+ 15′ 48″			⊙ r =	+ 15′ 48″
h =	58° 9′ 29″.			h' =	58° 10′ 44″.

Dieser mittl. Greenw. Zeit entspricht ☉ $\delta = 22^\circ\ 23'\ 0''$ N. und Zeitgleichung — 2′ 6″,3 a. w. Z. Der Gang der Beob.-Uhr differirt mit dem des Chronometers nicht, was hier nachträglich vermerkt wird.

$\varphi = +\ 54^\circ\ 14'$ log sec = 0,23323
$\delta = +\ 22^\circ\ 23'$ log sec = 0,03402
log A = 0,26725

$12^h\ 44'\ 44''$. . . $h' = 58^\circ\ 10'\ 44''$ n. sin = 84969,9
$12^h\ 36'\ 14''$. . . $h = 58^\circ\ 9'\ 29''$ n. sin = 84950,8
$0^h\ 8'\ 30''$ 19,1 log = 1,28103
$\frac{1}{2}(t-t') =$ $0^h\ 4'\ 15''$ log (halbverfl. Zeit) = 1,73182
$\frac{1}{2}(t+t') =$ $0^h\ 2'\ 11''$ log Mittelzeit = 3,28010
$t' =$ $0^h\ 2'\ 4''$ oder w. Ortszt. weil W. vom Merid.
— 2′ 6″ Zeitgl. a. w. Z.
$11^h\ 59'\ 58''$ mittl. Ortszt. } d. 3. Juni Vormittags,
$11^h\ 49'\ 19''$ mittl. Grw. Zeit }
$0^h\ 10'\ 39''$ OL. in Zeit,
$2^\circ\ 39',7$ OL. v. Greenw. für den Ort und Augenblick der Beobachtung 8).

Mit t' findet man in Taf. XXX. $t'^2 = 4,3$
und Taf. XXIX. giebt $dh' = 2'',02$
also $dh' \cdot t'^2 = 9''$
und da h' . . . $58^\circ\ 10'\ 44''$
so ☉ w. M. H. = $58^\circ\ 10'\ 53''$ S.
M. Z. D. = $31^\circ\ 49'\ 7''$ N.
δ = $22^\circ\ 23'\ 0''$ N.
Breite = $54^\circ\ 12'\ 7''$ N.

Nach Formel (5) hat man so zu rechnen:

$\frac{1}{2}(h'+h) = 58^\circ\ 10'\ 6''$ log cos = 9,72216 — 10
$\varphi = +\ 54^\circ\ 14'$ log sec = 0,23323
$\delta = +\ 22^\circ\ 23'$ log sec = 0,03402
$h'-h = 75''$ log = 1,87506
11,86447 — 10
$t-t' = 8'\ 30''$ Zeit = 7650″ in Bogen log = 3,88366
$\frac{1}{2}(t+t')$ in Bogen = $0^\circ\ 32'\ 54''$ log sin = 7,98081 — 10
„ in Zeit = $0^h\ 2'\ 12''$, genau genug übereinstimmend mit dem Obigen.

Die Höhen müssen scharf beobachtet werden, wenn man ein einigermaassen verlässliches Resultat haben will. In niederen Breiten wird nach dieser Methode die Länge genauer als in höheren gefunden; mit der Breite ist es umgekehrt.

§. 207.

Anweisung, die kenntlichsten Sterne und Sternbilder nach den Sternkarten der nördlichen und südlichen Hemisphäre und den darin gezogenen Linien am Himmel zu finden.

Diese Sternkarten sind nach stereographischer Projection entworfen. In beiden ist die Ebene des Himmels-Aequators die Projections-Ebene. Das Auge hat man sich zu denken: im südlichen Weltpol bei der Karte für die nördliche Halbkugel, und im nördlichen Weltpol bei der für die südliche Halbkugel. Die Projection des Weltpols, dem Auge gegenüberliegend, fällt demnach in den Mittelpunkt der Aequator-Ebene, und die Projectionen der Poldistanzen, von jenem Weltpol gezählt, sind Tangenten der halben Poldistanzen.

Nördliche Sternbilder.

Ursa major oder der grosse Bär.

Dieses sehr kenntliche Sternbild wird hauptsächlich von sieben hellen Sternen gebildet, wovon die vier in der Karte mit α, β, γ und δ bezeichneten ein Trapez bilden und die übrigen darin (ε, ζ, η) in einer krummen Linie, die von der einen Spitze des Vierecks (δ) ausgeht, liegen. δ ist dritter und die übrigen sind zweiter Grösse; α und β bilden die Vorderfüsse, γ und δ die Hinterfüsse, und ε, ζ und η den Schwanz des grossen Bären.

Ursa minor oder der kleine Bär.

Dieses dem grossen Bären ähnliche Sternbild besteht aus sieben Sternen; die Sterne β, γ, ζ und η desselben bilden ein Trapez und die Sterne ε, δ und α den Schwanz, dessen Krümmung der des grossen Bären entgegengesetzt ist. α und β sind zweiter, γ und δ dritter Grösse, und die übrigen sind noch kleiner; β und γ befinden sich in den Vorderfüssen.

Eine gerade Linie durch die Vorderfüsse des grossen Bären in der Richtung von β nach α verlängert, trifft einen Stern zweiter Grösse, welches der äusserste Stern im Schweife des kleinen Bären ist (α), Algedi oder Nord-Polarstern genannt, der etwa ebenso weit von α im grossen Bären, wie dieser Stern von dem äussersten Stern im Schwanze desselben Sternbildes (η) absteht, und den 1. Januar 1877 vom Nordpol 1° 20′ 23″ entfernt war.

Kassiopeja.

Fünf Sterne bezeichnen dieses in der Milchstrasse stehende Sternbild, nämlich α, β, γ, δ und ε, welche alle von dritter Grösse sind bis auf β, der sich der zweiten Grösse nähert. Diese fünf Sterne bilden ein **W**.

Eine gerade Linie durch δ im grossen Bären und den Polarstern trifft α in der Kassiopeja, welcher Stern nahe ebenso weit vom Polarstern, wie dieser von δ im grossen Bären steht.

Cepheus.

Drei Sterne, α, β, γ von dritter Grösse, welche in einer schwach gekrümmten Linie liegen, deren Centrum β in der Kassiopeja ist, und mehrere Sterne vierter Grösse sieht man in diesem Sternbilde.

δ im Cepheus ist ein veränderlicher Stern mit einer Periode von 5 Tagen 8 Stunden und einer Veränderung von dritter bis fünfter Grösse.

Die gerade Linie, welche durch β und α (die Vorderfüsse im grossen Bären) und durch den Polarstern geht, trifft γ im Cepheus, welcher Stern nahe ebenso weit wie der nächste Stern im Vorderfusse des kleinen Bären vom Polarstern entfernt ist.

Eine gerade Linie durch α und β in der Kassiopeja trifft α im Cepheus.

Pegasus oder das fliegende Pferd.

In diesem Bilde sieht man drei Sterne (α, β, γ) zweiter Grösse, welche in Verbindung mit α in der Andromeda ein Trapez bilden.

Wenn α und β (die Vorderfüsse) im grossen Bären unter dem Pol culminiren, culminirt α und β im Pegasus über dem Pol, und umgekehrt.

Die gerade Linie durch β und α im grossen Bären und dem Polarstern geht verlängert durch α und β im Pegasus, und eine gerade Linie durch den Polarstern und β Kassiopeja geht durch α in der Andromeda. α im Pegasus (Markab) ist ein Distanzstern.

Andromeda.

Dieses Sternbild ist kenntlich durch drei Sterne, nämlich α von erster, β und γ von zweiter Grösse, welche nahe in gerader Linie stehen. Ferner sieht man zwischen α und β den Stern δ von dritter Grösse. Dicht bei dem Stern γ in der Andromeda steht ein Nebelfleck.

Die Diagonale durch α im Pegasus nach α in der Andromeda geht verlängert durch γ in der Andromeda und nahe vorbei β in der Andromeda.

Draco oder der Drache.

Der Drachenschwanz liegt zwischen den beiden Bären, der Körper biegt sich um den kleinen Bären und der Kopf streckt sich gegen den Hercules. Im Kopf des Drachen stehen β und γ von zweiter Grösse. Zieht man die übrigen Biegungen, so gehen dieselben durch die kenntlichen Sterne δ, η, ι, α.

α im Drachen ist zweiter Grösse und liegt zwischen dem mittelsten Stern im Schweife des grossen Bären und dem einen Vorderfusse des kleinen Bären.

Eine gerade Linie vom nächsten Hinterfusse des grossen Bären (δ) nach α in der Leier geht durch α im Drachen und zwischen β und γ im Drachenkopf weg.

Perseus.

Dieses Sternbild steht östlich von der Andromeda in der Milchstrasse. Es ist kenntlich durch die Sterne α von zweiter, δ und γ von dritter Grösse, die in einem Bogen liegen; β im Perseus (Algol) ist veränderlich und nimmt plötzlich von zweiter bis vierter Grösse ab.

Der Bogen, durch α, β, γ in der Andromeda gehend, trifft verlängert α im Perseus, welcher Stern nahe ebenso weit von γ in der Andromeda als dieser von β in der Andromeda absteht.

Eine gerade Linie durch α und β in der Andromeda geht verlängert durch β im Perseus.

Auriga oder der Fuhrmann.

Von den Sternen in diesem Bilde zeichnen sich aus: α von erster Grösse, Capella genannt, β von zweiter Grösse; übrigens befinden sich in demselben mehrere Sterne dritter Grösse, von welchen drei ein gleichschenkliges, spitzwinkliges Dreieck bilden, und nahe an Capella stehen, woran dieser Stern zu erkennen ist, welche sich aber nicht in dieser Karte befinden.

Eine gerade Linie vom Polarstern nach β im Orion (Rigel) geht durch Capella.

Eine gerade Linie vom Polarstern nach Beteigeuze (α im Orion) geht durch β im Fuhrmann, welcher Stern nahe ebenso weit als Capella vom Polarstern absteht.

Camelopardalus, das Camelopard oder die Giraffe.

Dieses Sternbild hat keine besonders kenntlichen Sterne und steht in dem Raume, welcher die beiden Bären vom Perseus und dem Fuhrmann trennt.

Der grosse und kleine Triangel.

Diese Sternbilder liegen zwischen der Andromeda, dem Perseus und dem Widder und haben keine besonders kenntlichen Sterne. α, β und γ sind vierter Grösse, und bilden den einen Triangel (Dreieck).

Lynx oder der Luchs.

Dieses Sternbild hat nur schwach leuchtende Sterne und liegt zwischen dem grossen Bären und Fuhrmann.

Leo minor oder der kleine Löwe

steht zwischen dem grossen Bären und Löwen, hat fünf Sterne vierter Grösse, welche eine Figur bilden, die derjenigen der grossen Sterne im Löwen ähnlich ist.

Bootes.

Die kenntlichsten Sterne in diesem Bilde sind α, Arctur genannt, von erster Grösse, mit einem röthlichen Lichte, β, γ, δ, ε, ζ und η dritter Grösse. α, ε und δ stehen in gerader Linie; β, γ, δ und ε bilden ein Trapez.

Der Bogen, durch den Schwanz des grossen Bären verlängert, trifft Arcturus, der nahe ebenso weit vom äussersten Stern des Schwanzes, wie dieser von dem entferntesten Stern im Vorderfusse des grossen Bären entfernt ist.

Canes venatici oder die Jagdhunde

stehen unter dem Schwanze des grossen Bären. Der nördlichste Hund heisst Asterion, der südlichste Chara. Der kenntlichste Stern in diesem Bilde ist α von zweiter Grösse; dieser Stern bildet mit dem äussersten Stern und dem zunächst am Hinterfusse stehenden Stern im Schwanze des grossen Bären ein rechtwinkliges Dreieck, dessen rechter Winkel im äussersten Stern des Schwanzes sich befindet.

Coma Berenices oder Berenices Haupthaar

ist eine Gruppe kleiner Sterne, welche zwischen der Jungfrau, dem Löwen, dem grossen Bären, den Jagdhunden und Bootes liegen.

Corona Borealis oder die nördliche Krone

besteht aus den Sternen θ, β, α, γ, δ, ε, durch welche sich ein Halbkreis legen lässt, dessen concave Seite dem Haupte des Drachen zugewandt ist. Der kenntlichste Stern in diesem Bilde ist α von zweiter Grösse, Gemma (der Edelstein) genannt.

Sagitta oder der Pfeil,

ein Sternbild, keine hellen Sterne enthaltend, steht zwischen dem Adler und β im Schwan und ist an mehreren Sternen vierter und fünfter Grösse zu erkennen, die in der Gegend der Sterne des Adlers stehen.

Lyra oder die Leier.

Die hellsten Sterne in diesem Bilde sind: α von erster Grösse, Wega genannt, β und γ von dritter Grösse, δ ein Doppelstern, bestehend aus einem Stern fünfter und einem sechster Grösse; β ist veränderlich von dritter bis fünfter Grösse.

Eine gerade Linie durch den Vorderfuss β im grossen Bären und α im Drachen trifft Wega, welche nahe ebenso weit vom Polarstern, wie dieser von Capella entfernt ist.

Cygnus oder der Schwan.

Dieses Sternbild steht in dem einen Arm der Milchstrasse und zwar nahe da, wo dieselbe sich in zwei Arme theilt, ist überdies durch fünf Sterne, die ein Kreuz bilden, kenntlich. Dies sind: α, Deneb genannt, ist erster Grösse, steht in der Spitze, δ, γ und ε, dritter Grösse, bilden das Querstück, und β, dritter Grösse, steht unten im Kreuz.

Aquila oder der Adler

steht in einem Arme der Milchstrasse und ist leicht durch drei Sterne, die in gerader Linie stehen, kenntlich. α, Atair genannt, ist erster Grösse, β und γ sind dritter Grösse.

Eine gerade Linie durch Wega und γ in der Leier über diesen Stern hinaus verlängert, geht durch γ, α und β im Adler. Atair ist ein Distanzstern.

Antinous.

Die Sterne (η, θ, ι, $\varkappa$), dritter Grösse, stehen in einem Viereck dicht unter der Milchstrasse.

Delphinus oder der Delphin

steht dicht bei der Milchstrasse, ist kenntlich durch die Sterne α, β, γ und δ von dritter Grösse, welche ein Viereck bilden, und ε von vierter Grösse.

Eine gerade Linie durch den Polarstern und Deneb im Schwan, trifft α im Delphin, der nahe ebenso weit wie Markab (α Pegasus) vom Polarstern entfernt ist.

Equuleus oder das Füllen oder kleine Pferd

steht zwischen dem Delphin und Pegasus über dem Wassermanne; es ist kenntlich durch die Sterne α, β, δ und γ, sämmtlich vierter Grösse, die ein Trapezoid bilden.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch β Cephei geht verlängert durch δ und α im Füllen.

Ophiuchus et Serpens oder der Schlangenträger und die Schlange

nehmen am Himmel einen grossen Raum ein und letztere biegt sich um ersteren. α ist zweiter Grösse und steht im Kopfe des Schlangenträgers, β und γ sind dritter Grösse; weiter nach unten noch η und ζ von dritter Grösse. α wird Ras Alhague genannt.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch β im Drachenkopfe trifft Ras Alhague, der nahe ebenso weit als Atair vom Polarstern entfernt ist.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch Gemma trifft nahe α in der Schlange oder das Schlangenherz, welcher Stern zweiter Grösse ist.

Taurus Poniatovii oder Poniatowsky's Stier.

In diesem Bilde, welches bei der rechten Schulter des Schlangenträgers steht, bilden fünf kleinere Sterne ein V; die übrigen sind wenig kenntlich.

Hercules.

Die hellsten Sterne in diesem Bilde sind: α, β und γ von dritter Grösse, und ε, ζ, η, π dritter und vierter Grösse, die ein Viereck bilden. α wird Ras Algethi genannt und ist veränderlich.

Eine gerade Linie von Capella durch den Polarstern geht durch π und α im Hercules, welcher letztere Stern nahe ebenso weit vom Polarstern entfernt ist, als Ras Alhague (α im Schlangenträger).

Wenn Capella im oberen Meridian, so ist Ras Algethi im unteren.

Die übrigen nördlichen Sternbilder sind wenig kenntlich. Ihre Stelle am Himmel findet man mit Hülfe der Karte und der schon bekannten Sterne.

Die Zodiacal-Sternbilder.

Aries oder der Widder.

Dieses Sternbild steht unter Perseus, Andromeda und den Triangeln; es ist durch drei Sterne kenntlich, nämlich: α von zweiter, β von dritter und γ von vierter Grösse, welche ein stumpfwinkliges Dreieck bilden, in dessen kleinstem Winkel α sich befindet; α ist ein Distanzstern; γ ein Doppelstern.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch γ in der Andromeda trifft α Widder, welcher auch nahe in der Mitte zwischen γ Pegasi und Aldebaran steht.

Taurus oder der Stier.

Zwei Sterngruppen bezeichnen dieses Sternbild, nämlich: die Hyaden α, γ, δ, ε in Form eines V, bilden den Kopf, worin α von erster Grösse ist, ein röthliches Licht hat und sich in einem Auge des Stiers befindet.

ε sitzt im anderen Auge und ist dritter Grösse. Die zweite Gruppe sind die Plejaden oder das Siebengestirn, welches aus einer Menge einander nahestehender Sterne besteht, von denen man sechs mit blossem Auge sieht; da man früher aber sieben zu sehen glaubte, so hat es den obigen Namen erhalten.

Eine gerade Linie von Bellatrix (γ im Orion) nach den Plejaden gezogen, trifft Aldebaran (α Tauri), der sich nahe in der Mitte dieser Linie befindet. Aldebaran ist ein Distanzstern.

Gemini oder die Zwillinge.

In diesem Sternbilde sind α und β zwischen erster und zweiter, und γ dritter Grösse; α wird Castor und β Pollux genannt; letzterer ist ein Distanzstern, ersterer Doppelstern.

Eine gerade Linie von Rigel (β im Orion) durch Beteigeuze (α im Orion) trifft Castor, der nahe ebenso weit als Capella von Rigel entfernt ist.

Cancer oder der Krebs.

In diesem Sternbilde sind keine hellen Sterne. Es ist nur ein für das blosse Auge sichtbarer Sternhaufen.

Leo oder der Löwe.

Dieses Sternbild ist kenntlich an vier Sternen, nämlich: α von erster Grösse, Regulus oder das Löwenherz genannt, β und γ von zweiter Grösse, wovon der erstere Denebola heisst, δ von dritter Grösse, welche vier Sterne ein Trapezoid bilden.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch den rechten Hinterfuss des grossen Bären (γ) wird verlängert Denebola im Löwen treffen, welcher Stern doppelt so weit als (γ) im grossen Bären vom Polarstern entfernt ist.

Eine zweite gerade Linie durch die Vorderfüsse des grossen Bären geht durch die Mitte zwischen Denebola und Regulus; letzterer ist ein Distanzstern.

Virgo oder die Jungfrau.

Die kenntlichsten Sterne in diesem Bilde sind: α von erster Grösse, Spica genannt, β, γ, δ, ε von dritter Grösse.

Spica, Arcturus und Denebola bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Der Bogen durch den Schwanz des grossen Bären und Arcturus trifft verlängert Spica, welche nahe ebenso weit von Arcturus, wie dieser vom äussersten Stern (η) im Schwanze des grossen Bären entfernt ist. Spica ist ein Distanzstern.

Libra oder die Waage.

Die hellsten Sterne in diesem Bilde sind: α, ein Doppelstern (bestehend aus einem Stern dritter und einem anderen sechster Grösse), und β von zweiter Grösse.

Eine gerade Linie von α im grossen Bären (Dubhe) durch Arcturus leitet nahe auf α in der Waage, welcher Stern ungefähr in der Mitte zwischen Spica und Antares steht.

Scorpio oder der Scorpion.

Die hellsten Sterne sind: α von erster Grösse mit einem röthlichen Licht, Antares oder das Herz des Scorpions genannt; β ein Doppelstern, bestehend aus einem Stern zweiter und einem fünfter Grösse.

Antares ist der Mittelpunkt des Bogens, durch die Sterne γ, β, δ und π desselben Sternbildes gedacht.

Arctur, Wega und Antares bilden ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem letzterer der Grundlinie gegenübersteht.

Eine gerade Linie von Wega durch α im Hercules (Ras Algethi) führt nahe auf Antares; letzterer ist ein Distanzstern.

Sagittarius oder der Schütze.

In diesem Bilde machen die Sterne ζ, τ, σ, φ ein Trapez und σ ist dritter Grösse.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch Wega geht durch den Schützen, welcher theilweise in der Milchstrasse steht.

Capricornus oder der Steinbock.

In diesem Sternbilde sind keine hellen Sterne.

Eine gerade Linie von Wega nach Atair geht, verlängert, durch β im Steinbock; Atair steht nahe in der Mitte dieser Linie.

Aquarius oder der Wassermann.

Dieses Sternbild steht unter dem Füllen und Pegasus; die Sterne α, γ, δ und β von dritter Grösse sind die hellsten.

Die Diagonale durch α im Pegasus (Markab) und α in der Andromeda (Sirrah) leitet auf α im Wassermanne, der ein wenig südlich vom Aequator steht.

Pisces oder die Fische.

Dieses Sternbild nimmt den Raum zwischen Wassermann, Pegasus, Andromeda, Widder und Wallfisch (Cetus) ein.

Der eine Fisch erstreckt sich bis unter Andromeda, der andere gegen Wassermann hin, beide werden durch ein Band vereint, in dessen Knoten α von dritter Grösse sitzt und Okda oder der Fischknoten genannt wird.

Eine gerade Linie von γ in der Andromeda durch α im Widder leitet beinahe auf α in den Fischen, welcher Stern nahe ebenso weit von α im Widder, wie dieser von γ in der Andromeda steht.

Südliche Sternbilder.

Cetus oder der Wallfisch.

In diesem Sternbilde, welches unter Widder steht, sind α und β von zweiter, γ, η, o, ζ, δ, ι, τ von dritter Grösse. o, der als ein Stern zweiter Grösse bezeichnet wird, ist besonders merkwürdig, denn er verliert nach und nach sein Licht, und nach Verlauf von 334 Tagen zeigt er sich wieder in seinem früheren Glanze. α heisst Menkar und o wird Mira genannt.

Eine gerade Linie von β in der Andromeda (Mirach) durch α im Widder geht ein wenig zur Linken von α im Wallfisch (Menkar); α im Widder steht nahe in der Mitte zwischen beiden. Eine gerade Linie von γ in der Andromeda durch α im Widder trifft nahe Mira.

Orion.

Dieses Sternbild ist das schönste am Himmel; es befinden sich in demselben: α von erster und γ von zweiter Grösse in der Schulter; im Kopf ist eine Sterngruppe, worunter λ; im Gürtel δ, ε, ζ von zweiter Grösse in gerader Linie; im Schwerte sind Sterne von dritter Grösse und ein grosser schöner Nebelfleck, der mittelst eines schwachen Fernrohrs gesehen werden kann und dazu beiträgt, das Schwert kenntlicher zu machen; im linken Fusse ist β von erster Grösse und im rechten κ von dritter Grösse.

α wird Beteigeuze, β Riegel, γ Bellatrix genannt; die Sterne im Gürtel nennt man die drei Könige oder den Jacobsstab.

Polarstern, Capella und Rigel stehen in gerader Linie.

Canis major oder der grosse Hund.

In diesem Bilde befindet sich der hellste Fixstern, nämlich Sirius, der mit α bezeichnet wird; ferner sind darin β, ε, δ, η von zweiter, ν, ο und ζ von dritter und θ, ι, σ und λ von vierter Grösse.

Eine gerade Linie durch den Gürtel des Orion trifft verlängert den Sirius, der nahe ebenso weit vom niedrigsten Stern im Gürtel (ζ), wie dieser von Aldebaran entfernt ist.

Canis minor oder der kleine Hund.

α von erster Grösse, Procyon genannt, und β von dritter Grösse, der Gomeisa heisst, sind die kenntlichsten Sterne in diesem Bilde.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch die Mitte zwischen Castor und Pollux trifft Procyon, der nahe ebenso weit von Castor, wie dieser von Capella absteht. Eine Gerade von Bellatrix über Beteigeuze trifft auch Procyon.

Fluvius Eridanus oder der Eridanus-Fluss,

geht aus von β im Orion (Rigel), erstreckt sich bis unter das Sternbild Wallfisch und dann hinunter gegen Süden, bis er bei einem Stern α von erster Grösse endigt, der 58° S. Decl. hat und Achernar genannt wird; die übrigen hellern Sterne sind γ von zweiter und β von dritter Grösse, welcher letztere über β im Orion (Rigel) steht.

Lepus oder der Haase

steht unter dem Orion; die Sterne α, β, δ, γ in demselben sind dritter Grösse und bilden ein Trapez.

Hydra oder die Wasserschlange

erstreckt sich über einen grossen Theil des Himmels; ihr Kopf steht unter dem Krebse; der Körper windet sich in verschiedenen Biegungen bis unter den Löwen, die Jungfrau und Waage, bis der Schwanz bei der einen Klaue des Scorpions endet. Im Kopf stehen: δ, ε, ζ und η von dritter und vierter Grösse; südlicher steht α von zweiter Grösse, Alphard genannt, der jeden 994sten Tag sichtbar ist. Man erkennt die Biegungen der Schlange durch mehrere Sterne vierter Grösse, wie τ, μ, ξ, β, γ, π.

Eine gekrümmte Linie durch α im Orion (Beteigeuze) und durch Procyon trifft α in der Wasserschlange, welcher Stern nahe ebenso weit von Procyon, wie dieser von Beteigeuze entfernt ist.

Corvus oder der Rabe

steht zwischen Wasserschlange und Jungfrau und die hellsten Sterne in demselben sind: β von zweiter, γ und δ von dritter, α und ε von vierter Grösse. α, β, γ und δ bilden ein Trapezoid.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch den linken Hinterfuss (δ) des grossen Bären geht durch die Mitte zwischen α und β im Raben.

Crater oder das Becken (die Schale)

zwischen Löwe, Wasserschlange und Rabe; enthält sechs Sterne vierter Grösse, die in einem Halbkreise stehen.

Argo Navis oder das Schiff Argo.

Der Stern α von erster Grösse, nahe so hell wie Sirius, ist der hellste in diesem Bilde; ferner sind in demselben β, γ, ε, ξ, ι, δ, η von zweiter Grösse. α wird Canopus genannt.

Monoceros oder das asiatische Einhorn

zwischen Orion und beiden Hunden; es enthält keine hellen Sterne.

Centaurus (Ungeheuer, halb Mensch und halb Pferd) und *Crux* (das südliche Kreuz)

sind die bekanntesten Sternbilder der südlichen Hemisphäre. In ersterem sind α und β von erster Grösse und zehn Sterne von dritter Grösse. Der Kopf des Centaurus steht unter dem Schwanze der Wasserschlange. Zwischen den Beinen des Centaurus steht das südliche Kreuz, gebildet durch α von erster, β und γ von zweiter und δ zwischen zweiter und dritter Grösse.

Piscis Australis oder der südliche Fisch

steht unter dem Wassermanne. Der hellste Stern in diesem Bilde ist α, von erster Grösse, Fomalhaut genannt.

Eine gerade Linie vom Polarstern durch Markab geht Fomalhaut nahe vorbei, der fast ebenso weit von Markab, wie dieser vom Polarstern entfernt ist. Fomalhaut ist ein Distanzstern.

In den Sternbildern *Columba* (die Taube), *Pavo* (der Pfau) sind die Sterne, in jedem dieser Bilder mit α bezeichnet, zweiter Grösse.

Die übrigen Sternbilder sind weniger wichtig und können mit Hülfe der Sternkarte und der schon bekannten Sterne gefunden werden.

Magellanische Wolken, auch Capwolken genannt, und der Kohlensack im südlichen Kreuz.

Nach Humboldt's Kosmos liegt die grosse Lichtwolke zwischen $4^h\ 40'$ und 6^h Rectascension, 156° und 162° Nordpoldistanz und hat 582 Sterne, 291 Nebelflecke, 46 Sternhaufen; die kleine befindet sich zwischen $0^h\ 28'$

und 1^h 15′ Rectascension, 162° und 165° Nordpoldistanz und enthält 200 Sterne, 37 Nebelflecke, 7 Sternhaufen. Diesen Wolken gegenüber kreist um den Südpol in grösserem Abstande der Kohlensack im südlichen Kreuz. Dieser Kohlensack ist eine schwarze birnartige Stelle an der scheinbaren Himmelskugel von 8° Länge und 5° Breite. Diese beiden Lichtwolken sowohl als der Kohlensack im südlichen Kreuz müssen die Aufmerksamkeit der Seeleute auf südlichen Breiten noch mehr erregen, als dies das Sternbild »der grosse Bär« auf Nordbreite thut, weshalb derselben hier auch zu gedenken war.

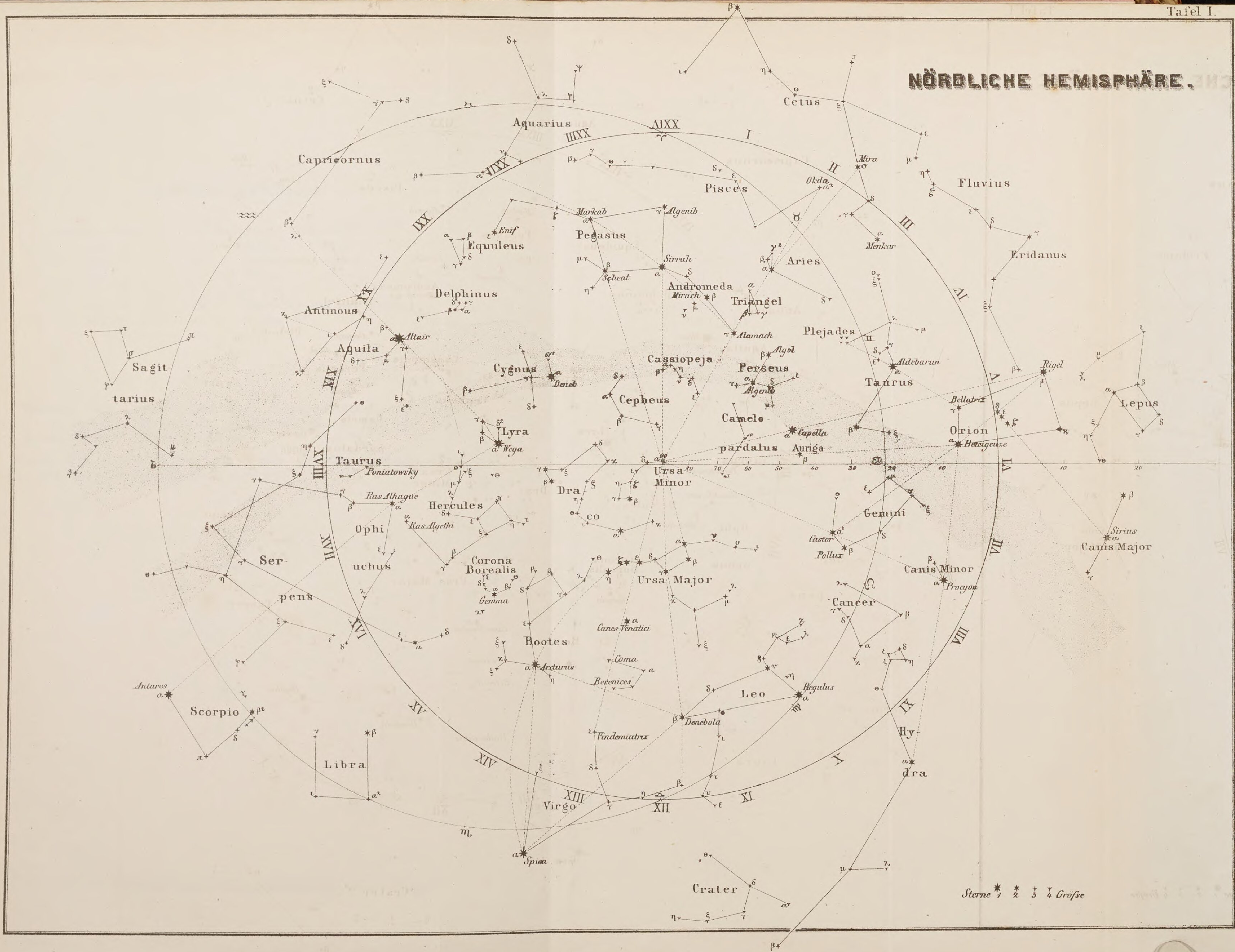
Druckfehler-Berichtigung.


Seite 306,	Zeile 9	von unten	lies:	dünnere statt dickere.
» 306,	» 7	» »	»	dickere » dünnere.
» 307,	» 35	» »	»	dünnere » dickere.
» 307,	» 32	» »	»	dickere » dünnere.
» 332,	» 4	» »	»	20′ statt 30′.
» 344,	» 9	» oben	»	Retardation statt Acceleration.
» 395,	» 12	» »	»	27′ statt 26′.

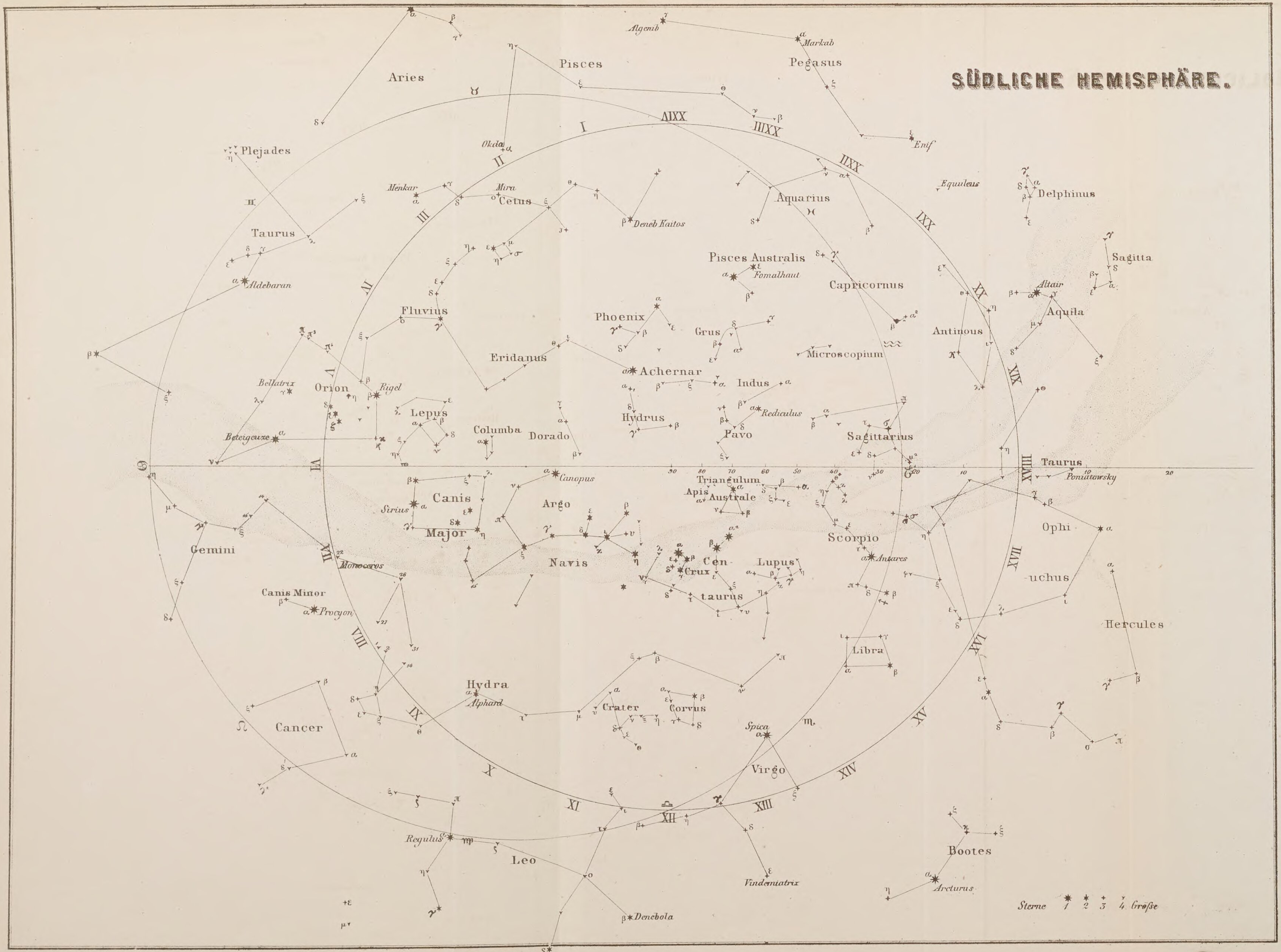
Während des Druckes sind noch folgende Asteroiden entdeckt worden: (170) Myrrha, (171) Ophelia, (172) Baucis, (173), (174) und (175). Es hat auch (162) den Namen Laurentia erhalten.


Ferner sind in Washington zwei Monde des Mars entdeckt worden. (Seite 138 und 137 steht das, wozu dies gehört.)

Berlin, gedruckt in der vormaligen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei (unter Reichsverwaltung).


NÖRDLICHE HEMISPHÄRE.
Cetus
Mira
Menkar
Fluvius
Eridanus
Aquarius
Capricornus
Pisces
Okda
Markab
Algenib
Pegasus
Enif
Equuleus
Sirrah
Scheat
Andromeda
Mirach
Triangel
Aries
Delphinus
Antinous
Altair
Aquila
Sagit-
tarius
Alamach
Plejades
Algol
Cassiopeja
Perseus
Algenib
Aldebaran
Taurus
Cygnus
Deneb
Cepheus
Rigel
Lepus
Bellatrix
Orion
Beteigeuze
Camelo-
pardalus
Capella
Auriga
Lyra
Wega
Taurus
Poniatowsky
Ursa
Minor
Ras Alhague
Hercules
Dra
co
Ras Algethi
Ophi
uchus
Gemini
Castor
Pollux
Sirius
Canis Major
Ser-
pens
Corona
Borealis
Gemma
Ursa Major
Canis Minor
Procyon
Cancer
Canes Venatici
Bootes
Arcturus
Coma
Berenices
Antares
Scorpio
Leo
Regulus
Denebola
Libra
Vindemiatrix
Hy
dra
Virgo
Spica
Crater
Sterne 1 2 3 4 Größe


Cetus
Pisces
Pegasus
Markab
Algenib
Sirrah
Scheat
Andromeda
Mirach
Triangel
Alamach
Aries
Mira
Okda
Menkar
Plejades
Cassiopeja
Perseus
Algol
Algenib
Cepheus
Deneb
Camelo-
pardalus
Capella
Auriga
Ursa
Minor
Dra
co
Ursa Major
Castor
Pollux
Canes Venatici
Coma
Berenices
Cancer
Leo
Regulus
Denebola
Vindemiatrix
Virgo
Crater
I
II
X
XI
XII
XIII


SÜDLICHE HEMISPHÄRE.
Aries
Pisces
Pegasus
Algenib
Markab
Enif
Plejades
Taurus
Aldebaran
Menkar
Mira
Cetus
Okda
Deneb Kaitos
Aquarius
Equuleus
Delphinus
Sagitta
Pisces Australis
Fomalhaut
Capricornus
Altair
Aquila
Antinous
Fluvius
Eridanus
Phoenix
Grus
Microscopium
Achernar
Indus
Bellatrix
Orion
Rigel
Lepus
Columba
Dorado
Hydrus
Pavo
Rediculus
Sagittarius
Beteigeuze
Canopus
Taurus
Poniatowsky
Triangulum
Apis
Australe
Canis
Sirius
Major
Argo
Navis
Scorpio
Antares
Ophi
-uchus
Gemini
Monoceros
Cen-
Crux
taurus
Lupus
Canis Minor
Procyon
Hercules
Libra
Hydra
Alphard
Crater
Corvus
Cancer
Spica
Virgo
Regulus
Leo
Denebola
Vindemiatrix
Bootes
Arcturus
Sterne 1 2 3 4 Größe


Algenib
Markab
Pisces
Pegasus
Aquarius
Deneb Kaitos
Pisces Australis
Fomalhaut
Capricornus
Phoenix
Grus
Microscopium
Achernar
Indus
Hydrus
Rediculus
Pavo
Sagittariu
Canopus
Triangulum
Apis
Australe
Argo
Scorpio
Antare
Navis
Cen-
taurus
Crux
Lupus
Libra
Crater
Corvus
Spica
Virgo
Vindemiatrix
Denebola

In R. v. Decker's Verlag **Marquardt & Schenck** in Berlin C., Niederwallstrasse 22 sind erschienen und durch jede Buchhandlung zu beziehen:

Domke, F., Navigations-Lehrer. **Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln,** nebst Erklärung und Gebrauchs-Anweisung, für die Königlich Preussischen Navigations-Schulen bearbeitet. Herausgegeben im Auftrage des Ministers für Handel etc. 1874. Sechste Auflage. 25¼ Bog. Lex.-8. geh. 4 M.
In Kattun dauerhaft gebunden 4,50 M.

Verzeichniss der Leuchtfeuer aller Meere. Herausgegeben von dem Hydrographischen Büreau der Kaiserlichen Admiralität. 1874—1876. gr. Lex. 8. Theil I. Zweite neu bearbeitete Auflage. (Abgeschlossen am 31. Dezember 1875.) 17 Bog. geh. 2,80 M.
In Kattun gebunden 4 M.
Inhalt: Titel 1. Ostsee. Titel 2. Belte, Sund, Kattegat und Skagerak. Titel 3. Nordsee. Tit. 4. Englischer Kanal, Westküste von England und Schottland, Küsten von Irland. Titel 13. Nördliches und südliches Eismeer.
Theil II. 26¾ Bog. geh. 3,75 M.
In Kattun gebunden 5,25 M.
Inhalt: Titel 5. Mittelmeer, Schwarzes Meer und Azowsches Meer. Titel. 6. Nördlicher Atlantischer Ocean. Titel 7. Westindien. Titel 8. Südlicher Atlantischer Ocean.
Theil III. 6½ Bog. geh. 1,05 M.
In Kattun gebunden 1,75 M.
Inhalt: Titel 9. Indischer Ocean. Titel 10. Ostindischer Archipel. Titel 11. Nördlicher Stiller Ocean. Titel 12. Südlicher Stiller Ocean.
Nachtrag zum Theil III. (Abgeschlossen am 15. Februar 1876.) 1¼ Bog. 8. geh. gratis.

Expedition, Preussische, nach Ost-Asien. Nach amtlichen Quellen. gr. Lex.-8.
I. Band. 1864. 23½ Bog. mit 12 Illustrationen und 2 Karten. geh. 12 M.
II. Band. 1866. 24¼ Bog. mit 12 Illustrationen. geh. 12 M.
III. Band. 1873. 27¾ Bog. mit 1 Karte. geh. 12 M.
IV. Band. 1873. 28½ Bog. mit 24 Illustrationen und 1 Karte. geh. 12 M.
In englischem Einband à Band 13 M.

Expedition, preussische, nach Ost-Asien. **Ansichten aus Japan, China und Siam.** (Im Auftrage der Königlichen Regierung herausgegeben von A. Berg.) 1865.—73. Format: 20½ zu 26½ Zoll, mit Umschlag. Text in deutscher, französischer und englischer Sprache. Druck der Ansichten von Korn. 10 Hefte à 30 M.
Jedes Heft enthält 3 Blatt Text und 6 Blatt Ansichten. Heft 1. ausserdem 1 Blatt Haupttitel. Die Hefte I—incl. V. enthalten Ansichten aus Japan. VI.—IX. aus China. X. aus China und Siam.

Fontane, Th. Der Schleswig-Holsteinsche Krieg im Jahre 1864. Illustrirt von **Ludwig Burger.** 1866. 24 Bog. Lex.-8. Mit 4 Portraits, 56 in den Text gedruckten Abbildungen und Plänen in Holzschnitt und 9 Karten in Steindruck. In illustrirtem Umschlage geh. 8,25 M.
cartonnirt 9,25 M.
Elegant gebunden 10,50 M.

— — **Der Deutsche Krieg von 1866.** Illustrirt von **Ludwig Burger.** 1870. 1871. Fein Velin Royal-4.
I. Band: **Der Feldzug in Böhmen und Mähren.** 93 Bog. mit 13 großen Portraits, 11 großen Gefechtsbildern, 234 in den Text gedruckten Abbildungen und 39 Plänen in Holzschnitt. geh.
II. Band: **Der Feldzug in West- und Mitteldeutschland.** Anhang: Die Denkmäler. 50½ Bog. mit 4 Portraits, 8 großen Gefechtsbildern, 149 in den Text gedruckten Abbildungen und 26 Plänen in Holzschnitt. geh. Preis für 2 Bände 60 M.
geb. mit Deckelverzierung 68 M.

— — Volks-Ausgabe. Zweite Auflage. 1871. 2 Bände. 72 Bog. Lexicon-8. getönt, mit 17 großen Portraits, 19 großen Gefechtsbildern, 383 in den Text gedruckten Abbildungen und 65 Plänen in Holzschnitt. geh. 18 M.
geb. mit besonderer Deckelverzierung nach L. Burger 22,50 M.
(Beide Theile werden nicht getrennt.)

— — **Kriegsgefangen.** Erlebtes 1870. 1871. 21½ Bog. 8. geh. 4,50 M.

— — **Aus den Tagen der Occupation.** Eine Osterreise durch Nord-Frankreich und Elsaß-Lothringen 1871. Zweite Auflage. 1872. 2 Bände. 41½ Bog. 8. geh. 9 M.

— — **Der Krieg gegen Frankreich** 1870—1871. 1873—1876. gr. Lex.-8.
I. Band. Der Krieg gegen das Kaiserreich.
1. Halbband. Bis Gravelotte, 18. August 1870. 23⅛ Bog. geh. mit 32 Plänen in Holzschnitt. 6 M.
2. Halbband. Von Gravelotte bis zur Kapitulation von Metz. (19. August bis 27. Octbr. 1870.) 32¼ Bog. geh. mit 35 Plänen in Holzschnitt. 8,50 M.
II. Band. Der Krieg gegen die Republik.
1. Halbband. In und vor Paris bis zum 24. December 1870. 27¼ Bog. geh. mit 44. Plänen in Holzschnitt. 7,50 M.
2. Halbband. Orleans bis zum Einzuge in Berlin. 38¼ Bog. geh. mit 104 Plänen in Holzschnitt. 11,50 M.
Vollständig: 2 Bände. geheftet. 33,50 M.
geb. mit besonderer Deckelverzierung nach L. Burger. 40 M.

BUCHBINDEREI
VON
AUGUST WERZ
MÜNCHEN

BUCHBINDEREI
VON
AUGUST WERZ
MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Albrecht, Michael Friedrich / Albrecht, Michael Friedrich, / Vierow, C. S.

Lehrbuch der Navigation und ihrer mathematischen Hülfswissenschaften für die Königlichen Preussischen Navigations-Schulen hrsg. im Auftrage des Kö niglichen Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten

Berlin 1877

A.hydr. 3 k
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11354083-1